2026 北京西城高三一模

数　　学

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x<0\}$，集合 $B=\{x\mid x-2>0\}$，则集合 $A\cup B=$（　）

A．$(0,3)$　　B．$(2,3)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

2．在复平面内，复数 $(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ 对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=4, a_4+a_6=24$，则 $a_8=$（　）

A．16　　B．32　　C．64　　D．256

4．$x(2+x)^4=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=$（　）

A．16　　B．65　　C．80　　D．81

5．若圆锥曲线 $C:x^2+my^2+m=0$ 的焦距为 4，则其离心率为（　）

A．2　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6．已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\sin x$，则 $f(x)$ 是（　）

A．奇函数，且最小正周期为 π　　B．奇函数，且最小正周期为 2π

C．偶函数，且最小正周期为 π　　D．偶函数，且最小正周期为 2π

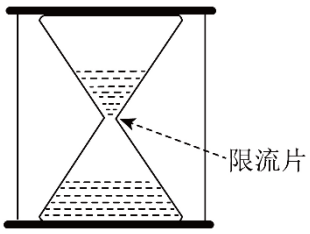
7．设 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，则“对于任意 $\lambda\in\mathbf{R},\vec{b}\neq\lambda\vec{a}$”是“$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

8．设关于 x 的不等式 $x^2<|x|+2^m$ 的解集为 P，若 $P\subseteq(-2,4)$，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$[1,+\infty)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$(-\infty,2]$

9．如图所示的沙漏是由上下两个相同的圆锥形容器组成，其内细沙的总体积为 V_0．假设上方容器中细沙的堆积体一直近似为一个倒置的圆锥，初始时细沙都在上方容器内，且此时沙堆的高度为 h，在重力和限流片的作用下细沙徐徐流入下方容器，经过 $t(t\le 30)$ 分钟后剩余沙堆的体积 $V=V_0\mathrm{e}^{-kt}$（k 为常数）．已知初始时细沙都在上方容器内，经过 10 分钟后上方沙堆的高度降为 $\frac{1}{2}h$，此时将沙漏上下颠倒，若倒置后的上方容器内沙堆高度再次降为 $\frac{1}{2}h$，则需再经过的时间约为（　）（参考数据：$\ln 2\approx 0.69,\ln 3\approx 1.10,\ln 7\approx 1.95$）



A．8.0 分钟　　B．8.6 分钟　　C．9.4 分钟　　D．10.6 分钟

10．在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 在圆心为 C 的圆 $x^2+y^2-2x-2=0$ 上．若动点 P 满足 $|\overrightarrow{MP}|=1,\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}=3$，则对于 $a\in\mathbf{R}$，点 P 到直线 $x+ay+2a=0$ 的距离的最大值为（　）

A．$\sqrt{5}+2$　　B．$2+\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}+\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

二、填空题

11．设抛物线$C:y^2=8x$的准线为l，$P(4,m)$为C上一点，则P到l的距离为_____.

12．设平面向量$\vec{a}=(-1,2),\vec{b}=(3,t)$，其中$t\in\mathbf{R}$，$|\vec{b}-\vec{a}|$的最小值为_____.

13．已知$\alpha,\beta\in(0,2\pi)$，且$\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，写出满足条件的一组$\alpha,\beta$的值$\alpha=$_____，$\beta=$_____.

14．《营造法式》是中国古代最完整的建筑技术著作，是中国古代建筑发展到了较高阶段的标志．书中根据不同等级房屋建筑的需要，将建筑中的木方（断面为矩形的木料）的尺寸分为8个等级．记这8个等级木方断面的长与宽分别为a_i与b_i，若对任意$i(i=1,2,\cdots,8)$，$\frac{a_i}{b_i}=\frac{3}{2}$且$a_1,a_2,a_3$与$a_6,a_7,a_8$都是公差为$-0.75$的等差数列，$b_4,b_5,b_6$是公差为$-0.4$的等差数列．已知$a_1=9$，$a_3-a_4=0.3$，则$a_5=$_____，$b_7=$_____.

15．记$[x]$表示不超过实数x的最大整数．设a，b为正整数，函数$f(x)=[ax]+[bx]$，给出以下四个结论：

①对于任意的x_1,x_2，若$x_1<x_2$，则$f(x_1)\le f(x_2)$；

②存在正整数a，b，使得曲线$y=f(x)$关于坐标原点对称；

③设$a=2,b=3$，则方程$f(x)=10$有无数个解；

④设$a=2,b=3$，则当$x\in[0,1)$时，函数$f(x)$的值域中有且仅有5个元素．

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16．已知$\triangle ABC$的面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2-c^2\right)$，且$a=2\sin A$.

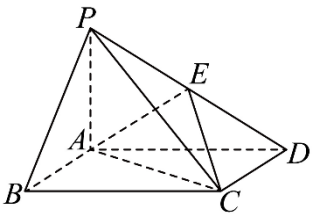
(1)求C的大小；

(2)记$\triangle ABC$的周长为$f(\mathrm{A})$．给出$f(\mathrm{A})$的解析式，并求其最大值.

17．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，且 $AB\perp AC$，E 为 PD 的中点，平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$．

(1)求证：$AB\perp PA$；

(2)若 $PA=AB=1,BC=2$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得四棱锥 $P-ABCD$ 存在，求平面 PAE 与平面 AEC 夹角的余弦值．



条件①：$CD\perp PD$；

条件②：$AE=PE$；

条件③：$\triangle ABC\cong\triangle APC$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

18．某市图书馆为了解馆内图书借阅情况，随机对馆内的部分读者进行了为期一年的跟踪调查，得到下表数据，其中部分数据意外缺失，分别用字母 a，b，c，d（$abcd>0$）表示．

读者类型	调查人数	年人均借阅量（册）	某类读者图书借阅量分类占比情况				
			文学类	科技类	教辅类	社科类	其他
在职人员	600	18.5	35%	25%	10%	20%	10%
大学生	800	24.3	30%	40%	13%	a	b
中学生	500	15.2	25%	20%	40%	c	d

假设每位读者的每次借阅情况互不影响．用频率估计概率．

(1)在参与调查的读者中，比较这一年里“在职人员”借阅的文学类图书量与“中学生”借阅的教辅类图书量的大小，说明理由：

(2)在该市图书馆的所有读者中随机选出 2 名大学生和 1 名中学生，已知这 3 人每人借阅了 1 册书，估计所借的 3 册书中至少有 2 册为科技类图书的概率；

(3)为分析同一类读者的偏好，市图书馆将图书借阅量分类占比的平均差 $M=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_i-\overline{x}\right|$ 定义为该类读者的“偏好度”，其中 x_i 为其图书借阅量分类占比值，$\overline{x}$ 为所有 x_i 的均值，n 为图书的类别个数．记“在职人员”、“大学生”和“中学生”的“偏好度”分别为 M_1,M_2,M_3，写出这三个“偏好度”的大小关系．（结论不要求证明）

19．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A，下顶点为 B，左右焦点分别为 F_1,F_2，且 $\angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}$，圆 $W:x^2+y^2=1$ 经过点 B．O 为坐标原点．

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设圆 W 的切线 l 与椭圆 E 相交于 C，D 两点，点 $Q\left(x_Q,y_Q\right)\left(y_Q>0\right)$ 在直线 l 上，且满足 $OQ\perp OD$，过 Q 作 $QP\perp y$ 轴于点 P，求证：$AP/\!/BF_1$．

20．已知函数 $f(x)=x^2\ln x$，直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线．O 为坐标原点．

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设 $g(x)=f(x)+x$，研究函数 $g(x)$ 的零点个数；

(3)若 l 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，且 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，求 $\triangle OAB$ 的面积．

21．对任意无穷数列 $\{a_n\}$，定义从 a_i 起连续 k 项的和 $S_k(i)$ 为：$S_k(i)=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+k-1}$，其中 k，i 为任意正整数．若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 和 $l\in\mathbf{N}^*$，存在 $m\in\{n+1,n+2,n+3,n+4\}$，使得 $S_l(n)=S_l(m)$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T.

(1)设 $b_n=\sin\frac{n\pi}{2}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．判断数列 $\{b_n\}$ 是否具有性质 T？说明理由；

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T，

（i）求集合 $\left\{u\middle|\ u=a_n,n\in\mathbf{N}^*\right\}$ 中元素个数的最大值；

（ii）证明：存在正整数 l，对任意 $k\in\{1,2,3,\ldots,2026\}$，有 $a_{k+l}=a_k$．

参考答案

一、单选题

1.【答案】C

【详解】 $A=\{x|x^2-3x<0\}=\{x|0<x<3\}$， $B=\{x|x-2>0\}=\{x|x>2\}$，

故 $A\cup B=\{x|x>0\}$.

2.【答案】D

【分析】根据复数的乘法运算可得 $(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，结合复数的几何意义分析判断.

【详解】因为复数 $(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，

所以其在复平面内对应的点为 $(3,-1)$，位于第四象限.

故选：D.

3.【答案】B

【详解】设等比数列的公比为 q，

由 $a_2=4, a_4+a_6=24$ 得,

$\begin{cases}a_1q=4\\ a_1q^3+a_1q^5=24\end{cases}$，两式作比，得 $\dfrac{1}{q^2+q^4}=\dfrac{1}{6}$，得 $q^2=2$，

则 $a_8=a_2q^6=a_2\left(q^2\right)^3=4\times2^3=32$.

4.【答案】C

【分析】根据题意得 $(2+x)^4=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4$，利用赋值法和二项式系数求解.

【详解】由于 $x(2+x)^4=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，

则 $(2+x)^4=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4$，

令 $x=1$，得 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=3^4=81$，

又因为 $a_5=\mathrm{C}_4^4\cdot2^0=1$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=80$.

5.【答案】D

【详解】由圆锥曲线 $C:x^2+my^2+m=0$，可知 $m\neq0$，

则 $-\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$，所以 $m<0$，曲线为双曲线，

所以焦距为 $2c=2\sqrt{(-m)+1}=4$，

解得 $-m=3$，则 $a=\sqrt{3}$，

所以离心率 $e=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

6.【答案】B

【分析】根据$f(x),f(-x)$的关系判断$f(x)$的奇偶性，再根据周期的定义，判断$f(x)$的周期，即可选择.

【详解】由题意得$f(x)=2\sin x\cos x+\sin x=\sin 2x+\sin x$，

故$f(-x)=\sin(-2x)+\sin(-x)=-\sin 2x-\sin x=-f(x)$，

又其定义域为$\mathbf{R}$，故$f(x)$为奇函数；

又$y=\sin 2x$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，

且$y=\sin x$的最小正周期为2π，则$f(x)$的最小正周期为2π，

且$f(x+2\pi)=\sin(2x+4\pi)+\sin(x+2\pi)=\sin 2x+\sin x=f(x)$，

故$f(x)$的最小正周期为2π.

综上所述：$f(x)$是奇函数，且最小正周期为2π.

7.【答案】A

【分析】根据平面向量的三角不等式取等条件判断充分性，举反例判断必要性.

【详解】因为$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，若对任意$\lambda\in\mathbf{R}$都有$\vec{b}\neq\lambda\vec{a}$，则$\vec{a},\vec{b}$不共线，

根据不等式$|\vec{a}|-|\vec{b}|\le|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$的取等条件可知，$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|$，充分性成立；

若$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|$，不妨取$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且$\vec{a},\vec{b}$同向，

则$|\vec{a}|-|\vec{b}|=-1,|\vec{a}+\vec{b}|=3$，满足$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|$，

此时存在$\lambda=2$，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，必要性不成立.

综上，$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，“对于任意$\lambda\in\mathbf{R},\vec{b}\neq\lambda\vec{a}$”是“$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}+\vec{b}|$”的充分不必要条件.

8.【答案】B

【分析】转化为恒成立问题，由对称性求出函数的值域，得到不等式，求出答案

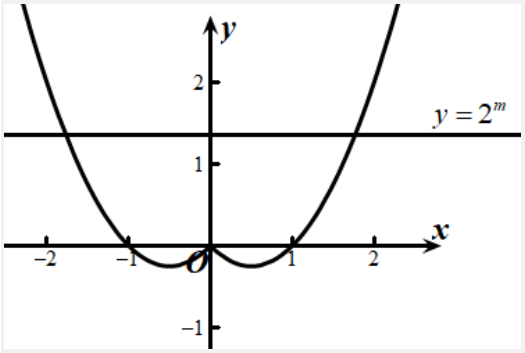
【详解】$x^2<|x|+2^m$，即$x^2-|x|<2^m$的解集为P，设$P=(s,t)$，

设$f(x)=x^2-|x|$，由于$f(-x)=f(x)$，故$f(x)=x^2-|x|$为偶函数，

由对称性可知$s+t=0$，

又$P\subseteq(-2,4)$，故$P=(s,t)\subseteq(-2,2)$，

因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，$f(0)=0,f(2)=2$，作出函数$f(x)$的图象如下图：



由图可知，要使$P=(s,t)\subseteq(-2,2)$，只需满足$2^m\le 2$，解得$m\le 1$.

9.【答案】C

【详解】初始时，上方沙堆高度为h，体积为V_0，

∵体积比等于高度比的立方，

∴经过 10 分钟后上方沙堆的高度降为$\frac{1}{2}h$，上方剩余沙堆的体积$V_1=\left(\frac{1}{2}\right)^3V_0=\frac{1}{8}V_0$，

∵ 经过$t(t\le 30)$分钟后上方剩余沙堆的体积$V=V_0\mathrm{e}^{-kt}$，

∴经过10分钟后上方剩余沙堆的体积$V_1=V_0\mathrm{e}^{-10k}$，

$\therefore\frac{1}{8}V_0=V_0\mathrm{e}^{-10k}$，$\therefore\frac{1}{8}=\mathrm{e}^{-10k}$，$\therefore\ln\frac{1}{8}=-10k$，$\therefore k=\frac{3\ln 2}{10}$，

∵经过10分钟后上方剩余沙堆的体积为$V_1=\frac{1}{8}V_0$，

∴下方容器内的体积为$V_0-V_1=V_0-\frac{1}{8}V_0=\frac{7}{8}V_0$，

∴将沙漏上下颠倒，此时上方容器内的沙堆体积为$\frac{7}{8}V_0$，

设此时上方容器的高度为H，

$\therefore\frac{7}{8}V_0=V_0\cdot\left(\frac{H}{h}\right)^3$，$\therefore\frac{7}{8}=\left(\frac{H}{h}\right)^3$，$\therefore H=h\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}>\frac{1}{2}h$，

∴倒置后的上方容器内沙堆高度再次降为$\frac{1}{2}h$时，上方容器剩余沙堆的体积为$V_2=\frac{1}{8}V_0$，

设从倒置后到高度再次降为$\frac{1}{2}h$需要的时间为t_1，

则$\frac{1}{8}V_0=\left(V_0-\frac{1}{8}V_0\right)\mathrm{e}^{-kt_1}$，即$\frac{1}{7}=\mathrm{e}^{-kt_1}$，$t_1=\frac{\ln 7}{k}$，

$\because k=\frac{3\ln 2}{10}$，$\therefore t_1=\frac{\ln 7}{k}=\frac{\ln 7}{\frac{3\ln 2}{10}}=\frac{10\ln 7}{3\ln 2}=\frac{10\times 1.95}{3\times 0.69}\approx 9.4$分钟.

10.【答案】A

【分析】先求出圆 C 的圆心和半径，根据数量积的几何意义，可得$\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{MP}$，进而可得点 P 的轨迹方程，根据直线恒过定点，结合点与圆的位置关系，分析求解，即可得答案.

【详解】圆 C 的方程变形为$(x-1)^2+y^2=3$，圆心$C(1,0)$，半径$r=\sqrt{3}$，

又$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}=\left|\overrightarrow{CM}\right|\left|\overrightarrow{CP}\right|\cos\left\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}\right\rangle=3$，$\left|\overrightarrow{CM}\right|=r=\sqrt{3}$，

所以$\left|\overrightarrow{CP}\right|\cos\left\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}\right\rangle=\sqrt{3}$，即$\overrightarrow{CP}$在$\overrightarrow{CM}$方向上的投影为$\sqrt{3}=\left|\overrightarrow{CM}\right|$，

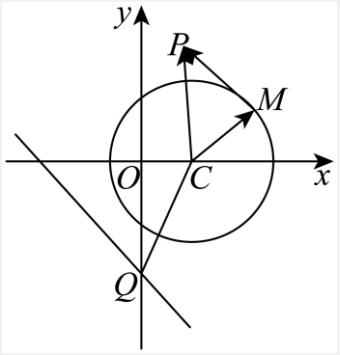
所以$\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{MP}$，又$|\overrightarrow{MP}|=1$，所以$\left|\overrightarrow{CP}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{CM}\right|^2+\left|\overrightarrow{MP}\right|^2}=2$，

则点 P 的轨迹是以 C 为圆心，2 为半径的圆，

又直线$x+ay+2a=x+a(y+2)=0$恒过定点$Q(0,-2)$，

所以$|CQ|=\sqrt{(1-0)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}$，

则P到直线$x+ay+2a=0$的距离的最大值为$|CQ|+2=\sqrt{5}+2$.



二、填空题

11.【答案】6

【分析】根据题意，利用抛物线的定义，即可求解.

【详解】由抛物线$C:y^2=8x$，可得焦点为$F(2,0)$，准线l方程为$x=-2$，

因为$P(4,m)$为C上一点，

根据抛物线的定义，可得点P到准线l距离为$4-(-2)=6$.

12.【答案】4

【详解】已知$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(3,t)$，其中$t\in\mathrm{R}$，

得：$\vec{b}-\vec{a}=(3-(-1),t-2)=(4,t-2)$，

所以$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{4^2+(t-2)^2}=\sqrt{16+(t-2)^2}$，

当$t=2$时，$|\vec{b}-\vec{a}|_{\min}=\sqrt{16}=4.$

13.【答案】 $\frac{\pi}{8}$（答案不唯一，满足题意即可） $\frac{\pi}{8}$（答案不唯一，满足题意即可）

【详解】$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$，即$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$，

结合$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$，可知$\cos(\alpha+\beta)\neq 0$

两边同除$\cos(\alpha+\beta)$可得：$\tan(\alpha+\beta)=1$，

即$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathrm{Z})$，又$\alpha,\beta\in(0,2\pi)$，

故取$\alpha=\frac{\pi}{8}$，$\beta=\frac{\pi}{8}$，$\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$满足条件.

14.【答案】 6.6 3.5

【分析】根据等差数列的定义，结合已知条件求解即可.

【详解】因为a_1,a_2,a_3是公差为-0.75的等差数列，所以$a_2=a_1+(-0.75)=8.25$，$a_3=a_2+(-0.75)=7.5$.

又$a_3-a_4=0.3$，所以$a_4=a_3-0.3=7.2$.

因为对任意$i(i=1,2,\cdots,8)$，$\dfrac{a_i}{b_i}=\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{a_4}{b_4}=\dfrac{3}{2}$，所以$b_4=\dfrac{2}{3}a_4=\dfrac{2}{3}\times7.2=4.8$.

因为b_4,b_5,b_6是公差为-0.4的等差数列，所以$b_5=b_4+(-0.4)=4.4$，$b_6=b_5+(-0.4)=4$.

又$\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{3}{2}$，所以$a_5=\dfrac{3}{2}b_5=\dfrac{3}{2}\times4.4=6.6$，同理$a_6=\dfrac{3}{2}b_6=\dfrac{3}{2}\times4=6$，

因为a_6,a_7,a_8都是公差为-0.75的等差数列，所以$a_7=a_6+(-0.75)=5.25$.

又$\dfrac{a_7}{b_7}=\dfrac{3}{2}$，所以$b_7=\dfrac{2}{3}a_7=\dfrac{2}{3}\times5.25=3.5$.

综上，$a_5=6.6$，$b_7=3.5$.

15.【答案】①③

【分析】根据题意，结合$[x]$表示不超过实数x的最大整数，函数$f(x)=[ax]+[bx]$，以及a,b为正整数，利用函数的性质，逐项分析判断，即可求解.

【详解】对于①，因为$[x]$表示不超过实数x的最大整数，

由a,b为正整数，若$x_1<x_2$，可得$ax_1<ax_2,bx_1<bx_2$，则$[ax_1]\le[ax_2],[bx_1]\le[bx_2]$，

两式相加得$[ax_1]+[bx_1]\le[ax_2]+[bx_2]$，即$f(x_1)\le f(x_2)$，所以①正确；

对于②，当$x=0$时，$f(0)=[0]+[0]=0$；

取$a=b=1$，可得$f(x)=[x]+[x]=2[x]$，

对于任意$x\in\mathrm{R}$，可得$f(-x)=2[-x],-f(x)=-2[x]$，

当$x\notin\mathrm{Z}$时，$[-x]=-[x]-1$，可得$f(-x)=2(-[x]-1)$；

而$-f(x)=-2[x]$，显然$f(-x)\ne-f(x)$，

对于任意正整数a,b，取$x=\dfrac{1}{a+b}(x>0$且非整数$)$，

可得$ax=\dfrac{a}{a+b}\in(0,1),bx=\dfrac{b}{a+b}\in(0,1)$，所以$f(x)=0+0=0$，

又由$-x=-\dfrac{1}{a+b}$，可得$a(-x)=-\dfrac{a}{a+b}\in(-1,0),b(-x)=-\dfrac{b}{a+b}\in(-1,0)$，

可得$f(-x)=-1+(-1)=-2$，此时$f(-x)\ne-f(x)$，

所以不存在正整数a,b，使得曲线$y=f(x)$关于坐标原点对称，所以②错误；

对于③，当$a=2,b=3$时，$f(x)=[2x]+[3x]$，

设$x=n+t,n\in\mathrm{Z},t\in[0,1)$，可得$[2x]=[2n+2t]=2n+[2t],[3x]=3n+[3t]$，

所以$f(x)=5n+[2t]+[3t]$，

令$f(x)=10$，可得$5n+[2t]+[3t]=10$，解得$n=\dfrac{10-([2t]+[3t])}{5}$，

当$t\in[0,\frac{1}{3})$时，可得$[2t]=0,[3t]=0$，可得$[2t]+[3t]=0$；

当$t\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$时，可得$[2t]=0,[3t]=1$，可得$[2t]+[3t]=1$；

当$t\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3})$时，可得$[2t]=1,[3t]=1$，可得$[2t]+[3t]=2$；

当$t\in[\frac{2}{3},1)$时，可得$[2t]=1,[3t]=2$，可得$[2t]+[3t]=3$；

设$m=[2t]+[3t]\in\{0,1,2,3\}$，由$n=\frac{10-m}{5}$且$n$为整数，

当$m=0$时，可得$n=2\in\mathrm{Z}$；当$m=1$时，可得$n=\frac{9}{5}\notin\mathrm{Z}$；

当$m=2$时，可得$n=\frac{8}{5}\notin\mathrm{Z}$；当$m=3$时，可得$n=\frac{7}{5}\notin\mathrm{Z}$；

所以当$x=2+t$且$t\in[0,\frac{1}{3})$时，满足$f(x)=10$，此时有无数个解，所以③正确；

对于④，当$a=2,b=3$，且$x\in[0,1)$时，可得$2x\in[0,2),3x\in[0,3)$，

所以$[2x]\in\{0,1\},[3x]\in\{0,1,2\}$，

当$x\in[0,\frac{1}{3})$时，可得$[2x]=0,[3x]=0$，可得$f(x)=[2x]+[3x]=0$；

当$x\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$时，可得$[2x]=0,[3x]=1$，可得$f(x)=[2x]+[3x]=1$；

当$x\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3})$时，可得$[2x]=1,[3x]=1$，可得$f(x)=[2x]+[3x]=2$；

当$x\in[\frac{2}{3},1)$时，可得$[2x]=1,[3x]=2$，可得$f(x)=[2x]+[3x]=3$，

所以$f(x)$在$x\in[0,1)$上的取值为$\{0,1,2,3\}$，共有4个元素，所以④错误.

三、解答题

16.【答案】(1)$\frac{\pi}{3}/60^{\circ}$

(2)$f(A)=2\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$；$3\sqrt{3}$

【分析】（1）利用余弦定理和面积公式即可得解；

（2）利用正弦定理表示出$f(A)$，化简，然后结合正弦函数性质求最值.

【详解】（1）由余弦定理和面积公式得：$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，

代入$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)$可得：$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2ab\cos C$，化简得：$\tan C=\sqrt{3}$，

又因为在三角形中，$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

（2）设 R 为三角形外接圆半径，则由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sin A}{\sin A}=2=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，则 $R=1$，

所以 $b=2R\sin B=2\sin B$，$c=2R\sin\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

则三角形周长为：$f(\mathrm{A})=a+b+c=2\sin A+2\sin B+\sqrt{3}$

其中 $A+B+\frac{\pi}{3}=\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}-A$，代入 $f(\mathrm{A})$ 可得：

$f(A)=2\sin A+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)+\sqrt{3}$，

$=2\sin A+2\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-2\cos\frac{2\pi}{3}\sin A+\sqrt{3}$

$=3\sin A+\sqrt{3}\cos A+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$，其中 $0<A<\frac{2\pi}{3}$

所以 $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，则当 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(\mathrm{A})$ 取得最大值，

所以 $f(\mathrm{A})_{\max}=2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

17.【答案】(1)证明见解析

(2)条件①不符合要求，条件②和条件③下平面 PAE 与平面 AEC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【分析】（1）由面面垂直得 $AB\perp$ 平面 PAC，再由线面垂直，推出 $AB\perp PA$，得证结论.

（2）条件①思路：先由 $CD\perp$ 平面 PAC 得 $CD\perp PC$，再结合 $CD\perp PD$ 推出矛盾，故此条件不成立，四棱锥不存在.

条件②思路：由 $AE=PE$ 且 E 为中点得 $\triangle PAD$ 为直角三角形，证 $PA\perp$ 底面，建系求点坐标，求两平面法向量，用向量公式求二面角余弦值.

条件③思路：由全等证 $PA\perp AC$，由面面垂直得 $PA\perp$ 底面，建空间直角坐标系，求各点坐标，求两平面法向量，用夹角公式算余弦值.

【详解】（1）因为平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$.

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AC$，由面面垂直的性质定理，得 $AB\perp$ 平面 PAC.

因为 $PA\subset$ 平面 PAC，所以 $AB\perp PA$.

（2）由题意，$AB=1$，$AC\perp AB$，$BC=2$，故 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{3}$.

底面 $ABCD$ 为平行四边形，故 $CD=AB=1$，$AD=BC=2$，$CD\parallel AB$.

若选条件①：$CD\perp PD$

由（1）知 $AB\perp$ 平面 PAC，故 $CD\perp$ 平面 PAC，因此 $CD\perp PC$.

若 $CD\perp PD$，又 $CD\perp PC$，这显然不可能，

故条件①无法使四棱锥 $P-ABCD$ 存在，不符合要求.

若选条件②：$AE=PE$.

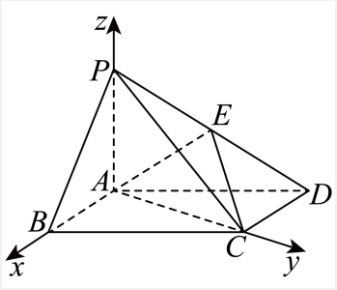
已知 E 为 PD 中点，且 $AE=PE$，则 $PE=DE=AE$，

所以 $\triangle PAD$ 为直角三角形，且 $\angle PAD=90^{\circ}$，即 $PA\perp AD$.

由（1）知 $PA\perp AB$，又 $AD\cap AB=A$，$AD,AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AC$，即 PA,AB,AC 两两垂直.

以 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}$ 分别为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$.

E 为 PD 中点，故 $E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设平面 PAE 的一法向量 $\vec{n}$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0\end{cases}$.

取 $y_1=1$，得 $x_1=\sqrt{3}$，所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,0)$.

设平面 AEC 的法向量 $\vec{m}$：$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}y_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+\frac{1}{2}z_2=0\end{cases}$.

得 $y_2=0$，取 $x_2=1$，得 $z_2=1$，所以 $\vec{m}=(1,0,1)$.

设两平面夹角为 θ，则两平面夹角 θ 的余弦值为：$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{|\sqrt{3}\times1+1\times0+0\times1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

若选条件③：$\triangle ABC\cong\triangle APC$.

由 $AB=1$，$AB\perp AC$，$BC=2$，得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{3}$.

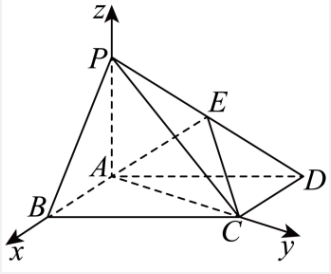
由 $\triangle ABC\cong\triangle APC$，得 $PA=AB=1$，$PC=BC=2$，

故 $PA^2+AC^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4=PC^2$，即 $PA\perp AC$.

又平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$PA\subset$ 平面 PAC，

由面面垂直的性质定理，得 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AP}$ 分别为 x、y、z 轴正方向建立空间直角坐标系：



$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$.

E 为 PD 中点，故 $E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

设平面 PAE 的一法向量 $\vec{n}$：$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0\end{cases}$.

取 $y_1=1$，得 $x_1=\sqrt{3}$，所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,0)$.

设平面 AEC 的法向量 $\vec{m}$：$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

设 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}y_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+\frac{1}{2}z_2=0\end{cases}$.

得 $y_2=0$，取 $x_2=1$，得 $z_2=1$，所以 $\vec{m}=(1,0,1)$.

设两平面夹角为 θ，则两平面夹角 θ 的余弦值为：$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{|\sqrt{3}\times1+1\times0+0\times1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

18.【答案】(1)在职人员借阅的文学类图书量更大

(2)$\frac{32}{125}$

(3)$M_1<M_3<M_2$

【分析】（1）先根据“总借阅量=调查人数×年人均借阅量×对应类别占比”的公式，分别列出在职人员文学类、中学生教辅类的借阅量计算式，再代入数据比较大小；

（2）先根据大学生各类借阅占比和为100%，求出 $a+b$ 的值，得到大学生借阅科技类的概率；同理根据中学生各类借阅占比和为100%，求出 $c+d$ 的值，得到中学生借阅科技类的概率；然后将“3 册书中至少有 2 册为科技类图书”分解为“2 册科技类 1 册非科技类”和“3 册都是科技类”两个子事件，利用独立事件概率公式和互斥事件概率加法公式计算总概率；

（3）根据偏好度的定义，计算各类读者的“偏好度”，可得答案.

【详解】（1）在职人员借阅文学类图书总量：$600\times18.5\times35\%=3885$（册），

中学生借阅教辅类图书总量： $500\times15.2\times40\%=3040$ （册），

因为 $3885>3040$，所以这一年里在职人员借阅的文学类图书量更大；

（2）用频率估计概率：大学生借阅科技类的概率为 0.4，中学生借阅科技类的概率为 0.2，

三人借阅相互独立，“至少 2 册科技”包含三种情况：

① 2 名大学生均借科技，中学生不借科技： $P_1=0.4^2\times(1-0.2)=0.128$，

② 仅 1 名大学生借科技，中学生借科技： $P_2=2\times0.4\times(1-0.4)\times0.2=0.096$，

③ 3 人均借科技： $P_3=0.4^2\times0.2=0.032$，

总概率： $P=P_1+P_2+P_3=0.128+0.096+0.032=0.256=\dfrac{32}{125}$.

（3）在职人员的 5 个占比分别为： $35\%,25\%,10\%,20\%,10\%$，即 $x_i=[0.35,0.25,0.10,0.20,0.10]$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}|x_i-0.2|=|0.35-0.2|+|0.25-0.2|+|0.1-0.2|+|0.2-0.2|+|0.1-0.2|$ ，

$=0.15+0.05+0.10+0+0.10=0.4$，故 $M_1=\dfrac{0.4}{5}=0.08$；

大学生的已知占比为： $30\%,40\%,13\%$，

因此未知占比满足 $a+b=1-(0.3+0.4+0.13)=0.17$，

由题设 $abcd>0$ 得 $a>0,b>0$，因此 $a<0.17<0.2$， $b<0.17<0.2$，

即 a,b 都小于均值 0.2，因此 $|a-0.2\neq0.2-a$， $|b-0.2\neq0.2-b$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}|x_i-0.2|=|0.3-0.2|+|0.4-0.2|+|0.13-0.2|+(0.2-a)+(0.2-b)$，

$=0.1+0.2+0.07+0.4-(a+b)=0.77-0.17=0.6$，

因此： $M_2=\dfrac{0.6}{5}=0.12$；

中学生的已知占比为： $25\%,20\%,40\%$，

因此未知占比满足 $c+d=1-(0.25+0.2+0.4)=0.15$，

同理，由 $c>0,d>0$ 得 $c<0.15<0.2$， $d<0.15<0.2$，

因此 $|c-0.2\neq0.2-c$， $|d-0.2\neq0.2-d$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}|x_i-0.2|=|0.25-0.2|+|0.2-0.2|+|0.4-0.2|+(0.2-c)+(0.2-d)$，

$=0.05+0+0.2+0.4-(c+d)=0.65-0.15=0.5$，

因此： $M_3=\dfrac{0.5}{5}=0.1$.

综上： $M_1<M_3<M_2$

19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)证明见详解.

【分析】（1）根据已知直接求出a,b即可；

（2）将问题转化为证明$y_Q=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，设出直线方程，结合$OQ\perp OD$，用y_Q表示出点D坐标，然后代入椭圆方程求解即可得证.

【详解】（1）因为圆$W:x^2+y^2=1$经过下顶点B，所以$b=1$，

又$\angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle BF_1O=\frac{\pi}{6}$，所以$a=|BF_1|=\frac{|OB|}{\sin\angle BF_1O}=2$，

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）由（1）知$F_1\left(-\sqrt{3},0\right),B(0,-1),A(2,0)$，

要证$AP\parallel BF_1$，只需证$k_{BF_1}=k_{AP}$，即$-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{y_P-0}{0-2}$，得$y_P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

又$y_Q=y_P$，所以只需证$y_Q=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

设$C\left(x_1,y_1\right),D\left(x_2,y_2\right)$，因为$OQ\perp OD$，所以$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OD}=x_2x_Q+y_2y_Q=0$，

当直线l的斜率不存在时，易知其方程为$x=1$，则$x_2=x_Q=1$，

因为$y_Q>0$，$1+y_2y_Q=0$，所以$y_2<0$

将$x=1$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得$y_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，代入$1+y_2y_Q=0$得$y_Q=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当直线l的斜率存在时，设其方程为$y=kx+m$，易知$k\neq0$，

则$x_Q=\frac{y_Q-m}{k},y_2=kx_2+m$，代入$x_2x_Q+y_2y_Q=0$，得：$x_2\cdot\frac{y_Q-m}{k}+\left(kx_2+m\right)y_Q=0$，

整理得$x_2=\frac{-kmy_Q}{k^2y_Q+y_Q-m}$，

又圆W与直线l相切，所以$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow k^2=m^2-1$，

所以$x_2=\frac{-kmy_Q}{\left(m^2-1\right)y_Q+y_Q-m}=\frac{ky_Q}{1-my_Q}$，$y_2=\frac{k^2y_Q}{1-my_Q}+m=\frac{m-y_Q}{1-my_Q}$，

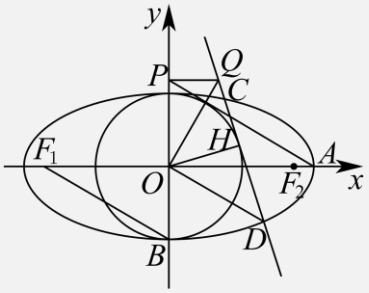
因为点D在椭圆上，所以$\frac{\left(ky_Q\right)^2}{4\left(1-my_Q\right)^2}+\frac{\left(m-y_Q\right)^2}{\left(1-my_Q\right)^2}=1$，

整理得$\left(k^2+4-4m^2\right)y_Q^2+4\left(m^2-1\right)=0$，

又$m^2-1=k^2$，所以$-3k^2y_Q^2+4k^2=0$，

由$k\neq0$，$y_Q>0$解得$y_Q=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上，$y_Q=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即可得证.



20.【答案】(1) $f(x)$ 单调递减区间为：$\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$，单调递增区间为：$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$.

(2) $g(x)$ 无零点.

(3)面积 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$.

【分析】（1）先求定义域，再求导找零点，划分区间判符号，确定单调减区间，再确定单调增区间.

（2）提取公因式转化函数，求导找单调性与最小值，判断最小值恒正，推出函数恒正，故无零点.

（3）先求切线方程得截距坐标，由等腰直角得边长相等，分类讨论去绝对值，构造函数求零点，算出坐标求面积.

【详解】（1）定义域：$x>0$，函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

当 $x\in\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上所述，$f(x)$ 单调递减区间为：$\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$，单调递增区间为：$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$.

（2）由题可知 $g(x)=f(x)+x=x(x\ln x+1)$，$x>0$

所以研究函数 $g(x)$ 的零点个数等价于研究 $h(x)=x\ln x+1$ 的零点个数.

$h'(x)=\ln x+1$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}^{-1}$.

$x\in\left(0,\mathrm{e}^{-1}\right)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

$x\in\left(\mathrm{e}^{-1},+\infty\right)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

所以函数 $h(x)=x\ln x+1$ 有极小值同时也为最小值 $h(\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}+1>0$.

故 $h(x)>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 无零点.

（3）函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

所以 $f'(x_0)=2x_0\ln x_0+x_0$，切线 l：$y-x_0^2\ln x_0=(2x_0\ln x_0+x_0)(x-x_0)$.

化简得 $y=\left(2x_0\ln x_0+x_0\right)x-x_0^2\left(\ln x_0+1\right)$.

所以由题可知分别令 $y=0,x=0$ 可得 $A\left(\dfrac{x_0\left(\ln x_0+1\right)}{2\ln x_0+1},0\right)$， $B\left(0,-x_0^2\left(\ln x_0+1\right)\right)$.

$\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，且 $OA\perp OB$，故 $|OA|=|OB|$.

即 $\left|\dfrac{x_0\left(\ln x_0+1\right)}{2\ln x_0+1}\right|=\left|-x_0^2\left(\ln x_0+1\right)\right|$，

因为 $x_0>0$，所以化简得 $\left|\dfrac{\left(\ln x_0+1\right)}{2\ln x_0+1}\right|=\left|x_0\left(\ln x_0+1\right)\right|$.

若 $\ln x_0+1=0$ 即 $x_0=\mathrm{e}^{-1}$.

代入：左边 $|OA|=0$,右边 $|OB|=0$.

此时 A,B 都与原点重合,不能构成三角形,舍去.

若 $\ln x_0+1\neq 0$ 两边约去 $|\ln x_0+1|$,得： $\dfrac{1}{|2\ln x_0+1|}=x_0$

令 $t=\ln x_0$,则 $x_0=\mathrm{e}^t$,方程变为： $\mathrm{e}^t|2t+1|=1$.

情况 1: $2t+1\geq 0$,即 $t\geq -\dfrac{1}{2},\mathrm{e}^t\left(2t+1\right)=1$

设 $\varphi(t)=\mathrm{e}^t\left(2t+1\right)-1,\varphi'(t)=\mathrm{e}^t\left(2t+1\right)+2\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\left(2t+3\right)$

$t\geq -\dfrac{1}{2}$ 时, $2t+3>0$, $\varphi'(t)>0$, $\varphi(t)$ 单调递增.

因为 $\varphi(0)=1\cdot 1-1=0$,故唯一解 $t=0$ 即 $x_0=\mathrm{e}^0=1$,此时 $A(1,0)$, $B(0,-1)$.

等腰直角三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$.

情况 2: $2t+1<0$,即 $t<-\dfrac{1}{2},\mathrm{e}^t\left(-2t-1\right)=1$

设 $\psi(t)=-\mathrm{e}^t\left(2t+1\right)-1,\psi'(t)=-\mathrm{e}^t\left(2t+1\right)-2\mathrm{e}^t=-\mathrm{e}^t\left(2t+3\right)$

$t\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right),\psi'(t)>0,\psi$ 单调递增;

$t\in\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\psi'(t)<0$, ψ 单调递减。

函数 $\psi(t)$ 有极大值同时也为最大值 $\psi\left(-\dfrac{3}{2}\right)=2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}-1<0$.

所以 $\psi(t)<0$ 恒成立,方程 $\mathrm{e}^t\left(-2t-1\right)=1$ 无解.

综上,方程只有唯一解 $x_0=1$, $A(1,0)$, $B(0,-1)$,面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$.

21.【答案】(1)具有，理由见解析

(2)（i）4；（ii）证明见解析

【分析】（1）首先分析数列 $\{b_n\}$ 为周期数列，再根据性质 T 的定义即可判断；

（2）（i）分别取取$n=1,l=1$和$n=m,l=1$，再利用反证法即可证明；

（ii）利用（i）中的结论证明得存在n，t，满足$A(n)=A(n+t)$，其中$n\geq 2026,t\geq 1$，再分$t\geq i+2$和$t<i+2$时证明$a_{n-1}=a_{n+t-1}$即可.

【详解】（1）数列$\{b_n\}$具有性质T.

理由如下：数列$\{b_n\}$满足$b_{4k+1}=1,b_{4k+2}=0,b_{4k+3}=-1,b_{4k+4}=0$，其中$k\in\mathbf{N}$，

即$\{b_n\}$是周期为4的周期数列.

所以对任意$n\in\mathbf{N}^*$和$l\in\mathbf{N}^*$，当$m=n+4$时，$S_l(n)=S_l(m)$.

故数列$\{b_n\}$具有性质T.

（2）（i）取$n=1,l=1$，由性质T得：存在$m\in\{2,3,4,5\}$，使得$a_m=a_1$.

同理，取$n=m,l=1$，由性质T得：存在$k\in\{m+1,m+2,m+3,m+4\}$，使得$=a_k=a_1$.

以此类推，得数列$\{a_n\}$中任意连续4项中，必有一项的值等于a_1.

同理，得对于数列中的每一项a_n,a_n之后的任意连续4项中，必有一项的值等于a_n.

假设$\{a_n\}$的取值超过4个，不妨设有5个值不同的项$a_{b_1},a_{b_2},a_{b_3},a_{b_4},a_{b_5}\left(i_1<i_2<i_3<i_4<i_5\right)$，

由上述结论，知在a_b之后的连续4项中，这5个不同值都会出现，这是不可能的.

所以$\{a_n\}$中至多只有4个不同的取值.

又因为周期数列：$1,2,3,4,1,2,3,4,\cdots,1,2,3,4,\cdots$具有性质$T$，

所以集合$\left\{u\middle|\ u=a_n,n\in\mathbf{N}^*\right\}$中元素个数的最大值为4.

（ii）考察由连续4项构成的数组$A(n)=\left(a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3}\right)$，

由（i）知a_n的取值不超过4个，故这样的数组个数不超过$4^4=256$.

所以在$A(2026),A(2027),\cdots,A(2026+256)$这257个数组中至少存在两个相同的，

即存在n，t，满足$A(n)=A(n+t)$，其中$n\geq 2026,t\geq 1$.

以下证明：若$A(n)=A(n+t)$，则$A(n-1)=A(n+t-1)$，即证$a_{n-1}=a_{n+t-1}$.

由性质T，知存在$i\in\{0,1,2,3\}$，使得$a_{n-1}+a_n+\cdots+a_{n-1+t-1}=a_{n+i}+a_{n+i+1}+\cdots+a_{n+i+t-1}$.

①若$n-1+t-1\geq n+i$，即$t\geq i+2$时，去掉上述等式两边的公共项，得

$a_{n-1}+a_n+\cdots+a_{n+i-1}=a_{n+t-1}+a_{n+t}+\cdots+a_{n+i+t-1}$.

若$i=0$，上式即为$a_{n-1}=a_{n+t-1}$.

若$i>0$，由$A(n)=A(n+t)$，知$a_n+\cdots+a_{n+i-1}=a_{n+t}+\cdots+a_{n+t+i-1}$，所以$a_{n-1}=a_{n+t-1}$.

②若$t<i+2$，因为$i\leq 3$，所以$t\leq 4$.

当$t=1$时，由$A(n)=A(n+1)$，得$a_n=a_{n+1}=a_{n+2}=a_{n+3}=a_{n+4}$，

记其值为a，由性质T知，a_{n-1}在其后四项出现，所以$a_{n-1}=a=a_n$；

当$t=2$时，由$A(n)=A(n+2)$，得$a_n=a_{n+2}=a_{n+4},a_{n+1}=a_{n+3}=a_{n+5}$，

分别记其值为a，b，由性质T，知$a_{n-1}+a_n=a+b$，所以$a_{n-1}=b=a_{n+1}$；

同理，得当$t=3,4$时，均有$a_{n-1}=a_{n+t-1}$.

综上，可推导出$a_{n-1}=a_{n+t-1}$.

从而由$A(n)=A(n+t)$，得$A(n-1)=A(n+t-1)$，即得$a_{n-1}=a_{n+t-1}$.

进而得到$A(n-2)=A(n+t-2),\cdots,A(1)=A(1+t)$，

所以存在正整数t，对任意$k\in\{1,2,3,\cdots,2026\}$，有$a_{k+t}=a_k$.