2026年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数　学

姓名：_____　　**准考证号：**_____

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $M=\{x\mid -1<x<3\}$，$N=\{x\mid x\geqslant 2\}$，则 $M\bigcup N=$

（A）$\{x\mid x>-1\}$　　（B）$\{x\mid x<3\}$

（C）$\{x\mid x\geqslant 2\}$　　（D）$\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

（2）已知复数 $z_1=3-2\mathrm{i}$，$z_2=-5+4\mathrm{i}$，则 $|z_1+z_2|=$

（A）$\sqrt{2}$　　（B）2

（C）$2\sqrt{2}$　　（D）8

（3）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=1\ (a>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{2}{3}x$，则 $a=$

（A）$\sqrt{3}$　　（B）3

（C）6　　（D）9

（4）在 $(a-\sqrt{x})^7$ 的展开式中，若 x^2 的系数为280，则实数 $a=$

（A）2　　（B）-2

（C）1　　（D）-1

（5）下列函数中，是奇函数且在其定义域上单调递增的为

（A）$y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　（B）$y=2^{-x}-2^x$

（C）$y=\sin x$　　（D）$y=\ln\dfrac{5+x}{5-x}$

（6）已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}=(-3,0)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则

（A）$|\boldsymbol{b}|$的最小值为1　　（B）$|\boldsymbol{b}|$的最小值为3

（C）$|\boldsymbol{b}|$的最大值为3　　（D）$|\boldsymbol{b}|$的最大值为4

（7）已知$\{a_n\},\{b_n\}$均为无穷数列，则“存在常数M，使得$a_n\leqslant M\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$”是“$a_n\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）设函数$f(x)=\sin(x+\varphi)\ (0<\varphi<2\pi)$．若将$y=f(x)$的图象沿$x$轴的正方向平移$3\varphi$个单位长度，所得图象与$y=f(x)$的图象关于$x$轴对称，则满足条件的$\varphi$的个数为

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

（9）为纪念红军长征胜利90周年，某校组织高一和高二两个年级的学生去甲、乙两个红色教育基地进行研学，每位学生选择其中一个基地参加．已知该校高一学生人数多于高二学生人数．若选择甲基地的学生人数多于选择乙基地的学生人数，则

（A）选择甲基地的高一学生人数多于选择乙基地的高一学生人数

（B）选择甲基地的高一学生人数多于选择乙基地的高二学生人数

（C）选择甲基地的高二学生人数不多于选择乙基地的高一学生人数

（D）选择甲基地的高二学生人数不多于选择乙基地的高二学生人数

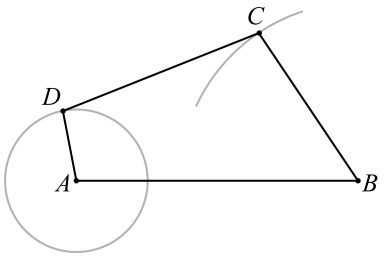
（10）曲柄摇杆机构可以实现旋转运动与摆动运动的相互转化，被广泛应用于多个领域．已知从某曲柄摇杆机构中可抽象出如图所示的平面图形$ABCD$，其中A,B为定点，C,D为动点，$AB=4$，$BC=\dfrac{5}{2}$，$CD=3$，$AD=1$，则$\cos\angle ABC$的取值范围是

（A）$[\dfrac{5}{16},\dfrac{53}{80}]$

（B）$[\dfrac{5}{16},\dfrac{73}{80}]$

（C）$[\dfrac{5}{12},\dfrac{53}{80}]$

（D）$[\dfrac{5}{12},\dfrac{73}{80}]$



第二部分（非选择题　共 110 分）

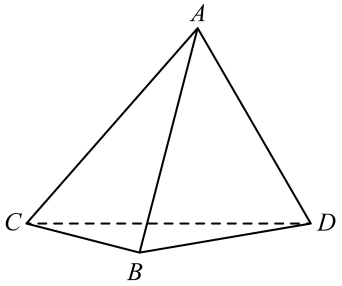
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若直线 $ax+y=0$ 与圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 相切，则 $a=$_____.

（12）已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $S_6=6a_6+30$，则 $d=$_____，使得 $S_n \leqslant S_5$ 对所有 n 都成立的一个 a_1 的取值为_____.

（13）我国在机器人技术领域取得了一系列重要成就．在处理机器人语音信号时，常用公式 $F(f)=k\lg(1+\frac{f}{700})$（其中常数 $k>0$）将声音频率 f（单位：Hz）转换为 $F(f)$．若 $F(f)$ 的取值范围是 $[k\lg 2, 3k\lg 2]$，则 f 的取值范围是_____.

（14）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=AD=2\sqrt{2}$，$BC=BD=2$，$CD=2\sqrt{3}$．该三棱锥的底面积为_____，体积为_____.



（15）已知 c 是非负常数，函数 $f(x)=|x^2-\cos x-c^2|$．给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(-1, 1]$ 上有最小值和最大值；

② 当 $c=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1, 2]$ 上有最大值；

③ 当 $c=0$ 时，方程 $f(x)=1$ 的解集有 3 个元素；

④ 当 $c>0$ 时，方程 $f(x)=c$ 的解集有 4 个元素．

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\varphi+2\cos\omega x\sin\varphi\ (\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$．已知 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且 $f(\frac{\pi}{4})=1$，$f(0)>0$．

（Ⅰ）求 ω,φ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递减区间．

（17）（本小题 13 分）

为了解某校高三年级学生的数学学习情况，随机抽查了 200 名高三年级学生某次考试的数学成绩，整理成下表：

成绩	$[81,94)$	$[94,107)$	$[107,120)$	$[120,135)$	$[135,150]$
人数	40	60	60	32	8

假设学生的数学成绩相互独立．用频率估计概率．

（Ⅰ）估计该校高三年级学生这次考试的数学成绩低于 120 的概率；

（Ⅱ）从该校高三年级学生中随机抽取 4 人，估计在这次考试中，2 人的数学成绩不低于 120 且 2 人的数学成绩低于 94 的概率；

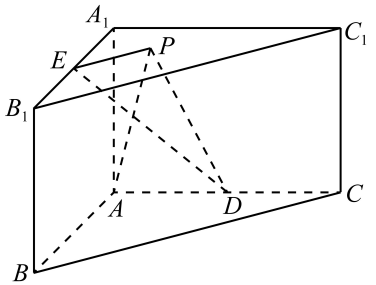
（Ⅲ）为分析该校高三年级学生的数学学习情况，可采用三种方法：将样本中每名学生数学成绩所在区间的左端点值、中点值和右端点值视为该生的数学成绩．分别将这三种方法得到的三组数学成绩的方差记为 $s_{左}^2$、$s_{中}^2$ 和 $s_{右}^2$，判断 $s_{左}^2$、$s_{中}^2$ 和 $s_{右}^2$ 的大小关系．（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 AC, A_1B_1 的中点，$AB=AC=2$，$\angle BAC=90^\circ$，$BB_1=\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求证：DE // 平面 BCC_1B_1；

（Ⅱ）设点 P 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内部，PE // B_1C_1．再从条件 ①、条件 ②、条件 ③这三个条件中选择一个作为已知，使点 P 的位置唯一确定，求平面 PAD 与平面 PDE 夹角的余弦值．



条件 ①：$PA=PD$；

条件 ②：$PA\perp BC$；

条件 ③：BB_1 // 平面 PDE．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点为 $(2,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．过点 $A(1,1)$ 且斜率为 $k\ (k\neq\pm1)$ 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C．点 B 关于直线 $y=x$ 的对称点为 D，直线 CD 与直线 $y=x$ 交于点 Q．设 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle ACQ$ 的面积分别为 $S_{\triangle ABQ}$ 与 $S_{\triangle ACQ}$．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）若 $|S_{\triangle ABQ}-S_{\triangle ACQ}|=\dfrac{5}{8}$，求 k 的值．

（20）（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=x^2+mx-4\mathrm{e}^{nx-1}$（$n$ 是整数）．已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $4x+\mathrm{e}^2y+\mathrm{e}^2+8=0$ ．

（Ⅰ）求 m,n 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值点个数；

（Ⅲ）求直线 $l:y=kx-1\ (k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数．

（21）（本小题 15 分）

设 A 是如下形式的 m 行 n 列的数表：

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

其中位于第 i 行第 j 列的数记为 a_{ij}，且 $a_{ij}\in\{-1,1\}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ ．

若对任意的 $k,l\in\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $p,q\in\{1,2,\cdots,n\}$，当 $l>k,q>p$ 且 $(l-k)-(q-p)\in\{-2,2\}$ 时，均有 $a_{kp}+a_{kq}+a_{lp}+a_{lq}=0$，则称数表 A 具有性质 P ．

（Ⅰ）分别判断数表 A_1 和 A_2 是否具有性质 P；（只需写出结论）

A_1

1	1	−1	1
−1	1	−1	1

A_2

1	−1	1	−1
1	1	−1	−1
−1	1	1	1

（Ⅱ）当 $m=4,n=5$ 时，若数表 A 具有性质 P，求 A 中 1 的个数的最大值；

（Ⅲ）当 $m=n=6$ 时，若数表 A 具有性质 P，且 $a_{11}=1$，证明：

$$a_{ij}=a_{i1}a_{1j}\ (i=1,2,\cdots,6;\ j=1,2,\cdots,6)\ .$$

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2026年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学参考答案

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）A　（2）C　（3）B　（4）A　（5）D

（6）D　（7）A　（8）C　（9）B　（10）B

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）0　（12）–2　9（答案不唯一）

（13）$[700, 4900]$　（14）$\sqrt{3}$　$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

（15）① ② ③ ④

三、解答题（共6小题，共85分）

（16）（共13分）

解：（Ⅰ）$f(x)=2(\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi)=2\sin(\omega x+\varphi)$.

因为$f(x)$的最小正周期为π，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$．故$\omega=2$.

所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

由题设$f(\frac{\pi}{4})=1$，得$2\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)=1$.

故$\cos\varphi=\frac{1}{2}$.

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$且$f(0)=2\sin\varphi>0$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

函数$y=\sin x$的单调递减区间为$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$.

所以$f(x)$的单调递减区间为$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）根据表格数据，200 名学生中有 $40+60+60=160$ 人的数学成绩低于120，

所以该校高三学生这次考试数学成绩低于120的概率可以估计为 $\frac{160}{200}=0.8$.

（Ⅱ）设事件 A：随机抽取1名学生，其数学成绩不低于120；

事件 B：随机抽取1名学生，其数学成绩低于94 .

根据表格数据可知，概率 $P(A)$ 和 $P(B)$ 均可估计为0.2 .

由题设可知：在这次考试中，2 人的数学成绩不低于120且2 人的数学成绩低于94 的概率等于 $C_4^2[P(A)]^2\times[P(B)]^2$.

故所求概率可以估计为 $6\times0.2^2\times0.2^2=0.009\,6$.

（Ⅲ） $s_{左}^2<s_{中}^2<s_{右}^2$.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）取 BC 的中点 F，连接 B_1F, DF .

因为 D, F 分别为 AC, BC 的中点，所以 $DF\ //\ AB$，且 $DF=\frac{1}{2}AB$.

因为四边形 A_1ABB_1 为矩形且 E 为 A_1B_1 的中点，

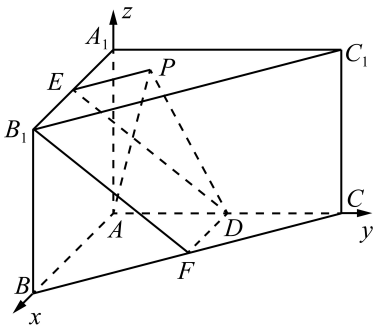
所以 $DF\ //\ EB_1$，$DF=EB_1$.

所以四边形 B_1FDE 是平行四边形.

所以 $DE\ //\ FB_1$.

又 $DE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$FB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $DE\ //$ 平面 BCC_1B_1 .



（Ⅱ）由题设，$AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，$AB\perp AC$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$D(0,1,0)$，$E(1,0,\sqrt{2})$，$B_1(2,0,\sqrt{2})$，$C_1(0,2,\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,2,0)$.

设 $\overrightarrow{EP}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{B_1C_1}=(-\lambda,\lambda,0)\ \ (0<\lambda<1)$，

则 $P(1-\lambda,\lambda,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,\lambda,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(1-\lambda,\lambda-1,\sqrt{2})$.

设平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\lambda x+\lambda y=0,\\ (1-\lambda)x+(\lambda-1)y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1,\ z=0$．于是 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$．

选择条件 ①：$PA=PD$．

因为 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda^2+2}$，$|\overrightarrow{DP}|=\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda-1)^2+2}$，

所以 $\lambda^2=(\lambda-1)^2$．解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$．

故点 P 的位置唯一确定，且 $\overrightarrow{AP}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{2})$．

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

则 $y=0$，令 $z=1$，则 $x=-2\sqrt{2}$．于是 $\boldsymbol{n}=(-2\sqrt{2},0,1)$．

因此平面 PAD 与平面 PDE 夹角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$．

选择条件 ②：$PA\perp BC$．

因为 $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,\lambda,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=-2(1-\lambda)+2\lambda=4\lambda-2=0$．解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$．

故点 P 的位置唯一确定，且 $\overrightarrow{AP}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{2})$．

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

则 $y=0$，令 $z=1$，则 $x=-2\sqrt{2}$．于是 $\boldsymbol{n}=(-2\sqrt{2},0,1)$．

因此平面 PAD 与平面 PDE 夹角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$．

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设得 $\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$.

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由题设知 $S_{\triangle ABQ}=S_{\triangle ADQ}$，且 $|S_{\triangle ABQ}-S_{\triangle ACQ}|=|S_{\triangle ADQ}-S_{\triangle ACQ}|=S_{\triangle ACD}$.

直线 BC 的方程为 $y-1=k(x-1)$.

由 $\begin{cases} y-1=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+(8k-8k^2)x+4k^2-8k-8=0$.

设 $B(x_1,y_1), C(x_2,y_2)$，则 $D(y_1,x_1)$，且

$x_1+x_2=\dfrac{8k^2-8k}{4k^2+3}$, $x_1x_2=\dfrac{4k^2-8k-8}{4k^2+3}$.

因为 $|AC|=\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-1)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-1|$，

点 D 到直线 BC 的距离为 $d=\dfrac{|ky_1-x_1+1-k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|(k^2-1)(x_1-1)|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以

$$S_{\triangle ACD}=|\frac{1}{2}(k^2-1)(x_1-1)(x_2-1)|=|\frac{1}{2}(k^2-1)[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]|$$

$$=|\frac{k^2-1}{2}(\frac{4k^2-8k-8}{4k^2+3}-\frac{8k^2-8k}{4k^2+3}+1)|=|\frac{5k^2-5}{8k^2+6}|.$$

由题设知 $\dfrac{5k^2-5}{8k^2+6}=\pm\dfrac{5}{8}$. 解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=x^2+mx-4\mathrm{e}^{nx-1}$，得 $f'(x)=2x+m-4n\mathrm{e}^{nx-1}$.

所以 $f(-1)=1-m-4\mathrm{e}^{-n-1}$，$f'(-1)=-2+m-4n\mathrm{e}^{-n-1}$.

由题设知，$f(-1)=-1-4\mathrm{e}^{-2}$，$f'(-1)=-4\mathrm{e}^{-2}$.

所以 $1-m-4\mathrm{e}^{-n-1}=-1-4\mathrm{e}^{-2}$，$-2+m-4n\mathrm{e}^{-n-1}=-4\mathrm{e}^{-2}$.

所以 $\frac{n+1}{2}=\mathrm{e}^{n-1}$.

因为 n 是整数，所以 $n=1$ ， $m=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $f(x)=x^2+2x-4\mathrm{e}^{x-1}$.

记 $g(x)=f'(x)=2x+2-4\mathrm{e}^{x-1}$ ，则 $g(1)=0$ ， $g'(x)=2-4\mathrm{e}^{x-1}$.

令 $g'(x)=0$ ，即 $2-4\mathrm{e}^{x-1}=0$ ，得 $x_0=1-\ln 2$.

因为 $f'(x_0)=2x_0\neq 0$ ，所以 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

① 当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时， $g'(x)>0$ ， $g(x)$ 单调递增.

因为 $g(0)=2-4\mathrm{e}^{-1}>0$ ， $g(-1)=-4\mathrm{e}^{-2}<0$ ，所以存在 $a\in(-1,0)$ ，使得 $g(a)=0$ ，且 a 是 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 内的唯一零点.

当 $x\in(-1,a)$ 时， $f'(x)=g(x)<0$ ，当 $x\in(a,x_0)$ 时， $f'(x)=g(x)>0$ ，所以 a 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 内的唯一极值点.

② 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $g'(x)<0$ ， $g(x)$ 单调递减且 $g(1)=0$ ，所以1是 $g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内的唯一零点.

当 $x\in(x_0,1)$ 时， $f'(x)=g(x)>0$ ，当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)=g(x)<0$ ，所以1是 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内的唯一极值点.

综上可知，函数 $f(x)$ 的极值点个数是2 .

（Ⅲ）直线 $l:y=kx-1$ 过点 $(0,-1)$.

① 在区间 $(0,+\infty)$ 上，由（Ⅱ）知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f(x)\leqslant f(1)=-1$. 所以当 $k>0$ 时，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， l 与 $y=f(x)$ 没有交点.

② 在区间 $(-\infty,0]$ 上，令 $F(x)=f(x)-(kx-1)$ ，则 $F'(x)=f'(x)-k$. 由（Ⅱ）知， $F'(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增.

当 $k\geqslant f'(0)=2-4\mathrm{e}^{-1}$ 时， $F'(x)<F'(0)\leqslant 0\,(x<0)$ ，故 $F(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，且 $F(0)=1-4\mathrm{e}^{-1}<0$ ， $F(-2)=2k+1-4\mathrm{e}^{-3}>0$ ，所以存在 $p_1\in(-2,0)$ 使得 $F(p_1)=0$ ，且 p_1 是 $F(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的唯一零点，即当 $x\in(-\infty,0]$ 时， l 与 $y=f(x)$ 只有1个交点.

当$0<k<f'(0)$时，$F'(0)>0$，$F'(-1)=-k-4\mathrm{e}^{-2}<0$．所以存在$x_1\in(-1,0)$使得$F'(x_1)=0$，且$x_1$是$F'(x)$在$(-\infty,0)$内的唯一零点．又因为$F'(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增，所以$F(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递减，在$(x_1,0)$上单调递增，于是$F(x_1)<F(0)<0$．

由于$F(-2)>0$，$F(x_1)<0$，所以存在$p_2\in(-2,x_1)$使得$F(p_2)=0$，且p_2是$F(x)$在$(-\infty,0]$上的唯一零点，即当$x\in(-\infty,0]$时，l与$y=f(x)$只有1个交点．

综上可知，直线l与曲线$y=f(x)$恰有1个交点．

（21）（共15分）

解：（Ⅰ）A_1不具有性质P，A_2具有性质P．

（Ⅱ）由题设知，若数表A具有性质P，则当$l>k,q>p$且$(l-k)-(q-p)\in\{-2,2\}$时，$a_{kp},a_{kq},a_{lp},a_{lq}$中恰有2个1．

当$m=4,n=5$时，数表A中满足$l>k,q>p$且$(l-k)-(q-p)\in\{-2,2\}$的$a_{kp},a_{kq},a_{lp},a_{lq}$包括下列四组：

$a_{11},a_{14},a_{21},a_{24}$；$a_{31},a_{34},a_{41},a_{44}$；$a_{12},a_{15},a_{22},a_{25}$；$a_{32},a_{35},a_{42},a_{45}$．

上述四组数中恰有8个1．

数表A中还剩余4个数$a_{13},a_{23},a_{33},a_{43}$，其中1的个数至多为4．

所以数表A中1的个数至多为$8+4=12$．

取下列4行5列的数表：

1	−1	1	−1	1
−1	1	1	1	−1
−1	1	1	1	−1
1	−1	1	−1	1

经验证，该数表具有性质P，且其中1的个数为12．

综上可知，数表A中1的个数的最大值为12．

（Ⅲ）定义集合$S=\{(i,j)\,|\,a_{ij}=a_{i1}a_{1j},i=1,2,\cdots,6;\ j=1,2,\cdots,6\}$．

因为$a_{11}=1$，所以当$i=1$或$j=1$时，$a_{ij}=a_{i1}a_{1j}$，即$(i,j)\in S$．　①

下面证明，当数表A具有性质P时，其具有以下性质Q．

性质 Q：对任意的 $k,l\in\{1,2,\cdots,6\}$ 和 $p,q\in\{1,2,\cdots,6\}$，当 $l>k,q>p$ 且 $(l-k)-(q-p)\in\{-2,2\}$ 时，若

（ⅰ）$(k,p)\in S$；（ⅱ）$(k,q)\in S$；（ⅲ）$(l,p)\in S$；（ⅳ）$(l,q)\in S$

中任意三个成立，则第四个也成立.

不妨设（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）成立，即 $a_{kp}=a_{k1}a_{1p}$，$a_{kq}=a_{k1}a_{1q}$，$a_{lp}=a_{l1}a_{1p}$.

由题设，$a_{kp}+a_{kq}+a_{lp}+a_{lq}=0$，则 $a_{kp},a_{kq},a_{lp},a_{lq}$ 中有两个为1，两个为 -1.

所以 $a_{lq}=a_{kp}a_{kq}a_{lp}$.

所以 $a_{lq}=(a_{k1}a_{1p})(a_{k1}a_{1q})(a_{l1}a_{1p})=a_{k1}^2a_{1p}^2a_{l1}a_{1q}=a_{l1}a_{1q}$. 故 $(l,q)\in S$ 成立.

其余情况同理可证. 所以性质 Q 成立.

令 $k=1,l=4,p=s,q=s+1$ $(s=1,2,3,4,5)$，依次使用性质 Q.

当 $s=1$ 时，因为 $(1,1),(1,2),(4,1)\in S$，所以 $(4,2)\in S$.

当 $s=2$ 时，因为 $(1,2),(1,3),(4,2)\in S$，所以 $(4,3)\in S$.

当 $s=3,4,5$ 时，以此类推，可得 $(4,j)\in S$，$j=4,5,6$.

所以 $(4,j)\in S$ $(j=1,2,\cdots,6)$. 同理可证 $(i,4)\in S$ $(i=1,2,\cdots,6)$.

所以当 $i=4$ 或 $j=4$ 时，$(i,j)\in S$. ②

令 $k=1,l=5,p=s,q=s+2$ $(s=1,2,3,4)$，由①②，依次使用性质 Q.

同理可证 $(5,j)\in S$ $(j=1,2,\cdots,6)$ 与 $(i,5)\in S$ $(i=1,2,\cdots,6)$.

所以当 $i=5$ 或 $j=5$ 时，$(i,j)\in S$. ③

令 $k=2,l=5,p=s,q=s+1$ $(s=1,2,3,4,5)$，由①③，依次使用性质 Q.

同理可证 $(2,j)\in S$ $(j=1,2,\cdots,6)$ 与 $(i,2)\in S$ $(i=1,2,\cdots,6)$.

所以当 $i=2$ 或 $j=2$ 时，$(i,j)\in S$. ④

因为 $(1,2),(1,6),(3,2)\in S$，所以 $(3,6)\in S$. 同理 $(6,3)\in S$.

因为 $(4,3),(4,6),(3,6)\in S$，所以 $(3,3)\in S$.

因为 $(5,3),(5,6),(6,3)\in S$，所以 $(6,6)\in S$.

所以 $(3,6),(6,3),(3,3),(6,6)\in S$. ⑤

由①②③④⑤，得 $(i,j)\in S$ $(i=1,2,\cdots,6;\ j=1,2,\cdots,6)$.

即 $a_{ij}=a_{i1}a_{1j}$ $(i=1,2,\cdots,6;\ j=1,2,\cdots,6)$.