海淀区2026—2027学年第一学期期中练习

数学参考答案

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）A　（2）B　（3）C　（4）D　（5）A

（6）C　（7）B　（8）C　（9）B　（10）A

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）2　（12）-7　$5\sqrt{2}$

（13）$\frac{3\pi}{2}$（答案不唯一）　（14）$(\frac{1}{2}, \log_4 5)$　$[1,+\infty)$

（15）① ② ④

三、解答题（共6小题，共85分）

（16）（本小题13分）

解：（Ⅰ）因为$S_n + a_n = 2$，当$n=1$时，$2a_1 = 2$，所以$a_1 = 1$.　……1分

当$n \geq 2$时，$S_n + a_n = 2$，$S_{n-1} + a_{n-1} = 2$，　……3分

所以$2a_n - a_{n-1} = 0$，所以$2a_n = a_{n-1}$，

因为$a_1 = 1$，所以$a_{n-1} \neq 0$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}$，　……5分

所以$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

所以$a_n = a_1 q^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-1}$.　……7分

（Ⅱ）因为$b_n = a_n + 2n - 1$，

所以$b_n = (\frac{1}{2})^{n-1} + 2n - 1$，

所以$T_n = (a_1 + 1) + (a_2 + 3) + \cdots + [a_n + (2n-1)]$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + [1 + 3 + \cdots + (2n-1)]$　……8分

$= \frac{1 \times [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{(1 + 2n - 1)n}{2}$　……12分

$=2-(\frac{1}{2})^{n-1}+n^2.$ ……13 分

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\sqrt{x}$ ，得 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ……1 分

设 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))\ (x_0>0)$ 处的切线为 $y=\frac{1}{2}x+m$ ，

则 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}$ ， ……2 分

所以 $x_0=1$. ……3 分

因为切点在曲线 $y=f(x)$ 上，

所以 $f(x_0)=\sqrt{x_0}=1$. ……4 分

又因为切点在直线 $y=\frac{1}{2}x+m$ 上，

所以 $1=\frac{1}{2}+m$.

所以 $m=\frac{1}{2}$. ……5 分

（Ⅱ）函数 $g(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$ ，

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^x-\sqrt{x}\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$$ ……7 分

令 $g'(x)=0$ ，得 $x=\frac{1}{2}$. ……8 分

所以 $x, g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值 $\frac{\sqrt{2e}}{2e}$	↘

……10 分

因为 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^x}\geq 0$, 且 $g(0)=0$ ， ……11 分

所以当 $x=0$ 时， $g(x)$ 取得最小值 0；当 $x=\frac{1}{2}$ 时， $g(x)$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{2e}}{2e}$.

……13 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+(1+\sin\omega x)^2+(1-\sin\omega x)^2$，

所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+2\sin^2\omega x+2$ ……1分

$=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1-\cos 2\omega x+2$ ……2分

$=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x+3$

$=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+3$ ……3分

因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$，故 $\omega=2$． ……4分

所以 $f(x)=2\sin(4x-\frac{\pi}{6})+3$． ……5分

函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\,(k\in\mathbf{Z})$．

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 4x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$． ……6分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}]\,(k\in\mathbf{Z})$． ……7分

（Ⅱ）由题设得 $g(x)=f(x+\varphi)=2\sin(4x+4\varphi-\frac{\pi}{6})+3$． ……8分

选择条件①：$g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称．

由题设得 $4\times(-\frac{\pi}{6})+4\varphi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$， ……9分

解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{4}\,(k\in\mathbf{Z})$， ……10分

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{12}$． ……11分

所以 $g(x)=2\sin(4x+\frac{\pi}{6})+3$．

不等式 $g(x)=2\sin(4x+\frac{\pi}{6})+3\geqslant 4$，

整理得 $\sin(4x+\frac{\pi}{6})\geqslant\frac{1}{2}$， ……12分

即 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 4x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$， ……13分

解得 $\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，

所以不等式 $g(x)\geqslant 4$ 的解集为 $[\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$. ……14分

选择条件③： $g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{24},3)$ 对称.

由题设得 $4\times(-\frac{\pi}{24})+4\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$, ……9分

解得 $\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}\,(k\in\mathbf{Z})$, ……10分

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$ ，所以 $\varphi=\frac{\pi}{12}$. ……11分

所以 $g(x)=2\sin(4x+\frac{\pi}{6})+3$. 以下同选条件①.

（19）（本小题 15 分）

解：（I）在△ OAC 中，由余弦定理 $AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC$ ，

代入，得到 $49=25+OC^2-5OC$ ， ……1 分

解得 $OC=8$ 或 $OC=-3$ （舍）， ……2 分

所以 OC 的长度为 8 km. ……3 分

（II）机器人能同时与 A ， C 两处的设备正常通信.

理由如下：

由题设得， $\angle COP=\angle AOP=30°$ ，

在△ OPC 中，因为 $\cos\angle CPO=\frac{1}{7}$ ，所以 $\sin\angle CPO=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ， ……4 分

由正弦定理 $\frac{CP}{\sin\angle COP}=\frac{OC}{\sin\angle CPO}=\frac{OP}{\sin\angle OCP}$ ，

得 $CP=\frac{OC\cdot\sin\angle COP}{\sin\angle CPO}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ km， ……6 分

因为 $CP=\frac{7\sqrt{3}}{3}\text{km}<5\text{km}$ ，所以机器人能与 C 处设备正常通信. ……7 分

因为 $\angle OCP+\angle COP+\angle CPO=\pi$ ，

所以 $\sin\angle OCP=\sin(\angle COP+\angle CPO)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{13}{14}$ ， ……8 分

$OP=\frac{OC\cdot\sin\angle OCP}{\sin\angle CPO}=\frac{13\sqrt{3}}{3}$ km. ……10 分

在△ OAP 中，由余弦定理 $AP^2=OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cdot\cos\angle AOP$ ，

得 $AP^2 = 25 + \frac{169}{3} - 2 \times 5 \times \frac{13\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49}{3}$，

所以 $AP = \frac{7\sqrt{3}}{3}\text{km} < 5\text{km}$，　　……12 分

所以机器人能同时与 A，C 两处的设备正常通信．　　……13 分

（III）$(3+\sqrt{3})$ km．　　……15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x) = \ln(x + \frac{1}{4})$，得 $f'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{4}} = \frac{4}{4x+1}$．　　……1 分

所以 $f'(\frac{3}{4}) = 1$，$f(\frac{3}{4}) = 0$，　　……3 分

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}))$ 处的切线方程为 $y = x - \frac{3}{4}$．……4 分

所以 $B(0, -\frac{3}{4})$，所以 $h(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}$．　　……5 分

（Ⅱ）曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线方程为 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$．

令 $y = 0$，得 $g(t) = a = -\frac{f(t)}{f'(t)} + t = t - (t + \frac{1}{4})\ln(t + \frac{1}{4})\ (t > 0)$，

……6 分

所以 $g'(t) = 1 - \ln(t + \frac{1}{4}) - 1 = -\ln(t + \frac{1}{4})$，令 $g'(t) = 0$，得 $t = \frac{3}{4}$．

……7 分

所以 $t, g'(t), g(t)$ 的变化情况如下表：

t	$(0, \frac{3}{4})$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{4}, +\infty)$
$g'(t)$	+	0	−
$g(t)$	↗	极大值	↘

……8 分

所以 $g(t)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{3}{4})$，单调递减区间是 $(\frac{3}{4},+\infty)$. ……9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$h(t)=-tf'(t)+f(t)=-\frac{t}{t+\frac{1}{4}}+\ln(t+\frac{1}{4})$， ……10 分

$g(t)=t-(t+\frac{1}{4})\ln(t+\frac{1}{4})$ ，

所以 $g(t)=-(t+\frac{1}{4})h(t)$.

因为 $t>0$，所以 $g(t)=0$ 与 $h(t)=0$ 为同解方程. ……11 分

因为 $g(t)$ 的单调递减区间为 $(\frac{3}{4},+\infty)$，……12 分

因为 $g(2)=2-\frac{9}{4}\times2\times(\ln3-\ln2)>2-\frac{9}{4}\times2\times(1.10-0.69)>0$，

……13 分

$g(3)=3-\frac{13}{4}\times\ln\frac{13}{4}<3-\frac{13}{4}<0$， ……14 分

所以 n 的值为 2. ……15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$D(A_1)=-2$， ……2 分

$D(A_2)=3$ ……4 分

（Ⅱ）方法一：由题设知，$r_i,c_j\in\{-1,1\}$，其中 $i\in\{1,2,3\},j\in\{1,2,3,4\}$，所以 $X(A)$ 为奇数，$Y(A)$ 为偶数， $D(A)$ 为奇数，且 $D(A)\geq-3-4=-7$. ……5 分

若 $D(A)=-7$，则 $X(A)=-3$， $Y(A)=4$，即数表 A 中每行 -1 的个数均为奇数，每列 -1 的个数均为偶数. 因为 $m=3$，所以按行计算，数表 A 中 -1 的个数为奇数，又因为 $n=4$，所以按列计算，数表 A 中 -1 的个数为偶数，矛盾. 因此 $D(A)\geq-5$. ……7 分

取下列 3 行 4 列的数表：

A

-1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1

经验证，该数表 $D(A)=-5$.　　……8 分

综上可知，$D(A)$ 的最小值为 -5 .　　……9 分

方法二：对 A 中任意一个数 $a_{ij}\in\{-1,1\}$，其中 $i\in\{1,2,3\},j\in\{1,2,3,4\}$，取 $b_{ij}=-a_{ij}$，其余数不变得到新数表，则 $X(A)$ 增加 2 或减少 2，$Y(A)$ 增加 2 或减少 2，所以 $D(A)$ 的变化情况共三种：增加 4，减少 4 或者保持不变.

所以对于任意的数表 A，B，$D(A)$ 与 $D(B)$ 的差是 4 的倍数.

又因为当数表 A 全为1时，$D(A)=X(A)-Y(A)=3-4=-1$，

所以 $D(A)\in\{4k-1\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.　　……6 分

因为 $D(A)\geq -3-4=-7$，所以 $D(A)\geq -5$，　　……7 分

构造同方法一.

（Ⅲ）先证：$\Omega(m,n)$ 中的元素满足

$[D(A)]_{\max}\geq m+n-2,[D(A)]_{\min}\leq -m-n+2$，

对 m 行 n 列的数表 A，取第一行均为1，其余为 -1，

因为 m,n 均为奇数，所以 $D(A)=-(m-2)-n=-m-n+2$，

取第一列均为1，其余为 -1，则 $D(A)=m-(-n+2)=m+n-2$，

所以$\left[D(A)\right]_{\max}\geq m+n-2,\left[D(A)\right]_{\min}\leq -m-n+2$．　……10 分

再证：当$m\geq 9$时，$\Gamma(m,n)$的最大元素比$\Omega(m,n)$的最大元素小：

因为数表中恰有 6 个位置为1，因此数表中至多有 6 行r_i为1，此时

$X(A)\leq 1\times 6+(-1)\times(m-6)=12-m$，$Y(A)\geq -n$，

$D(A)\leq 12-m+n<m+n-2$，

因此$\Gamma(m,n)$的最大元素比$\Omega(m,n)$的最大元素小.

同理，当$n\geq 9$时，$\Gamma(m,n)$的最小元素比$\Omega(m,n)$的最小元素大：

因为数表中恰有 6 个位置为1，因此数表中至多有 6 列c_j为1，此时

$X(A)\geq -m$，$Y(A)\leq 1\times 6+(-1)\times(n-6)=12-n$，

$D(A)\geq -m-(12-n)>-n-m+2$，

因此$\Gamma(m,n)$的最小元素比$\Omega(m,n)$的最小元素大.

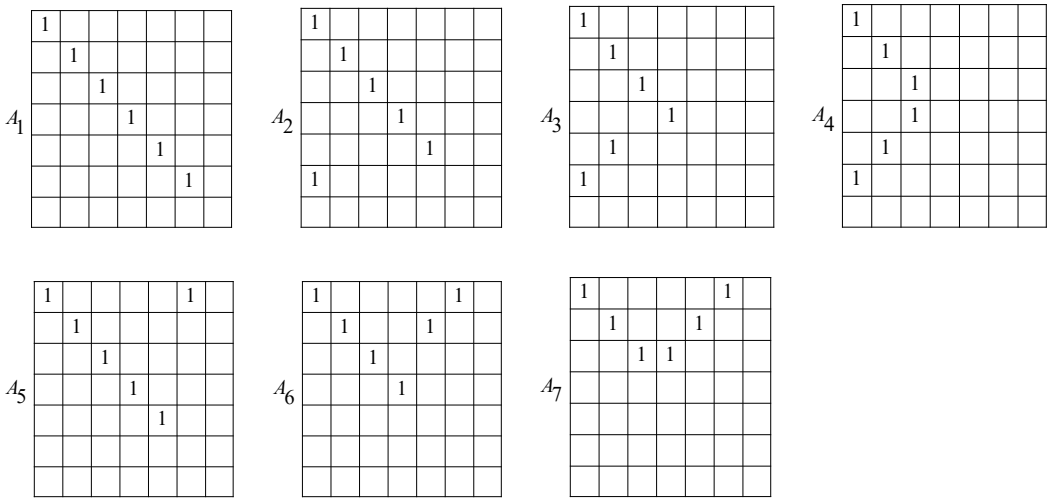
所以$mn\leq 7\times 7=49$，下证7×7的数表符合题意：

显然$\Gamma(7,7)\subseteq\Omega(7,7)$，　　……12 分

对于$\Omega(7,7)$，可知$-14\leq D(A)\leq 14$，当数表A全为 1 时，$D(A)=0$，

由第（Ⅱ）问方法二可知，$\Omega(7,7)\subseteq\{-12,-8,-4,0,4,8,12\}$，

对于$\Gamma(7,7)$，分别取以下数表$A_1,A_2,\cdots,A_7$，



经验证，$\{-12,-8,-4,0,4,8,12\}\subseteq\Gamma(7,7)$　　……14 分

③

由①②③得，$\Gamma(7,7)=\Omega(7,7)$，符合题意.

综上可知，mn 的最大值为 $7\times7=49$.　　……15 分