# 2026 北京西城高三二模

# 数　　学

2026.5

本试卷共 6 页， 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分（选择题 共 40 分）

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

（1）已知集合 $A=\{n\mid n=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{1,3,5,7\}$，则

（A） $B\subseteq A$　　（B） $B\subseteq \complement_{\mathbf{Z}}A$

（C） $A\cap B=B$　　（D） $A\cup B\neq A$

（2）已知复数 $z$ 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2\mathrm{i}=3$，则 $z=$

（A） $2-3\mathrm{i}$　　（B） $-2-3\mathrm{i}$

（C） $2+3\mathrm{i}$　　（D） $-2+3\mathrm{i}$

（3）双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右顶点到其渐近线的距离为

（A） $1$　　（B） $\sqrt{2}$

（C） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（4）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，角 $\alpha$ 以 $Ox$ 为始边， $P(-1,2)$ 为 $\alpha$ 终边上一点，则 $\tan 2\alpha=$

（A） $\dfrac{4}{3}$　　（B） $-\dfrac{4}{3}$

（C） $\dfrac{4}{5}$　　（D） $-\dfrac{4}{5}$

（5）已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，设 $g(x)=f(-x)-f(x)$，则函数 $g(x)$ 是

（A）奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增　　（B）偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

（C）奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减　　（D）偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

（6）在长方形 $ABCD$ 中， $AD=4$， $AB=1$， $E$ 是边 $BC$ 上一点，则 $|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}|$ 的最小值为

（A） $1$　　（B） $2$

（C） $3$　　（D） $4$

（7）设函数 $f(x)=(x-a)\ln(x+b)$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\varnothing$，则

（A） $a+b>1$　　（B） $a+b<0$

（C）$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　（D）$a^2+b^2\leqslant\frac{1}{4}$

（8）已知正方体$W$和平面$\alpha$，则“正方体$W$的8个顶点中存在6个到平面$\alpha$的距离相等”是“平面$\alpha$将正方体$W$分成体积相等的两部分”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）某工厂2023年的年产值为$a$，这一年工厂制定10年规划，欲通过技术革新、管理优化等手段，促使工厂产值的年平均增长率为$x\%$，以期2033年的年产值达到2023年的4倍. 实践中，由于市场环境逐步向好，工厂产值的年增长率超过预期. 已知2025年的工厂年产值恰好达到规划中2026年的既定目标，如果从2026年起未来8年（含2026年）的年平均增长率与前2年实际年平均增长率相同，那么2033年工厂的年产值为

（A）$6a$　　（B）$8a$

（C）$9a$　　（D）$12a$

（10）已知无穷数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且对任意的正整数$i$，总存在正整数$s,t\ (s\neq t)$，满足$a_i=a_s+a_t$，则

（A）$\{a_n\}$可能为常数列　　（B）$\{a_n\}$可能为等差数列

（C）$\{a_n\}$不可能为等比数列　　（D）$\{a_n\}$可能为递减数列

## 第二部分（非选择题 共110分）

**二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。**

（11）在$\triangle ABC$中，若$a=5$，$b=6$，$c=8$，则最大内角的余弦值为_____.

（12）在$(x^3-\frac{2}{x})^4$的展开式中，常数项为_____.（用数字作答）

（13）已知向量$\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3})$，单位向量$\boldsymbol{e}=(1,0)$，向量$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=1$，则$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}$的一个取值为_____.

（14）设函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x-1, & 0<x\leqslant 4,\\ x-6, & x>4,\end{cases}$集合$M=\{x\,|\,|f(x)|=m\}$，其中$m\geqslant 0$. 若集合$M$中共有3个元素，则$m$的取值范围是_____；若集合$M$中共有4个元素，则这4个元素乘积的最小值为_____.

（15）在物理实验中，当相互垂直的两个简谐振动的频率比为简单整数比时，示波器上会显示出一条“利萨如曲线”. 曲线 $C$：$x^2+4y^4-4y^2=0$ 是一条常见的“利萨如曲线”. 给出以下四个结论：

① 若 $P(x,y)$ 为曲线 $C$ 上一点，则 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$；

② 曲线 $C$ 上两点间距离的最大值为 $\sqrt{6}$；

③ 曲线 $C$ 所围成的区域的面积小于 3；

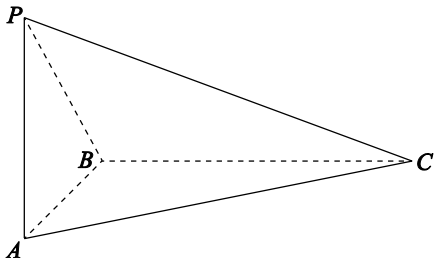
④ 过原点的直线与曲线 $C$ 最多有 3 个公共点.

其中，所有正确结论的序号是_____.

**三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

（16）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABC$，$PA=AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，直线 $PC$ 与底面 $ABC$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.




（I）求证：$BC\perp$ 平面 $PAB$；

（II）求平面 $PAC$ 与平面 $PBC$ 夹角的余弦值.

（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin 2x\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)+\cos 2x\sin\varphi$，其中 $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③中选择一个条件作为已知，使得函数 $f(x)$ 存在且唯一确定. 当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

条件①：$f(\frac{\pi}{12})=f(\frac{\pi}{4})$；

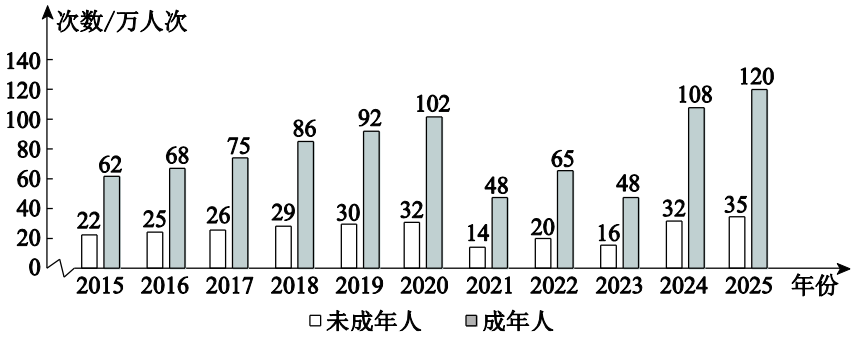
条件②：函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\pi)$ 上单调递减；

条件③：函数 $f(x+\frac{\pi}{6})$ 为偶函数.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

随着人们生活水平的提高，参观文博馆成为人们外出旅游的一项重要活动. 某市 2015 年到 2025 年的文博馆接待的成年人和未成年人的参观次数（单位：万人次）统计图如下：




假设各年的参观情况互不影响.

（Ⅰ）在 2016 年到 2025 年这 10 年中任选一年，求这一年与其前一年相比，该市未成年人参观文博馆次数出现增长的概率；

（Ⅱ）从 2015 年至 2020 年这 6 年中任选 1 年，再从 2021 年至 2025 年这 5 年中任选 2 年，记选出的 3 年中该市年参观文博馆总人次超过 120 万的年数为 $X$ ，求 $X$ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记 2015 年至 2025 年该市未成年人和成年人年参观文博馆次数的方差为 $s_1^2$ 和 $s_2^2$ 、年参观文博馆总人次的方差为 $s_3^2$ ，给出 $s_1^2, s_2^2, s_3^2$ 的大小关系.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$ ，点 $M(-1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ 在椭圆 $C$ 上.

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）过点 $N(-3,0)$ 的直线与 $C$ 交于 $A,B$ 两点，过点 $A$ 作 $AP$ 垂直直线 $MF$ 于点 $P$ ，记 $\triangle BPN$ 和 $\triangle BPF$ 的面积分别为 $S_{\triangle BPN}$ 和 $S_{\triangle BPF}$ ，求证： $S_{\triangle BPN}=S_{\triangle BPF}$ .

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{ax}$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）对于 $x\in(0,+\infty)$，讨论 $f(x)$ 与 $f(\dfrac{1}{x})$ 的大小；

（Ⅲ）当 $0<a<1$ 时，证明：方程 $f(x)=1$ 存在两个根 $x_1,x_2$，且 $x_1x_2>1$.

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 $n$ $(n\geqslant 3)$，记集合

$S_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i=0$ 或 $1\ (i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\neq 0\}$.

对于由 $S_n$ 中的三个元素组成的子集 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n),(c_1,c_2,\cdots,c_n)\}$，若满足对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$a_i+b_i+c_i$ 均为偶数，则称该三元子集具有性质 $T$.

（Ⅰ）在 $S_3$ 的子集中，写出一个具有性质 $T$ 的三元子集；（结论不要求证明）

（Ⅱ）证明：在 $S_5$ 的子集中，不可能选出 10 个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集；

（Ⅲ）在 $S_{2026}$ 的子集中，最多能选出多少个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集？说明理由.

**（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）**

# 参考答案

**一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）**

（1）D　　（2）B　　（3）C　　（4）A　　（5）C

（6）B　　（7）C　　（8）D　　（9）B　　（10）D

**二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）**

（11）$-\frac{1}{20}$　　（12）–32

（13）0（答案不唯一）　　（14）$(1,2)$　　140

（15）①③④

注：（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；（15）题全部选对得 5 分，有两个选对且无错选得 4 分，有一个选对且无错选得 3 分，其他得 0 分.

**三、解答题（共 6 小题，共 85 分）**

（16）（本小题 14 分）

**解：**（I）因为 $PA\perp$ 平面 $ABC$，

所以 $PA\perp BC$，$PA\perp AC$，$AC$ 为 $PC$ 在平面 $ABC$ 内的射影，

所以直线 $PC$ 与底面 $ABC$ 所成角为 $\angle PCA$，即 $\angle PCA=\frac{\pi}{6}$.　　…… 2 分

在 Rt△$PAC$ 中，由 $PA=1$，$\angle PCA=\frac{\pi}{6}$，得 $AC=\sqrt{3}$.

在 △$ABC$ 中，又因为 $AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，

所以 $AC^2=AB^2+BC^2$，即 $BC\perp AB$.　　…… 4 分

又因为 $BC\perp PA$，$PA\cap AB=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 $PAB$.　　…… 6 分

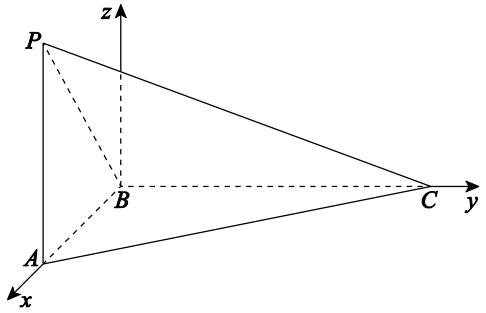
（II）在平面 $PAB$ 内，过 $B$ 作 $Bz//PA$. 由（I）得 $BA, BC, Bz$ 两两垂直.

如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$P(1,0,1)$，$\overrightarrow{BC}=(0,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BP}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\sqrt{2},0)$.　…… 8 分

设平面 $PAC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1=0, \\ -x_1+\sqrt{2}y_1=0. \end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=\sqrt{2}$．于是 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,0)$．




设平面 $PBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{2}y_2=0, \\ x_2+z_2=0. \end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $z_2=-1$．于是 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$． …… 12 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即平面 $PAC$ 与平面 $PBC$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． …… 14 分

（17）（本小题 13 分）

**解：**（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin 2x\sin(\dfrac{\pi}{2}+\varphi)+\cos 2x\sin\varphi$

$=\sin 2x\cos\varphi+\cos 2x\sin\varphi$

$=\sin(2x+\varphi)$， …… 4 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$． …… 6 分

（Ⅱ）选择条件①：

由 $f(\dfrac{\pi}{12})=f(\dfrac{\pi}{4})$，得 $\sin(\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\varphi)$，

所以 $\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\varphi+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\varphi=\cos\varphi$，即 $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

结合 $\varphi\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，即 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$． …… 9 分

由 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，得 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}]$．

结合函数 $y=\sin x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 上单调递减，

得当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=1$；

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-\dfrac{1}{2}$． …… 13 分

选择条件③：

由 $g(x)=f(x+\dfrac{\pi}{6})=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi)$ 为偶函数，得 $g(0)=1$ 或 $g(0)=-1$，

即 $\sin(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=\pm1$，结合 $\varphi\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．

故 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …… 9 分

以下解答过程与选择条件①相同，略.

（18）（本小题 13 分）

**解：**（Ⅰ）设事件“这一年与其前一年相比，该市未成年人参观次数出现增长”为 $A$，

由图可知，在 2016 年到 2025 年这 10 年中，有 8 年的未成年人参观次数比上一年的未成年人参观次数出现增长，故 $P(A)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$. …… 4 分

（Ⅱ）由题意，$X$ 的取值集合为 $\{0,1,2,3\}$， …… 5 分

由图知：在 2015 年至 2020 年这 6 年中，只有 2019 年和 2020 年这 2 年的参观总人次超过 120 万；在余下的 5 年中，只有 2024 年和 2025 年这 2 年的参观总人次超过 120 万，

所以 $P(X=0)=\frac{4C_3^2}{6C_5^2}=\frac{1}{5}$； $P(X=1)=\frac{2C_3^2+4C_2^1C_3^1}{6C_5^2}=\frac{1}{2}$；

$P(X=2)=\frac{2C_2^1C_3^1+4C_2^2}{6C_5^2}=\frac{4}{15}$； $P(X=3)=\frac{2C_2^2}{6C_5^2}=\frac{1}{30}$.

故变量 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{30}$ |

…… 8 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{30}=\frac{17}{15}$. …… 10 分

（Ⅲ）$s_1^2<s_2^2<s_3^2$. …… 13 分

（19）（本小题 15 分）

**解：**（Ⅰ）由题意，得 $c=1$，且 $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3b^2}=1$， $a^2=b^2+c^2$， …… 3 分

解得 $a=\sqrt{3}$， $b=\sqrt{2}$.

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. …… 5 分

（Ⅱ）由题意，直线 $AB$ 的斜率存在，故设 $AB$：$y=k(x+3)$. …… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x+3),\end{cases}$ 得 $(2+3k^2)x^2+18k^2x+27k^2-6=0$，

故 $\Delta=324k^4-4(2+3k^2)(27k^2-6)>0$，即 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$（由题意 $k\neq0$）.

且 $x_1+x_2=\dfrac{-18k^2}{2+3k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{27k^2-6}{2+3k^2}$. …… 9 分

由 $AP\perp MF$ 和 $MF//y$ 轴，得 $P(-1,\ y_1)$，

所以直线 $BP$ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+1}(x+1)$，即 $(y_2-y_1)x-(x_2+1)y+y_2+x_2y_1=0$.

点 $N$ 到直线 $BP$ 的距离 $d_1=\dfrac{|-2y_2+3y_1+x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2+1)^2}}$.

点 $F$ 到直线 $BP$ 的距离 $d_2=\dfrac{|y_1+x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2+1)^2}}$. …… 12 分

因为 $(-2y_2+3y_1+x_2y_1)+(y_1+x_2y_1)=-2y_2+4y_1+2x_2y_1$

$=-2k(x_2+3)+4k(x_1+3)+2x_2k(x_1+3)$

$=4k(x_1+x_2)+2kx_1x_2+6k$

$=4k\times\dfrac{-18k^2}{2+3k^2}+2k\times\dfrac{27k^2-6}{2+3k^2}+6k$

$=0$，

所以 $d_1=d_2$. …… 14 分

又因为 $S_{\triangle BPN}=\dfrac{1}{2}|BP|\cdot d_1$， $S_{\triangle BPF}=\dfrac{1}{2}|BP|\cdot d_2$，

所以 $S_{\triangle BPN}=S_{\triangle BPF}$. …… 15 分

（20）（本小题 15 分）

**解：**（Ⅰ）由题意， $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$. …… 2 分

所以 $f(1)=1$， $f'(1)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=1$. …… 4 分

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1+\ln x}{ax}-\dfrac{x(1-\ln x)}{a}$， $x\in(0,+\infty)$， …… 5 分

则 $g'(x)=\dfrac{1}{a}(\dfrac{-\ln x}{x^2}+\ln x)=\dfrac{(x^2-1)\ln x}{ax^2}$.

当 $x\in(0,\ 1)$ 时，由 $x^2-1<0$， $\ln x<0$，得 $g'(x)>0$；

当 $x\in(1,\ +\infty)$ 时，由 $x^2-1>0$， $\ln x>0$，得 $g'(x)>0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $g'(x)\geqslant 0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 7 分

由 $g(1)=0$，得当 $0<x<1$ 时， $g(x)<g(1)=0$，即 $f(x)<f(\dfrac{1}{x})$；

同理，得当 $x>1$ 时， $f(x)>f(\dfrac{1}{x})$.

综上，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<f(\frac{1}{x})$；当 $x=1$ 时，$f(x)=f(\frac{1}{x})$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>f(\frac{1}{x})$. ····· 9 分

（Ⅲ）求导，得 $f'(x)=\frac{-\ln x}{ax^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $x$ 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ····· 11 分

下面证明结论：当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$.（*）

设 $m(x)=x-1-\ln x$，$x>1$，则 $m'(x)=\frac{x-1}{x}>0$. 故 $m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

所以当 $x>1$ 时，$m(x)>m(1)=0$，即 $\ln x<x-1$.

因为 $f(\frac{1}{\mathrm{e}})=0<1$，$f(1)=\frac{1}{a}>1$，$f(\frac{2}{a^2})=\frac{a}{2}(1+\ln 2+2\ln\frac{1}{a})<\frac{a}{2}[2+2(\frac{1}{a}-1)]=1$（利用结论（*））.

所以 $\exists x_1\in(0,1),\ x_2\in(1,+\infty)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=1$. ····· 13 分

由（Ⅱ），知当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>f(\frac{1}{x})$.

所以 $f(x_1)=f(x_2)>f(\frac{1}{x_2})$，即 $f(x_1)>f(\frac{1}{x_2})$.

又因为 $x_1\in(0,1),\ \frac{1}{x_2}\in(0,1)$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $x_1>\frac{1}{x_2}$，即 $x_1x_2>1$. ····· 15 分

（21）（本小题 15 分）

**解**：（Ⅰ）答案不唯一. 如 $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$. ····· 3 分

（Ⅱ）由题意，$S_5$ 中共有 $2^5-1=31$ 个元素，故最多能选出 $[\frac{31}{3}]=10$ 个两两交集为空集的三元子集. ····· 5 分

将 $S_5$ 中所有元素的第一个分量求和（一个元素可以看成一个数组，第一个数字称为第一个分量，以此类推），知其和等于 $2^4=16$；同理，所有第二个分量、第三个的分量、……的和均等于 16. ····· 7 分

假设能选出10个符合题意的三元子集，

由题意，这 10 个三元子集覆盖了 $S_5$ 中的 30 个元素，且每个三元子集的所有元素的每一个分量数

字之和均为偶数.

故 $S_5$ 中余下的一个元素的每一个分量都是偶数，即只能为 $(0,0,0,0,0)$.

这与 $(0,0,0,0,0)\notin S_5$ 矛盾.

所以在 $S_5$ 的子集中，不可能选出10个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集.

…… 9分

（Ⅲ）记 $t_n=\dfrac{2^n-1}{3}$，其中 $n$ 为偶数. 不妨设 $n=2$ 时 $S_n$ 有意义.

当 $n=2$ 时，$S_2$ 的三元子集只有一个 $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$，且具有性质 $T$. …… 10分

所以在 $S_2$ 中最多能选出 $t_2=1$ 个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集.

记 $S_2$ 中具有性质 $T$ 的三元子集为 $\{(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\}$.

当 $n=4$ 时，$S_4$ 中有 $2^4-1$ 个元素，故最多有 $\dfrac{2^4-1}{3}=5$ 个两两交集为空集的三元子集.

因为 $S_4$ 的子集 $\{(0,1,a_1,a_2),(1,0,b_1,b_2),(1,1,c_1,c_2)\}$，$\{(1,0,a_1,a_2),(1,1,b_1,b_2),(0,1,c_1,c_2)\}$，$\{(1,1,a_1,a_2),(0,1,b_1,b_2),(1,0,c_1,c_2)\}$，$\{(0,0,a_1,a_2),(0,0,b_1,b_2),(0,0,c_1,c_2)\}$ 和 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,0,0)\}$ 为两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集（共5个），

所以在 $S_4$ 的子集中，最多能选出 $t_4=\dfrac{2^4-1}{3}=5$ 个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集. …… 12分

设 $\{(d_1,d_2,d_3,d_4),(e_1,e_2,e_3,e_4),(f_1,f_2,f_3,f_4)\}$ 为 $S_4$ 中上述具有性质 $T$ 的三元子集中的任意一个，

同理，得 $S_6$ 中有 $2^6-1$ 元素，即最多能有 $\dfrac{2^6-1}{3}$ 个两两交集为空集的三元子集，

且对于 $S_6$，可以构造出4个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集，即

$\{(0,1,d_1,d_2,d_3,d_4),(1,0,e_1,e_2,e_3,e_4),(1,1,f_1,f_2,f_3,f_4)\}$，

$\{(1,0,d_1,d_2,d_3,d_4),(1,1,e_1,e_2,e_3,e_4),(0,1,f_1,f_2,f_3,f_4)\}$，

$\{(1,1,d_1,d_2,d_3,d_4),(0,1,e_1,e_2,e_3,e_4),(1,0,f_1,f_2,f_3,f_4)\}$，

$\{(0,0,d_1,d_2,d_3,d_4),(0,0,e_1,e_2,e_3,e_4),(0,0,f_1,f_2,f_3,f_4)\}$.

又因为 $\{(1,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0,0)\}$ 为 $S_6$ 中具有性质 $T$ 的三元子集，且与上述集合的交集为空集，

所以在 $S_6$ 的子集中，最多能选出 $4t_4+1=\dfrac{2^6-1}{3}=t_6$ 个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集.

以此类推，得在 $S_{2026}$ 的子集中，最多能选出 $4t_{2024}+1=\dfrac{2^{2026}-1}{3}=t_{2026}$ 个两两交集为空集，且具有性质 $T$ 的三元子集. …… 15分