2025 北京高考真题

数　　学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\}, N=\{1,2,3\}$，则 $M\cap N=$（　）

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 8

3. 双曲线 $x^2-4y^2=4$ 的离心率为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\sqrt{5}$

4. 为了得到函数 $y=9^x$ 的图象，只需把函数 $y=3^x$ 的图象上所有点的（　）

A. 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变）　　B. 横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变）

C. 纵坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍（横坐标不变）　　D. 纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变）

5. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，$a_1=-2$，若 a_3,a_4,a_6 成等比数列，则 $a_{10}=$（　）

A. -20　　B. -18　　C. 16　　D. 18

6. 已知 $a>0,b>0$，则（　）

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{2}{\sqrt{ab}}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则“$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，若 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点，则 ω 的最小值为（　）

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 3

9. 一定条件下，某人工智能大语言模型训练 N 个单位的数据量所需要的时间 $T=k\log_2 N$（单位：h），其中 k 为常数．在此条件下，已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时，训练时间增加 20h；当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时，训练时间增加（　）

A. 2h　　B. 4h　　C. 20h　　D. 40h

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$．设 $C(3,4)$，则 $|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是（　）

A. $[6,14]$　　B. $[6,12]$　　C. $[8,14]$　　D. $[8,12]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

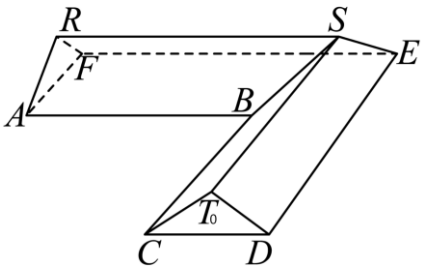
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的顶点到焦点的距离为 3，则 $p=$_____.

12. 已知 $(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$，则 $a_0=$_____；$a_1+a_2+a_3+a_4=$_____.

13. 已知 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$．写出满足条件的一组 α,β 的值 $\alpha=$_____，$\beta=$_____.

14. 某科技兴趣小组用 3D 打印机制作的一个零件可以抽象为如图所示的多面体，其中 $ABCDEF$ 是一个平面多边形，平面 $AFR\perp$ 平面 ABC，平面 $CDT_0\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$AB//EF//RS//CD$，$BC//DE//ST_0//AF$．若 $AB=BC=8, AF=CD=4, RA=RF=T_0C=T_0D=\frac{5}{2}$，则该多面体的体积为_____.



15. 关于定义域为 **R** 的函数 $f(x)$，给出下列四个结论：

①存在在 **R** 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

②存在在 **R** 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f\left(x\right)-f\left(2x\right)=x$ 恒成立；

③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个；

④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

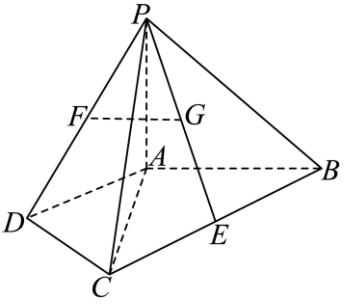
16. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=-\frac{1}{3}, a\sin C=4\sqrt{2}$.

（1）求 c 的值；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在，求 BC 边上的高.

条件①：$a=6$；条件②：$a\sin B=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$；条件③：$\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{2}$.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle ADC$ 与 $\triangle BAC$ 均为等腰直角三角形，$\angle ADC=90°$，$\angle BAC=90°$，E 为 BC 的中点.



（1）若 F,G 分别为 PD,PE 的中点，求证：$FG//$ 平面 PAB；

（2）若 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AC$，求直线 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值.

18. 某次考试中，只有一道单项选择题考查了某个知识点，甲、乙两校的高一年级学生都参加了这次考试. 为了解学生对该知识点的掌握情况，随机抽查了甲、乙两校高一年级各 100 名学生该题的答题数据，其中甲校学生选择正确的人数为 80，乙校学生选择正确的人数为 75. 假设学生之间答题相互独立，用频率估计概率.

（1）估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 p

（2）从甲、乙两校高一年级学生中各随机抽取 1 名，设 X 为这 2 名学生中该题选择正确的人数，估计 $X=1$ 的概率及 X 的数学期望；

（3）假设：如果没有掌握该知识点，学生就从题目给出的四个选项中随机选择一个作为答案；如果掌握该知识点，甲校学生选择正确的概率为 100%，乙校学生选择正确的概率为 85%. 设甲、乙两校高一年级学生掌握该知识点的概率估计值分别为 p_1，p_2，判断 p_1 与 p_2 的大小（结论不要求证明）.

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 E 上的点到两焦点的距离之和为 4.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，点 $M(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 在椭圆 E 上，直线 $x_0x+2y_0y-4=0$ 与直线 $y=2$，$y=-2$ 分别交于点 A，B. 设 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OBM$ 的面积分别为 S_1,S_2，比较 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 与 $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ 的大小.

20. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$，$f(0)=0$，导函数 $f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$，设 l_1 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(a,f(a))(a\neq 0)$ 处的切线.

（1）求 $f'(x)$ 的最大值；

（2）当$-1<a<0$时，证明：除切点A外，曲线$y=f(x)$在直线l_1的上方；

（3）设过点A的直线l_2与直线l_1垂直，l_1，l_2与x轴交点的横坐标分别是x_1，x_2，若$a>0$，求$\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}$的取值范围.

21. 已知集合$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$M=\{(x,y)|\ x\in A,y\in A\}$，从$M$中选取$n$个不同的元素组成一个序列：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$，其中$(x_i,y_i)$称为该序列的第$i$项$(i=1,2,\ldots,n)$，若该序列的相邻项$(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1})$满足：$\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=3,\\ |y_{i+1}-y_i|=4\end{cases}$或$\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=4,\\ |y_{i+1}-y_i|=3\end{cases}(i=1,2,\ldots,n-1)$，则称该序列为K列.

（1）对于第1项为$(3,3)$的K列，写出它的第2项.

（2）设Γ为K列，且Γ中的项$(x_i,y_i)(i=1,2,\ldots,n)$满足：当$i$为奇数时，$x_i\in\{1,2,7,8\}$；当$i$为偶数时，$x_i\in\{3,4,5,6\}$.判断$(3,2)$，$(4,4)$能否同时为$\Gamma$中的项，并说明理由；

（3）证明：由M的全部元素组成的序列都不是K列.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	B	A	C	C	A	C	B	D

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】因为抛物线的顶点到焦距的距离为$\frac{p}{2}$，故$\frac{p}{2}=3$，故$p=6$，

故答案为：6.

12.【答案】令$x=0$，则$a_0=1$，

又$(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$，

故$(1-2x)^4=a_0+a_1(-2x)+a_2(-2x)^2+a_3(-2x)^3+a_4(-2x)^4$，

令$t=-2x$，则$(1+t)^4=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4$，

令$t=1$，则$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=2^4$，故$a_1+a_2+a_3+a_4=15$

故答案为：$1,15$.

13.【答案】因为$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$，

所以$\alpha+\beta,\alpha-\beta$的终边关于$y$轴对称，且不与$y$轴重合，

故$\alpha+\beta+\alpha-\beta=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$且$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+l\pi,l\in\mathbf{Z}$，

即$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故取$\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{6}$可满足题设要求；

故答案为：$\frac{\pi}{2}$；$\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）

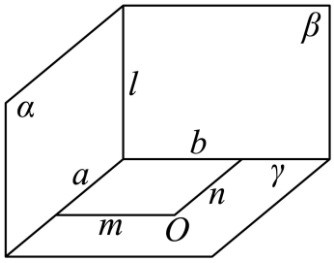
14.【答案】先证明一个结论：如果平面$\alpha\perp$平面γ，平面$\beta\perp$平面γ，平面$\alpha\cap\beta=l$，则$l\perp\gamma$.

证明：设$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$，在平面γ取一点O，$O\notin a,O\notin b$，

在平面γ内过O作直线m，使得$m\perp a$，作直线n，使得$n\perp b$，

因为平面$\alpha\perp$平面γ，$m\subset\gamma$，故$m\perp\alpha$，而$l\subset\alpha$，故$m\perp l$，

同理$n\perp l$，而$m\cap n=O,m,n\subset\gamma$，故$l\perp\gamma$.



下面回归问题.

连接 BE，因为 $AB \perp BC$ 且 $AF//\mathrm{BC}$，故 $AF \perp AB$，同理 $BC \perp CD$，$EF \perp ED$，

而 $AB = BC = 8, AF = CD = 4$，故直角梯形 $ABEF$ 与直角梯形 $CBED$ 全等，

故 $\angle BEF = \angle BED = 45°$，

在直角梯形 $ABEF$ 中，过 B 作 $BT \perp EF$，垂足为 T，

则四边形 $ABTF$ 为矩形，且 $\triangle BTE$ 为以 $\angle BTE$ 为直角的等腰直角三角形，

故 $EF = FT + TE = AB + BT = AB + AF = 12$，

平面 $RAF \perp$ 平面 $ABEF$，平面 $RAF \cap$ 平面 $ABEF = AF$，$AF \perp AB$，

$AB \subset$ 平面 $ABEF$，故 $AB \perp$ 平面 RAF，

取 AF 的中点为 M，BE 的中点为 U，CD 的中点为 V，连接 RM, MU, SU, UV，

则 $MU//RS$，同理可证 $RM \perp$ 平面 $ABEF$，而 $RM \subset$ 平面 $RMUS$，

故平面 $RMUS \perp$ 平面 $ABEF$，同理平面 $VUS \perp$ 平面 $ABEF$，

而平面 $RMUS \cap$ 平面 $VUS = SU$，故 $SU \perp$ 平面 $ABEF$，

故 $RM//SU$，故四边形 $RMUS$ 为平行四边形，故 $MU = RS = \frac{1}{2}(8+12) = 10$.

在平面 $ABSR$ 中过 B 作 $BH//AR$，交 RS 于 H，连接 HT.

则四边形 $ABHR$ 为平行四边形，且 $RH//AB, RH=AB$，故 $RH//FT, RH=FT$，

故四边形 $RFTH$ 为平行四边形，

而 $BH \perp AB, BT \perp AB, BT \cap BH = B, BT, BH \subset$ 平面 BHT，

故 $AB \perp$ 平面 BHT，故平面 $ARF//$ 平面 BHT，

而 $AR = BH, RF = HT, AF = BT$，故 $\triangle ARF \cong \triangle BHT$，

故几何体 $ARF - BHT$ 为直棱柱，

而 $S_{\triangle ARF} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = 3$，故 $V_{ARF-BHT} = 8 \times 3 = 24$，

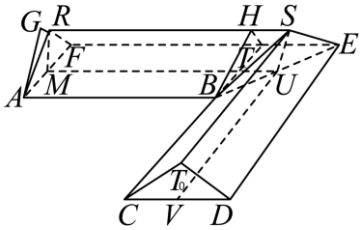
因为 $AB//EF$，故 $EF \perp$ 平面 ARF，

而 $EF \subset$ 平面 $RSEF$，故平面 $ARF \perp$ 平面 $RSEF$，

在平面 ARF 中过 A 作 $AG \perp RF$，垂足为 G，同理可证 $AG \perp$ 平面 $RSEF$，

而 $\frac{1}{2} AG \times RF = 3$，故 $AG = \frac{12}{5}$，故 $V_{B-HTES} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} \times \frac{1}{2}(2+4) \times \frac{5}{2} = 6$，

由对称性可得几何体的体积为$2\times\left(24+6\right)=60$，



故答案为：60.

15.【答案】对于①，若存在在$\mathbf{R}$上的增函数$f\left(x\right)$，满足$f\left(x\right)+f\left(2x\right)=-x$，

则$f\left(0\right)+f\left(2\times0\right)=-0$，即$f\left(0\right)=0$，

故$x>0$时，$f\left(4x\right)>f\left(2x\right)>f\left(x\right)>0$，故$f(4x)+f(2x)>f(x)+f(2x)$，

故$-2x>-x$即$x<0$，矛盾，故①错误；

对于②，取$f\left(x\right)=-x$，该函数为$\mathbf{R}$上的减函数且$f\left(x\right)-f\left(2x\right)=x$，

故该函数符合，故②正确；

对于③，取$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\cos x+mx,m\in\mathbf{R}$，

此时$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\cos x$，由$m\in\mathbf{R}$可得$f\left(x\right)$有无穷多个，

故③正确；

对于④，若存在$f\left(x\right)$，使得$f\left(x\right)-f\left(-x\right)=\cos x$，

令$x=0$，则$0=\cos0$，但$\cos0=1$，矛盾，

故满足$f\left(x\right)-f\left(-x\right)=\cos x$的函数不存在，故④错误.

故答案为：②③

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

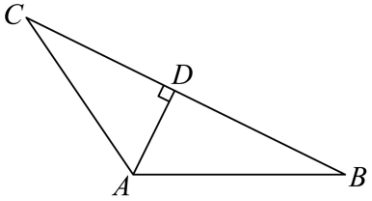
16.【答案】【小问1详解】

因为$\cos A=-\dfrac{1}{3},A\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由正弦定理有$a\sin C=c\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}c=4\sqrt{2}$，解得$c=6$；

【小问2详解】

如图所示，若$\triangle ABC$存在，则设其BC边上的高为AD，



若选①，$a=6$，因为$c=6$，所以$C=A$，因为$\cos A=-\frac{1}{3}<0$，这表明此时三角形ABC有两个钝角，

而这是不可能的，所以此时三角形ABC不存在，故BC边上的高也不存在；

若选②，$a\sin B=\frac{10\sqrt{2}}{3}$，由$a\sin C=4\sqrt{2}$有$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\frac{10\sqrt{2}}{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{5}{6}$，由正弦定理得$\frac{b}{c}=\frac{5}{6}$,所以$b=5$，

所以由余弦定理得$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{25+36-2\times5\times6\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=9$，

此时三角形ABC是存在的，且唯一确定，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}BC?AD$,即$\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{2}\times9AD$，

所以BC边上的高$AD=\frac{20\sqrt{2}}{9}$；

若选③，$\triangle ABC$的面积是$10\sqrt{2}$，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=10\sqrt{2}$，

解得$b=5$，由余弦定理可得$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{25+36-2\cdot5\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=9$可以唯一确定，

进一步由余弦定理可得$\cos B,\cos C$也可以唯一确定，即B,C可以唯一确定，

这表明此时三角形ABC是存在的，且BC边上的高满足：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot AD=\frac{9}{2}AD=10\sqrt{2}$，即

$AD=\frac{20\sqrt{2}}{9}$.

17.【答案】【小问1详解】

取PA的中点N，PB的中点M，连接FN、MN，

$\because\triangle ACD$与$\triangle ABC$为等腰直角三角形且$\angle ADC=90°$，$\angle BAC=90°$，

不妨设$AD=CD=2$，$\therefore AC=AB=2\sqrt{2}\therefore BC=4$.

$\because E$、F分别为BC、PD的中点，

$\therefore FN=\frac{1}{2}AD=1,GM=\frac{1}{2}BE=1$，且$FN//AD,GM//BC$.

$\because\angle DAC=45°$，$\angle ACB=45°$，$\therefore AD\parallel BC$，

$\therefore FN\parallel GM$，$\therefore$四边形$FGMN$为平行四边形，

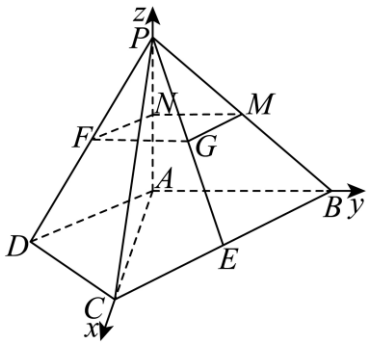
$\therefore FG\parallel MN$，

$\because FG\not\subset$平面PAB，$MN\subset$平面PAB，$\therefore FG\parallel$平面PAB；

【小问2详解】

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore$以A为原点，AC、AB、AP所在直线分别为x、y、z轴建立如图所示的空间直角坐

标系，



设 $AD=CD=2$，则 $A(0,0,0),B(0,2\sqrt{2},0),C(2\sqrt{2},0,0),D(\sqrt{2},-\sqrt{2},0),P(0,0,2\sqrt{2})$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(0,2\sqrt{2},0),\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0),\overrightarrow{CP}=(-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$，

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ -2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

取 $x=1$，$\therefore y=-1,z=1$，$\therefore \vec{n}=(1,-1,1)$.

设 AB 与平面 PCD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\left|0\times1+2\sqrt{2}\times(-1)+0\times1\right|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

18. 【答案】【小问 1 详解】

估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 $p=\dfrac{80}{100}=\dfrac{4}{5}$.

【小问 2 详解】

设 A 为“从甲校抽取 1 人做对”，则 $P(A)=0.8$，$P(\overline{A})=0.2$，

设 B 为“从乙校抽取 1 人做对”，则 $P(B)=0.75$，$P(\overline{B})=0.25$，

设 C 为“恰有 1 人做对”，故 $P(C)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.35$

依题可知，X 可取 $0,1,2$，

$P(X=0)=P(\overline{A}\overline{B})=0.05$，$P(X=1)=0.35$，$P(X=2)=0.8\times0.75=0.6$，

故 X 的分布列如下表：

X	0	1	2

P	0.05	0.35	0.6

故 $E(X)=1\times0.35+2\times0.6=1.55$.

【小问 3 详解】

设 D 为“甲校掌握这个知识点的学生做该题”，

因为甲校掌握这个知识点则有 100% 的概率做对该题目，

未掌握该知识点的同学都是从四个选项里面随机选择一个，

故 $P(D)+\frac{1}{4}(1-P(D))=0.8$，即 $p_1+\frac{1}{4}\times(1-p_1)=0.8$，故 $p_1=\frac{11}{15}$，

同理有，$0.85p_2+\frac{1}{4}\times(1-p_2)=0.75$，故 $p_2=\frac{5}{6}$，

故 $p_1<p_2$.

19. 【答案】【小问 1 详解】

由椭圆可知，$2a=4$，所以 $a=2$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=2$，

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

【小问 2 详解】

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-4=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 x 得，$\left(\frac{4-2y_0y}{x_0}\right)^2+2y^2=4$，

整理得，$\left(2x_0^2+4y_0^2\right)y^2-16y_0y+16-4x_0^2=0$ ①，

又 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，所以 $2x_0^2+4y_0^2=8$，$16-4x_0^2=8y_0^2$，

故①式可化简为 $8y^2-16y_0y+8y_0^2=0$，即 $\left(y-y_0\right)^2=0$，所以 $y=y_0$，

所以直线 $x_0x+2y_0y-4=0$ 与椭圆相切，M 为切点.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，易知，当 $x_1=x_2$ 时，由对称性可知，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|OA|}{|OB|}$.

故设 $x_2<x_0<x_1$，易知 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{|x_1-x_0|}{|x_2-x_0|}=\frac{x_1-x_0}{x_0-x_2}$，

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-4=0\\ y=2\end{cases}$，解得 $x_1=\frac{4-4y_0}{x_0},y_1=2$，

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-4=0\\ y=-2\end{cases}$，解得 $x_2=\frac{4+4y_0}{x_0},y_2=-2$，

所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{x_1-x_0}{x_0-x_2}=\dfrac{\dfrac{4-4y_0}{x_0}-x_0}{x_0-\dfrac{4+4y_0}{x_0}}=\dfrac{4-4y_0-x_0^2}{x_0^2-4y_0-4}$

$=\dfrac{2y_0^2-4y_0}{-2y_0^2-4y_0}=\dfrac{2-y_0}{2+y_0}$，

$\dfrac{|OA|}{|OB|}=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{4-4y_0}{x_0}\right)^2+4}}{\sqrt{\left(\dfrac{4+4y_0}{x_0}\right)^2+4}}=\dfrac{\sqrt{4\left(1-y_0\right)^2+x_0^2}}{\sqrt{4\left(1+y_0\right)^2+x_0^2}}=\dfrac{\sqrt{4\left(1-y_0\right)^2+4-2y_0^2}}{\sqrt{4\left(1+y_0\right)^2+4-2y_0^2}}=\dfrac{\sqrt{y_0^2-4y_0+4}}{\sqrt{y_0^2+4y_0+4}}=\dfrac{2-y_0}{2+y_0}$，

故 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$.

法二：不妨设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，易知，当 $x_1=x_2$ 时，由对称性可知，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$.

故设 $x_2<x_0<x_1$，

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-4=0\\y=2\end{cases}$，解得 $x_1=\dfrac{4-4y_0}{x_0},y_1=2$，

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-4=0\\y=-2\end{cases}$，解得 $x_2=\dfrac{4+4y_0}{x_0},y_2=-2$，

若 $x_1=0$，则 $y_0=1,x_0=\pm\sqrt{2},x_2=\pm4\sqrt{2}$，

由对称性，不妨取 $x_0=\sqrt{2},x_2=4\sqrt{2}$，则 $A\left(0,2\right),B\left(4\sqrt{2},-2\right),M\left(\sqrt{2},1\right)$，

$\tan\angle BOM=\sqrt{2}$，$\tan\angle BOM=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2}$，所以 $\angle AOM=\angle BOM$，

同理，当 $x_2=0$ 时，$\angle AOM=\angle BOM$，

当 $x_1x_2\neq0$ 时，则 $k_{OA}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{2x_0}{4-4y_0}=\dfrac{x_0}{2-2y_0}$，$k_{OB}=\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{-2x_0}{4+4y_0}=-\dfrac{x_0}{2+2y_0}$，$k_{OM}=\dfrac{y_0}{x_0}$，

又 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，所以 $x_0^2+2y_0^2=4$，

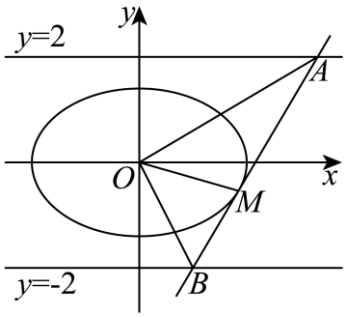
所以 $\tan\angle AOM=\dfrac{k_{OA}-k_{OM}}{1+k_{OA}\cdot k_{OM}}=\dfrac{\dfrac{x_0}{2-2y_0}-\dfrac{y_0}{x_0}}{1+\dfrac{x_0}{2-2y_0}\times\dfrac{y_0}{x_0}}$

$$=-\frac{x_0^2+2y_0^2-2y_0}{x_0\left(y_0-2\right)}=-\frac{4-2y_0}{x_0\left(y_0-2\right)}=\frac{2}{x_0},$$

$$\tan\angle BOM=\frac{k_{OM}-k_{OB}}{1+k_{OM}\cdot k_{OB}}=\frac{\frac{y_0}{x_0}+\frac{x_0}{2+2y_0}}{1+\frac{y_0}{x_0}\times\left(-\frac{x_0}{2+2y_0}\right)}=\frac{x_0^2+2y_0^2+2y_0}{x_0\left(y_0+2\right)}=\frac{4+2y_0}{x_0\left(y_0+2\right)}=\frac{2}{x_0},$$

则 $\tan\angle AOM=\tan\angle BOM$，即 $\angle AOM=\angle BOM$，

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|OA||OM|\sin\angle AOM}{|OB||OM|\sin\angle BOM}=\frac{|OA|}{|OB|}$.



20. 【答案】【小问 1 详解】

设 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，$g'\left(x\right)=\frac{\frac{1}{1+x}\left(1+x\right)-\ln\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^2}=\frac{1-\ln\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^2}$，

由 $g'\left(x\right)=0$ 可得 $x=\mathrm{e}-1$，当 $x\in\left(-1,\mathrm{e}-1\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\mathrm{e}-1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $f'\left(x\right)$ 的最大值为 $f'\left(\mathrm{e}-1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【小问 2 详解】

因为 $f'\left(a\right)=\frac{\ln\left(1+a\right)}{1+a}$，所以直线 l_1 的方程为 $y-f\left(a\right)=\frac{\ln\left(1+a\right)}{1+a}\left(x-a\right)$，即

$y=\frac{\ln\left(1+a\right)}{1+a}\left(x-a\right)+f\left(a\right)$，

设 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-\left[\frac{\ln\left(1+a\right)}{1+a}\left(x-a\right)+f\left(a\right)\right]$，$h'\left(x\right)=\frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x}-\frac{\ln\left(1+a\right)}{1+a}=f'\left(x\right)-f'\left(a\right)$，

由（1）可知，$f'\left(x\right)$ 在 $x\in\left(-1,\mathrm{e}-1\right)$ 上单调递增，而 $-1<a<0$，

所以，当 $-1<x<a$ 时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 单调递减，

当 $0>x>a$ 时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$ 单调递增，且 $f'\left(a\right)<f'\left(0\right)=0$，

而当$x\geq 0$时，$f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\geq 0$，所以总有$f'(x)\geq f'(a)$，$h(x)$单调递增

故$h(x)\geq h(a)$，从而命题得证；

【小问3详解】

解法一：由题意，直线$l_1:y=f'(a)(x-a)+f(a)$，直线$l_2:y=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$，

所以$x_1=-\dfrac{f(a)}{f'(a)}+a$，$x_2=f(a)f'(a)+a$，

当$x>0$时，$f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$f(a)>f(0)=0, f'(a)>0$，

所以$\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2a-\left[f(a)f'(a)+a\right]-\left[-\dfrac{f(a)}{f'(a)}+a\right]}{f(a)f'(a)+a-\left[-\dfrac{f(a)}{f'(a)}+a\right]}$

$=\dfrac{-\left[f'(a)\right]^2+1}{\left[f'(a)\right]^2+1}=-1+\dfrac{2}{\left[f'(a)\right]^2+1}$，

由（1）可得当$a>0$时，$f'(a)\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$，

所以$\left[f'(a)\right]^2\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right]$，$\dfrac{2}{\left[f'(a)\right]^2+1}\in\left[\dfrac{2\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1},2\right)$，

所以$\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}\in\left[\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1},1\right)$.

解法二：由$f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$可设$f(x)=\dfrac{\ln^2(1+x)}{2}+C$，又$f(0)=0$，所以$C=0$，即

$f(x)=\dfrac{\ln^2(1+x)}{2}$，

因为直线l_1的方程为$y=\dfrac{\ln(1+a)}{1+a}(x-a)+\dfrac{\ln^2(1+a)}{2}$，易知$a\neq 0$，

所以直线l_2的方程为$y=-\dfrac{1+a}{\ln(1+a)}(x-a)+\dfrac{\ln^2(1+a)}{2}$，

$x_1=a-\dfrac{(1+a)\ln(1+a)}{2}$，$x_2=\dfrac{\ln^3(1+a)}{2(1+a)}+a$.

所以 $\dfrac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}=\dfrac{\dfrac{(1+a)\ln(1+a)}{2}-\dfrac{\ln^3(1+a)}{2(1+a)}}{\dfrac{\ln^3(1+a)}{2(1+a)}+\dfrac{(1+a)\ln(1+a)}{2}}=\dfrac{(1+a)^2-\ln^2(1+a)}{\ln^2(1+a)+(1+a)^2}$

$=\dfrac{1-\dfrac{\ln^2(1+a)}{(1+a)^2}}{\dfrac{\ln^2(1+a)}{(1+a)^2}+1}=\dfrac{1-g^2(a)}{1+g^2(a)}=-1+\dfrac{2}{1+g^2(a)}$，由（1）知，当 $x>0$ 时，$g(x)\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}]$，所以

$g^2(a)\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}]$,

所以 $\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}\in\left[\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1},1\right)$.

21.【答案】【小问 1 详解】

根据题目定义可知，$\begin{cases}x_{i+1}=x_i\pm3\\y_{i+1}=y_i\pm4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_{i+1}=x_i\pm4\\y_{i+1}=y_i\pm3\end{cases}$,

若第一项为 $(3,3)$，显然 $x_2=0$ 或 -1 不符合题意（不在集合 A 中），所以下一项是 $(6,7)$ 或 $(7,6)$；

【小问 2 详解】

假设二者同时出现在 Γ 中，由于 K 列取反序后仍是 K 列，故不妨设 $(3,2)$ 在 $(4,4)$ 之前.

显然，在 K 列中，相邻两项的横纵坐标之和的奇偶性总是相反的，所以从 $(3,2)$ 到 $(4,4)$ 必定要向下一项走奇数次.

但又根据题目条件，这两个点的横坐标均在 Γ 中，所以从 $(3,2)$ 到 $(4,4)$ 必定要向下一项走偶数次.

这导致矛盾，所以二者不能同时出现在 Γ 中.

【小问 3 详解】

法 1：若 M 中的所有元素构成 K 列，考虑 K 列中形如 $(x_i,y_i)\left(x_i,y_i\in\{1,2,7,8\}\right)$ 的项，

这样的项共有 16 个，由题知其下一项为 $(x_{i+1},y_{i+1}),x_{i+1},y_{i+1}\in\{3,4,5,6\}$，共计 16 个，

而 $(x_{i+1},y_{i+1})\neq(3,3),(6,3),(3,6),(6,6)$，因为只能 6 由 2 来，3 只能由 7 来，

横、纵坐标不能同时相差 4，这样下一项只能有 12 个点，

即对于 16 个 (x_i,y_i)，有 12 个 (x_{i+1},y_{i+1}) 与之相对应，矛盾.

综上，由 M 的全部元素组成的序列都不是 K 列.

法 2：假设全体元素构成一个 K 列，则 $n=64$.

设 $T_1=\left\{(x,y)\middle|x\in\{1,2,7,8\},y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\right\}$,

$T_2=\left\{(x,y)\middle|x\in\{3,4,5,6\},y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\right\}$.

则T_1和T_2都包含32个元素，且T_1中元素的相邻项必定在T_2中.

如果存在至少两对相邻的项属于T_2，那么属于T_2的项的数目一定多于属于T_1的项的数目，

所以至多存在一对相邻的项属于T_2.

如果存在，则这对相邻的项的序号必定形如$2m$和$2m+1$，

否则将导致属于T_2的项的个数比属于T_1的项的个数多2，此时$m=1,2,3,\cdots,31$.

从而这个序列的前$2m$项中，第奇数项属于T_1，第偶数项属于T_2；

这个序列的后$64-2m$项中，第奇数项属于T_2，第偶数项属于T_1.

如果不存在相邻的属于T_2的项，那么也可以看作上述表示在$m=0$或$m=32$的特殊情况.

这意味着必定存在$m\in\{0,1,2,...,32\}$，使得$\begin{cases}(x_{2k-1},y_{2k-1})\in T_1,(x_{2k},y_{2k})\in T_2,1\le k\le m\\(x_{2k-1},y_{2k-1})\in T_2,(x_{2k},y_{2k})\in T_1,m+1\le k\le 32\end{cases}$.

由于相邻两项的横纵坐标之和的奇偶性必定相反，故T_1中横纵坐标之和为奇数的点和横纵坐标之和为偶数的点的数量一定分别是m和$32-m$（不一定对应）.

但容易验证，T_1和T_2都包含16个横纵坐标之和为奇数的点和16个横纵坐标之和为偶数的点，所以$m=32-m=16$，得$m=16$.

从而有$\begin{cases}(x_{2k-1},y_{2k-1})\in T_1,(x_{2k},y_{2k})\in T_2,1\le k\le 16\\(x_{2k-1},y_{2k-1})\in T_2,(x_{2k},y_{2k})\in T_1,17\le k\le 32\end{cases}$.

这就得到$T_1=\left\{(x_k,y_k)\middle|k=1,3,5,...,29,31,34,36,...,62,64\right\}$.

再设$T_3=\left\{(x,y)\middle|x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\},y\in\{1,2,7,8\}\right\}$，

$T_4=\left\{(x,y)\middle|x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\},y\in\{3,4,5,6\}\right\}$.

则同理有$\begin{cases}(x_{2k-1},y_{2k-1})\in T_3,(x_{2k},y_{2k})\in T_4,1\le k\le 16\\(x_{2k-1},y_{2k-1})\in T_4,(x_{2k},y_{2k})\in T_3,17\le k\le 32\end{cases}$.

这意味着$T_3=\left\{(x_k,y_k)\middle|k=1,3,5,...,29,31,34,36,...,62,64\right\}$.

从而得到$T_3=T_1$，但显然它们是不同的集合，矛盾.

所以由M的全部元素组成的序列都不是K列.