海淀区 2026—2027 学年第一学期期中练习

高三数学

2026.11

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-1<0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0\}$　　（B）$\{-1,1\}$

（C）$\{-1,0,1\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1\}$

（2）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=3$，$a_3+a_9=14$，则 $a_4=$

（A）4　　（B）5

（C）6　　（D）7

（3）已知 $a>b>0$，则

（A）$a+b<ab$　　（B）$a+b<a^2+b^2$

（C）$a+b>\sqrt{ab}$　　（D）$a-b<a^2-b^2$

（4）下列函数中，在定义域上单调递增的是

（A）$y=\mathrm{e}^{1-x}$　　（B）$y=(x-2)\ln x$

（C）$y=\sqrt{x^2+1}$　　（D）$y=x+\sin x$

（5）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，α 的终边经过点 $P(1,-2)$，将 α 的终边绕原点顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后与 β 的终边重合，则 $\tan\beta=$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}$

（C）2　　（D）–2

（6）在△ ABC 中，$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{31}$，$c=6$，则△ ABC 的面积为

（A）$\frac{15\sqrt{3}}{2}$　　（B）$15\sqrt{3}$

（C）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$　　（D）$3\sqrt{3}$ 或 $15\sqrt{3}$

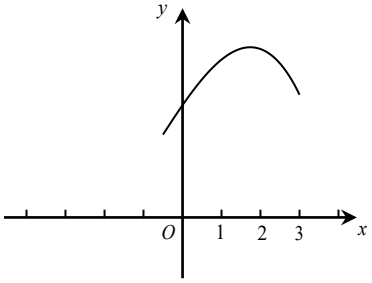
（7）已知数列$\{a_n\}$是公差为d的无穷等差数列，且$d>0$，数列$\{b_n\}$是公比为q的无穷等比数列，且$b_1>0$，则“存在无穷多个正整数k，使得$a_k>b_k$”是“$0<|q|\leqslant 1$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的部分图象如图所示，$f(-4)=0$，$f(-2)=0$，$f(4)=0$.

若$\forall x\in[t,t+1]$，都有$xf(\frac{x}{2})>0$成立，则t的取值范围是



（A）$(0,1)$

（B）$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

（C）$(-8,-5)\cup(0,7)$

（D）$(-\infty,-9)\cup(-4,-1)\cup(8,+\infty)$

（9）考古团队常用碳14测年法来推断壁画的绘制年代. 已知碳14衰变满足指数衰减模型$N(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$，其中$N(t)$是经过$t$年后碳14的残留比例. 现有某壁画存在原始层与重绘层. 运用碳14测年法，测得该壁画原始层碳14的残留比例为0.856，重绘层碳14的残留比例为0.876. 已知该壁画重绘层在五代时期绘制，中国古代朝代表部分如下：

朝代	隋	唐	五代	北宋
时间	581—618 年	618—907 年	907—960 年	960—1127 年

则可以推断绘制原始层的朝代为

（参考数据：$\log_2 214\approx 7.741,\log_2 219\approx 7.775$）

（A）隋　　（B）唐

（C）五代　　（D）北宋

（10）已知E为正方形$ABCD$所在平面内的动点，且$AB=2$，$DE=1$. 点F在正方形$ABCD$的内部及其边界上运动，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的取值范围为

（A）$[-2,4+2\sqrt{2}]$　　（B）$[-\sqrt{3},4+2\sqrt{2}]$

（C）$[-1-\sqrt{2},6]$　　（D）$[-2,6]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若复数 $z=(m+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})\,(m\in\mathbf{R})$ 为实数，则 $m=$_____.

（12）已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(x,-1)$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $x=$_____；$|\boldsymbol{b}|=$_____.

（13）设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=\cos 2x$ 的图象关于原点对称，则 φ 的一个取值为_____.

（14）已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|, & 0<x\leqslant a,\\ 4^x-4, & x>a.\end{cases}$ 当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)<1$ 的解集为_____；

若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的取值范围为_____.

（15）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}\cos x+ax^2\,(a\in\mathbf{R})$. 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数；

② 当 $a=0$ 时，0 是 $f(x)$ 的极小值点；

③ $\exists a,b\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)$ 在区间 $(b,+\infty)$ 上单调递增；

④ $\forall a\in\mathbf{R}$，$y=f(x)$ 的图象与直线 $y=x+1$ 有无数个公共点.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n+a_n=2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+2n-1$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，直线 $y=\frac{1}{2}x+m$ 为曲线 $y=f(x)$ 的切线.

（Ⅰ）求 m 的值；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，求 $g(x)$ 的最大值和最小值.

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+(1+\sin\omega x)^2+(1-\sin\omega x)^2$ $(\omega>0)$，且 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）将 $f(x)$ 的图象向左平移 φ $(0<\varphi<\frac{\pi}{3})$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象.

再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得函数 $g(x)$ 存在，求不等式 $g(x)\geqslant 4$ 的解集.

条件①：$g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称；

条件②：$g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减；

条件③：$g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{24},3)$ 对称.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（19）（本小题 15 分）

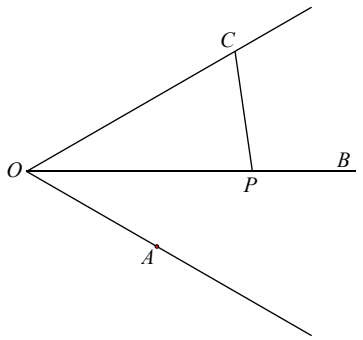
某工业园区使用机器人对多处区域进行巡检，在每处区域分别配置可与机器人进行通信的设备．不考虑其他环境因素干扰，当机器人与某设备的距离不超过 5 km 时，才能与该设备正常通信．

如图，A,C 分别为两处区域的设备所在位置，A,C 两点间距离为 7 km，点 O 为机器人的充电站所在位置，机器人巡检通道为 $\angle AOC$ 的平分线 OB，$\angle AOC=60°$，$OA=5$ km．

（Ⅰ）求 OC 的长度；

（Ⅱ）当机器人巡检到点 P 时，通过定位信息可知 $\cos\angle CPO=\frac{1}{7}$，试判断此时机器人能否同时与 A,C 两处的设备正常通信，并说明理由；

（Ⅲ）直接写出机器人在巡检通道 OB 上可同时与 A,C 两处的设备正常通信的通道长度．



（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+\frac{1}{4})$，直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))\,(t>0)$ 处的切线，且 l 分别与 x 轴、y 轴交于点 $A(a,0)$，$B(0,b)$．设 $a=g(t)$，$b=h(t)$．

（Ⅰ）求 $h(\frac{3}{4})$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $g(t)$ 的单调区间；

（Ⅲ）是否存在实数 $t_0\in(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，使得 $g(t_0)=0$ 和 $h(t_0)=0$ 同时成立？若存在，求 n 的值；若不存在，请说明理由．

（参考数据：$0.69<\ln2<0.70$，$1.09<\ln3<1.10$）

（21）（本小题 15 分）

设 A 是如下形式的 m 行 n 列的数表：

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

其中位于第 i 行第 j 列的数记为 a_{ij}，且 $a_{ij}\in\{-1,1\}$ $(i=1,2,\cdots,m$； $j=1,2,\cdots,n)$．记 r_i 为第 i 行所有数的乘积，c_j 为第 j 列所有数的乘积，$X(A)=\sum_{i=1}^{m}r_i$，$Y(A)=\sum_{j=1}^{n}c_j$，$D(A)=X(A)-Y(A)$．

（Ⅰ）给出如下数表 A_1, A_2，直接写出 $D(A_1)$，$D(A_2)$ 的值；

A_1

1	1	-1	1
-1	1	-1	1

A_2

1	-1	1	-1
1	1	-1	-1
-1	1	1	1

（Ⅱ）当 $m=3, n=4$ 时，求 $D(A)$ 的最小值；

（Ⅲ）记 $D(A)$ 所有可能取值构成的集合为 $\Omega(m,n)$．若 m, n 均为奇数，且数表中1的个数为6，此时 $D(A)$ 所有可能取值构成的集合为 $\Gamma(m,n)$，当 $\Omega(m,n)=\Gamma(m,n)$ 时，求 mn 的最大值.

（考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效）