2026 北京顺义高三二模

数　　学

2026.5

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathrm{R}}A=$

（A）$\{x|x<-1\}$　　（B）$\{x|x<-1$或$x\geqslant 2\}$

（C）$\{x|x>2\}$　　（D）$\{x|x\leqslant -1$或$x>2\}$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-2,3)$，则复数 $\frac{z}{\mathrm{i}}$ 对应的点在

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_6=a_4+4$，$a_3+a_4=7$，则 $a_7=$

（A）4　　（B）5

（C）6　　（D）7

（4）在 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中，常数项为

（A）-60　　（B）-15

（C）15　　（D）60

（5）已知 $a=\ln 2$，$b=\log_2 3$，$c=\log_4 5$，则

（A）$a<b<c$　　（B）$a<c<b$

（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

（6）已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则“$a_1>0$ 且 $q>1$”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）把函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的图象 C_1 向右平移 2 个单位长度，再把所得图象上所有点的纵坐标变成为原来的 $\frac{1}{4}$ 倍，得到图象 C_2. 若此时图象 C_1 恰与 C_2 重合，则 a 的值为

（A）4　　（B）2

（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

（8）在平面直角坐标系中，角α与角β均以Ox为始边，点P_1在角α的终边上，点P_2在角β的终边上. 使命题“若$\sin\alpha>0$，则$\sin\beta>0$”为真命题的条件是

（A）P_1与P_2关于x轴对称　　（B）P_1与P_2关于y轴对称

（C）P_1与P_2关于直线$y=x$对称　　（D）P_1与P_2关于直线$y=-x$对称

（9）已知直线l过点$(0,1)$，其倾斜角为θ，设原点O到直线l的距离为d. 当$0<d\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\theta$的取值范围是

（A）$\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$　　（B）$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

（C）$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$　　（D）$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

（10）已知$f(x),g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，记$L(x)=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant g(x),\\g(x),f(x)>g(x).\end{cases}$给出下列两个结论：

①若函数$f(x)=\sin x$，$g(x)=-\cos x$，则$L(x)$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

②若函数$y=f(x)$和$y=g(x)$都是减函数，则$L(x)$也是减函数.

则下列判断正确的是

（A）①②都正确　　（B）①正确，②错误

（C）①②都错误　　（D）①错误，②正确

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）抛物线$x^2=4y$的焦点到其准线的距离等于_____.

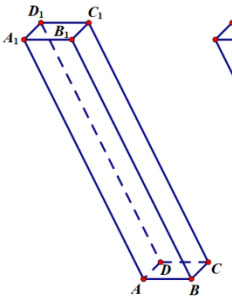
（12）已知正方形$ABCD$的边长为2，点E为CD中点，则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=$_____.

（13）在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=1$.

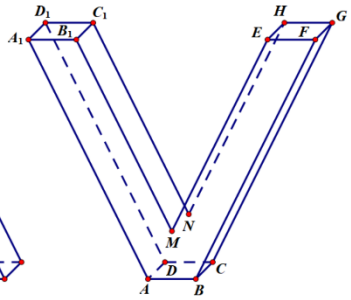
①若$A=\frac{\pi}{3}$，则$\sin B=$_____；

②若$\triangle ABC$为锐角三角形，则c的取值范围是_____.

（14）现有两个完全相同的四棱柱材料（如图一所示）. 某课外手工小组的同学将其中一个切掉一个三棱柱后拼接成如图二所示的“ V 型”几何体（正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 与正方形 $EFGH$ 在同一平面内，A_1,B_1,E,F 四点在一条直线上），$AB=2$，$AA_1=10$，$\angle A_1AB=120^\circ$，$\angle A_1AD=90^\circ$，则图一所示的四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的侧面 A_1ABB_1 的面积为_____, 图二所示的几何体的体积为_____.



（图一）



（图二）

（15）已知函数 $f(x)=\left|e^x-a\right|-kx+1$. 给出下列四个结论：

①当 $a=1$ 时，对任意负实数 k，方程 $f(x)=0$ 恰有一个实数解；

②存在 $a>1$，有负实数 k，使得方程 $f(x)=0$ 无实数解；

③存在 $a\in\mathbf{R}$，有正实数 k，使得方程 $f(x)=0$ 恰有 2 个实数解；

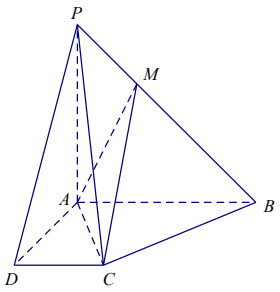
④存在 $a\in\mathbf{R}$，有实数 k，使得方程 $f(x)=2$ 恰有 3 个实数解.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp AB$，$AB\perp AD$，$AB//CD$，$AB=AD=AP=2CD=2$，M 是棱 PB 上一点，满足 $PB=3PM$.



（I）求证：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）求平面 $ABCD$ 与平面 ACM 夹角的余弦值.

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi$，其中 $\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$.

（I）若 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ 值；

（II）已知 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减，$f(\frac{2\pi}{3})=-1$，再从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定，求 ω,φ 的值.

条件 ①：$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增；

条件 ②：$f(-\frac{\pi}{3})=-1$；

条件 ③：$f(\frac{\pi}{6})=0$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

在某城市青年电影节公益短片展播环节中，预计展播 2 部反诈宣传短片与 1 部文明出行宣传短片，每部短片仅展播一次且播放次序随机.所有短片的时长均固定为 10 分钟，相邻短片播放无时间间隔.

（Ⅰ）求第 1 部播放的短片是文明出行宣传短片的概率；

（Ⅱ）记随机变量 X 为从展播开始计时，到最后一部反诈宣传短片播放完成所用的总时间（单位：分钟），求 X 的分布列与数学期望 EX；

（Ⅲ）设随机变量 Y 为从展播开始计时，到文明出行宣传短片播放完成所用的总时间.记 Y 的方差为 DY，（II）中 X 的方差为 DX .比较方差 DY 与 DX 大小（结论不要求证明）.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$， A, B 分别是椭圆 E 的上、下顶点，$|AB|=2$.

（I）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 O 为坐标原点， C 是椭圆 E 的左顶点，过点 A 作斜率为 k 的直线 l，l 与椭圆 E 交于点 T（不同于点 A）且与 x 轴交于点 D，点 Q 在直线 BD 上，且 $OQ\perp TB$. 求证：$\triangle CQO$ 的面积为定值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x$， $g(x)=ax^2-(a-2)x-2$， $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处有相同的切线，求 a 的值；

（Ⅱ）设 $h(x)=f(x)-g(x)$，且 $a\in(-1,0)$.

①求 $h(x)$ 的极值；

②证明：函数 $h(x)$ 有 3 个不同的零点.

（参考数据：$0.69<\ln 2<0.70$， $1.09<\ln 3<1.10$， $1.60<\ln 5<1.61$）

（21）（本小题 15 分）

已知集合 $X=\{1,2,3,\cdots,16\}$，集合 A 是 X 的一个含 $k\left(k<16\right)$ 个元素的子集. 若集合 A 满足如下两个性质，则称集合 A 为集合 X 的完美子集：

①集合 A 的任何两个不同子集的元素之和不相等；

②对任意 $m\in X$ 且 $m\notin A$，令 $B=A\cup\{m\}$，则集合 B 存在两个不同子集，它们的元素之和相等；

（Ⅰ）若 $A_1=\{1,3,5\}, A_2=\{1,2,4,9\}$，分别判断 A_1, A_2 是否为集合 X 的完美子集；

（Ⅱ）若集合 A 为集合 X 的完美子集，证明：集合 A 的元素之和的最小值为16；

（III）若集合 A 为集合 X 的完美子集，证明：$k\leqslant 5$.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D　　（2）A　　（3）D　　（4）D　　（5）B

（6）A　　（7）C　　（8）B　　（9）C　　（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

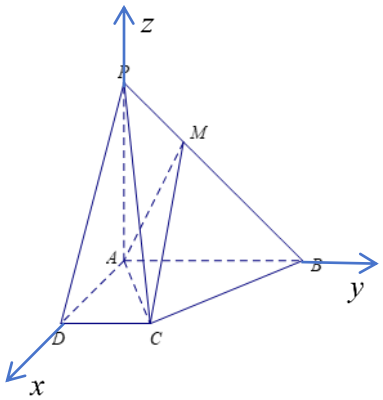
（11）2　（12）3　　（13）①$\frac{\sqrt{3}}{4}$　②$(\sqrt{3},\sqrt{5})$（前空 3 分后空 2 分）

（14）$10\sqrt{3}$，$38\sqrt{3}$　（前空 3 分后空 2 分）

（15）①③④　（有错不得分，仅对 1 个 3 分，对 2 个 4 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）



（Ⅰ）因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，

$PA\subset$平面 PAB，且 $PA\perp AB$

所以 $PA\perp$平面 $ABCD$　　----------(5 分)

（Ⅱ）因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB, PA\perp AD$，

又 $AB\perp AD$，如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

可得 $B(0,2,0), C(2,1,0), D(2,0,0), P(0,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}=\frac{1}{3}(0,2,-2)=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$.

所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(0,0,2)+(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

又 $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，设平面 ACM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y=0\\ \frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0\end{cases}$.

令 $x=1$ 则 $y=-2$，$z=-1$，于是 $\vec{n}=(1,-2,1)$.

又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$.

设平面 $ABCD$ 与平面 ACM 夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=|\frac{1}{1\cdot\sqrt{6}}|=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 $ABCD$ 与平面 ACM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.　　----------(13 分)

（17）（本小题 14 分）

（Ⅰ）解：因为 $f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi$，且 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以可得 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. ----------(4 分)

（Ⅱ）选择条件①：

因为 $f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi=\sin(2\omega x+\varphi)$，且 $f(\frac{2\pi}{3})=-1$.

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{2\pi}{3}$ 取得最小值 -1.

因为 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上单调增，在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 取得最大值，

所以最小正周期满足 $\frac{1}{2}T=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $T=\pi$.

又 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，且 $\omega>0$，所以 $\omega=1$， $f(x)=\sin(2x+\varphi)$

代入 $f(\frac{2\pi}{3})=-1$ 得 $\sin(\frac{4\pi}{3}+\varphi)=-1$，可得 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\phi=\frac{\pi}{6}$. 所以 $\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{6}$. ----------(14 分)

选择条件②：

因为 $f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi=\sin(2\omega x+\varphi)$，且 $f(\frac{2\pi}{3})=-1$.

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{2\pi}{3}$ 取得最小值 -1.

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减

所以最小正周期满足 $\frac{1}{2}T\geqslant\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $T\geqslant\pi$.

因为 $f(\frac{2\pi}{3})=f(-\frac{\pi}{3})=-1$，所以最小正周期满足 $T\leqslant\frac{2}{3}\pi-(-\frac{\pi}{3})=\pi$.

所以 $T=\pi$.又 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，且 $\omega>0$

所以 $\omega=1$， $f(x)=\sin(2x+\varphi)$

代入 $f(\frac{2\pi}{3})=-1$ 得 $\sin(\frac{4\pi}{3}+\varphi)=-1$，可得 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.所以 $\omega=1$， $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ----------(14 分)

（18）（本小题 13 分）

（Ⅰ）设“第1个播放的短片为文明出行宣传短片”为事件 A，A 中包含的基本事件只有 2 个，基本事件的总数为 6，所以 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ----------(3 分)

（Ⅱ）随机变量 X 可能的取值为 $20,30$，且 $P(X=20)=\frac{A_2^2}{A_3^2}=\frac{1}{3}$，$P(X=30)=\frac{C_2^1A_2^2}{A_3^3}=\frac{2}{3}$.

所以，随机变量 X 的分布列为

X	20	30
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以 $EX=20\times\frac{1}{3}+30\times\frac{2}{3}=\frac{80}{3}$. ----------(10 分)

（Ⅲ）$DY>DX$. ----------(13 分)

（19）（本小题 15 分）

（Ⅰ）解：因为 $|AB|=2$，所以 $b=1$，因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，所以 $a^2=4$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ----------(4 分)

（Ⅱ）法一：因为 $A(0,1)$，所以可设直线 l 方程为 $y=kx+1$，

联立 $\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\y=kx+1\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$，

所以 $x_T=\frac{-8k}{4k^2+1}$，代入可得 $y_T=\frac{-4k^2+1}{4k^2+1}$，

又 $B(0,-1)$，所以 $k_{BT}=\frac{y_T+1}{x_T}=-\frac{1}{4k}$，

因为 $OQ\perp BT$，所以 $k_{OQ}\cdot k_{BT}=-1$，所以 $k_{OQ}=4k$，

所以直线 OQ 方程为 $y=4kx$，

由对称性可知，直线 BD 的斜率为 $-k$，所以直线 BD 的方程为 $y=-kx-1$.

联立 $\begin{cases}y=-kx-1\\y=4kx\end{cases}$，解得 $y_Q=-\frac{4}{5}$，又 $|OC|=2$

所以 $S_{\Delta CQO}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$ 为定值. ----------(15 分)

法二：可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，由题知 $k\neq0$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kx=0$

所以 $x_T=\frac{-8k}{1+4k^2}$，代入可得 $y_T=\frac{1-4k^2}{1+4k^2}$

因为 $B(0,-1), D(-\frac{1}{k},0)$，则 BD 的直线方程为 $y=-kx-1$，

因为点 Q 在直线 BD 上，可设 $Q(\frac{y_0+1}{-k},y_0)$

因为 $OQ \perp TB$，所以

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{TB}=(\frac{y_0+1}{-k},y_0)\cdot(\frac{8k}{1+4k^2},-1-\frac{1-4k^2}{1+4k^2})$

$=\frac{-8(y_0+1)}{1+4k^2}-\frac{2}{1+4k^2}=0$

所以 $8(y_0+1)+2=0$，得到 $y_0=-\frac{4}{5}$，又 $|OC|=2$

所以 $S_{\triangle CQO}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$. ----------(15 分)

（20）（本小题 15 分）

（Ⅰ）解：$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，$g'(x)=2ax-a+2$，$g'(1)=a+2$

因为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处有相同的切线

所以 $a+2=1$，即 $a=-1$. ----------(4 分)

（Ⅱ）解：① $h(x)=\ln x-ax^2+(a-2)x+2$

所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-2ax+a-2=\frac{(2x-1)(-ax-1)}{x}$

令 $h'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{a}$

因为 $a\in(-1,0)$，所以 $-\frac{1}{a}>1>\frac{1}{2}$

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 或 $x\in(-\frac{1}{a},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$

当 $x\in(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$ 时，$h'(x)<0$

所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}),(-\frac{1}{a},+\infty)$ 单增，在 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$ 单减

所以 $h(x)$ 得极大值=$h(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+\frac{a}{4}+1$

$h(x)$ 得极小值=$h(-\frac{1}{a})=\ln(-\frac{1}{a})+\frac{1}{a}+1$； ----------(10 分)

②证明：法一：由①可知 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}),(-\frac{1}{a},+\infty)$ 单增，在 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$ 单减，

因为 $h(1)=0$，所以 $h(\frac{1}{2})>0$，$h(-\frac{1}{a})<0$，

因为 $h(\frac{1}{8})=-3\ln 2+\frac{7a}{64}+\frac{7}{4}<-0.32+\frac{7a}{64}<0$，所以存在唯一 $x_1\in(\frac{1}{8},\frac{1}{2})$，使得 $h(x_1)=0$.

又 $-\frac{2}{a}>-\frac{1}{a}>1$， $h(-\frac{2}{a})=\ln(-\frac{2}{a})>0$，所以存在唯一 $x_3\in(-\frac{1}{a},-\frac{2}{a})$，使得 $h(x_3)=0$

又 $x_2=1, x_2\in(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$ 使得 $h(x_2)=0$

所以综上可知， $h(x)$ 有3个不同的零点. ----------(15 分)

法二：由①可知 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}),(-\frac{1}{a},+\infty)$ 单增，在 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$ 单减，

又 $h(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+\frac{a}{4}+1=1-\ln 2+\frac{a}{4}$

因为 $\ln 2<0.7$， $a>-1$，所以 $1-\ln 2+\frac{a}{4}>0.3-0.25>0$ 即 $h(\frac{1}{2})>0$

又 $h(\frac{1}{8})=-3\ln 2+\frac{7a}{64}+\frac{7}{4}<-0.32+\frac{7a}{64}<0$，所以存在唯一 $x_1\in(\frac{1}{8},\frac{1}{2})$，使得 $h(x_1)=0$.

又 $h(-\frac{1}{a})=\ln(-\frac{1}{a})+\frac{1}{a}+1$，令 $g(x)=\ln x-x+1$， $x\in(1,+\infty)$， $g'(x)=\frac{1}{x}-1<0$

所以 $g(x)$ 单调递减， $g(x)<g(1)=0$ 即 $h(-\frac{1}{a})<0$，

所以存在唯一 $x_2\in(\frac{1}{2},-\frac{1}{a})$，使得 $h(x_2)=0$

又 $-\frac{2}{a}>-\frac{1}{a}>1$， $h(-\frac{2}{a})=\ln(-\frac{2}{a})>0$，所以存在唯一 $x_3\in(-\frac{1}{a},-\frac{2}{a})$，使得 $h(x_3)=0$

所以综上可知， $h(x)$ 有3个不同的零点. ----------(15 分)

（21）（本小题 15 分）

（Ⅰ）解： A_1 不是 ； A_2 是. ----------(4 分)

（II）证明：集合 A 中的元素个数为 k，设集合 A 的元素之和为 S.

假设 $S<16$，考察包含 A 的集合 $B=A\cup\{16\}$，

由①可得集合 A 的任意两个子集元素之和不等，所以集合 B 的任意一个包含 16 的子集元素和比 B 的任意一个不包含 16 的子集元素和大，从而 B 的任意两个子集元素之和不相等.

由②知集合 B 中一定存在元素之和相等的子集，矛盾. 假设不成立.

从而 $S\geq 16$. 又 $A=\{1,2,4,9\}$ 满足要求，

此时 $S=16$，从而 S 的最小值为 16. ----------(10 分)

（III）证明：若 $k\geq 7$，则因 A 的非空子集有 2^k-1 个，而最大的元素和不超过 $16k$，但 $2^k-1>16k$，必有两个子集的和相等，矛盾.

若 $k=6$，考虑 A 的元素个数不超过 4 的子集，因为这样的子集共有

$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$ 个，因为任意一个这样的和 $\leq 16+15+14+13=58$

所以 A 中任意一个元素个数不超过 4 元子集的元素之和都在区间 $[1,57]$ 内，

若$1\in A$，由$1+15=16$知，$15,16$不同时属于A.

由$1+13=14$知，$13,14$不同时属于A.

由$1+11=12$知，$11,12$不同时属于A.

所以此时最大的和不大于$16+14+12+10=52$，而$56>52$，

必有两个子集的和相等，矛盾. 所以$1\notin A$

若$2\in A$，则由$2+14=16$，知$14,16$不同时属于A.

由$2+13=15$知，$13,15$不同时属于A.

由$2+10=12$知，$10,12$不同时属于A.

所以此时最大的和不大于$16+15+12+9=52$，而$56>52$，

所以必有两个子集的和相等，矛盾. 所以$2\notin A$

因为 1 和 2 都不属于A，则最小的和不小于 3，于是，其和都属于区间

$[3,57]$，最多有 55 个不同的和，而$56>55$，必有两个子集的和相等，矛盾.

综上所述，$k\le 5$. ----------(15 分)