2026 北京石景山高三二模

数　　学

2026.5

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 $z=1+2\mathrm{i}^3$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）已知集合 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}, B=\{x\mid x\leqslant -2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$

（A）$\{x\mid x\geqslant 1\}$　　（B）$\{x\mid x>1\}$

（C）$\{x\mid x>-2\}$　　（D）$\{x\mid x<-2\}$

（3）已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+a}$ 是偶函数，则实数 $a=$

（A）-1　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

（4）已知实数 a,b,c,d 满足：$a>b>c>d$，则下列不等式恒成立的是

（A）$a+c>b+d$　　（B）$a-c<b-d$

（C）$ab>cd$　　（D）$ac>bd$

（5）设 α,β 是两个不同的平面，则 $\alpha\parallel\beta$ 的充要条件是

（A）存在无数条直线与 α,β 都平行

（B）存在无数个平面与 α,β 都垂直

（C）对任意的直线 $l\subset\alpha$，都存在直线 $m\subset\beta$，使得 $l\parallel m$

（D）对任意的直线 $l\subset\alpha$，都存在直线 $m\subset\beta$，使得 $l\perp m$

（6）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3, x<0,\\ \mathrm{e}^x, x\geqslant 0.\end{cases}$，$g(x)=f(x)-x-a$．若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,1]$　　（C）$(1,+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

（7）人们通常以分贝（符号是 dB）为单位来表示声音强度的等级.一般地，如果强度为 I 的声音对应的等级为 L dB，则有 $L=10\lg\dfrac{I}{10^{-12}}$.已知某品牌笔记本电脑工作时产生的噪音强度的等级约为 52 dB，如果通过改善相关结构，将其噪音的强度减少为原来的一半，则改善后的噪音强度的等级约为

（参考数据：$\lg 2 \approx 0.301$）

（A）49dB　　（B）46dB　　（C）26dB　　（D）13dB

（8）若 $C_n^1 + 3C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \cdots + 3^{n-2} C_n^{n-1} + 3^{n-1} = 85$，则 n 的值为

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

（9）在△ABC 中，$\angle BAC = \frac{\pi}{3}, BC = 4, D$ 为 BC 边上的中点，$AD = 3$，则△ABC 的面积为

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{5\sqrt{3}}{4}$　　（C）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\frac{5\sqrt{3}}{2}$

（10）在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 C_1D_1 的中点，S 是正方形 $ABCD$ 及其内部的点构成的集合．设集合 $T = \{P \in S \mid PA_1 = \sqrt{2}PE\}$，则 T 表示的轨迹是

（A）线段　　（B）圆的一部分

（C）椭圆的一部分　　（D）抛物线的一部分

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{2 - x}$ 的定义域是_____.

（12）设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，向量 $\lambda\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(\lambda \in \mathbf{R})$ 与 $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\lambda =$_____.

（13）设双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$，若直线 $y = 2x$ 与双曲线 C 无公共点，则 b 的一个取值为_____.

（14）等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 10$，$a_2 + a_4 = 5$，则 $a_n =$_____；$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 的最大值为_____.

（15）已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$，且 $\cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha - \cos\beta$．给出下列四个结论：

①$\cos\alpha + \cos\beta$ 有最小值；

②$\cos\alpha + \cos\beta$ 无最大值；

③$\cos\alpha\cos\beta$ 有最小值；

④$\cos\alpha\cos\beta$ 无最大值．

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega x}{2} + \cos^2\frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2} (\omega > 0)$.

从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值和最小值.

条件 ①：函数 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；

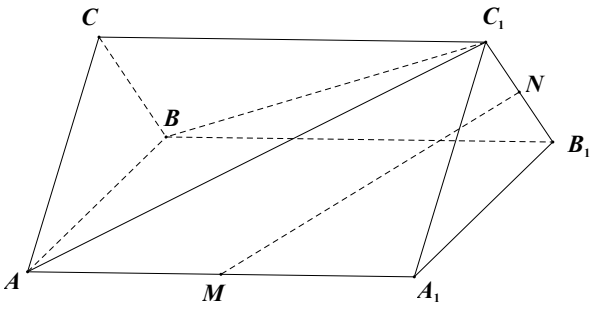
条件 ②：$f(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$；

条件 ③：函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上具有单调性，且 $f(-\frac{\pi}{3})f(\frac{\pi}{6})=-1$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1=\sqrt{6}AB$，M,N 分别是 AA_1,B_1C_1 的中点.



（I）求证：MN // 平面 ABC_1；

（II）求二面角 $A-BC_1-B_1$ 的余弦值；

（III）设平面 ABC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线为 l，求直线 l 与直线 MN 所成的角.

（18）（本小题 13 分）

2026 年春节期间，模式口历史文化街区推出“骐骥献瑞”主题集章打卡活动.游客可以收集“龙马献瑞”，“马到成功”，“马效炎德”，“马奔财乡”，“奇骏延年”，“马行无疆”6 个蕴含马年吉祥寓意的专属印章.为了解不同年龄段游客的打卡习惯，从参与活动的人群中随机抽取 100 名游客，统计他们集章情况如下表（同一题材重复集章只计 1 个）：

组别	集章 1 个	集章 2 个	集章 3 个	集章 4 个	集章 5 个	集章 6 个	各组总人数
青年	1 人	1 人	2 人	12 人	12 人	2 人	30 人
中年	3 人	2 人	8 人	30 人	15 人	2 人	60 人
老年	1 人	2 人	1 人	3 人	2 人	1 人	10 人

每个游客的打卡行为相互独立.

（Ⅰ）从上表的青年组中随机抽取 1 名游客，求该游客集章个数不少于 4 的概率；

（Ⅱ）从参与打卡活动的青年和中年游客中各随机抽取 2 人，用上表统计的频率估计概率，试估计这 4 人中“恰有 2 人集章 4 个、2 人集章 5 个”的概率；

（Ⅲ）将青年、中年、老年组的组别分别编码为 $-1,0,1$，用上表统计的频率估计概率，从集章个数为 $k(k=1,2,3,4,5,6)$ 的游客中随机抽取 1 人，记该游客的组别编码为 X_k，写出满足 $EX_k\geqslant 0$ 的 k 值的个数.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，其左顶点为 A，上顶点为 B，$|AB|=\sqrt{5}$，直线 l 平行于 AB 且与椭圆 C 交于不同的两点 M,N.

（I）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）是否存在直线 l 使得 A,B,N,M 为顶点的四边形为等腰梯形？若存在，求此时 l 的方程；若不存在，请说明理由.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-a\sin x$.

（i）当 $a=1$ 时，讨论函数 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的单调性；

（ii）若 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内存在唯一的极大值点，求实数 a 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

设递增数列 $\{a_n\}$ 中的每一项都是正整数，其前 n 项和为 S_n.对于正整数 k，若存在正整数 j，使得 $a_k\in(S_{j-1},S_j]$，则称 S_j 覆盖了 a_k，记 a_k 的“覆盖阶数”为 $C(a_k)=j$.定义 a_k 的“覆盖滞后度”为 $\lambda(a_k)=k-C(a_k)$.规定 $S_0=0$.

（I）若 $a_1=3,a_2=7,a_3=8,a_4=12$，求 $\lambda(a_1)$ 和 $\lambda(a_3)$ 的值；

（II）若数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列，判断是否存在正整数 k，使得 $\lambda(a_k)=10$？若存在，求出所有满足条件的 k 的值；若不存在，请说明理由；

（III）设 $\{a_n\}$ 前 k 项的“覆盖滞后度” $\lambda(a_1),\lambda(a_2),\cdots,\lambda(a_k)$ 的最大值为 M，求证：对任意的 $m\in\{0,1,2,\cdots,M\}$，存在 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，使得 $m=\lambda(a_i)$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D　（2）B　（3）C　（4）A　（5）C

（6）D　（7）A　（8）B　（9）D　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(-\infty,0)\cup(0,2]$　（12）$\frac{1}{2}$　（13）1（答案不唯一）

（14）2^{4-n}　64　（15）②③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）$f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}+\cos^2\frac{\omega x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1+\cos\omega x}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$

选条件①：根据题意　$T=\pi,\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，　$\omega=2$　，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，　$f(\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

选条件③：因为函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 单调，且 $f(-\frac{\pi}{3})f(\frac{\pi}{6})=-1$，

所以 $\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{2}=\frac{T}{2}$，　$T=\pi,\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，　$\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，　$f(\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}$.　【7 分】

（Ⅱ）据题意 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$，　$-\pi\leqslant 2x\leqslant 0$，　$-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$，

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，　$f(x)$ 的最小值为 -1，

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，　$f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.　【13 分】

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）如图，取 BC_1 的中点 G，连接 NG,AG.

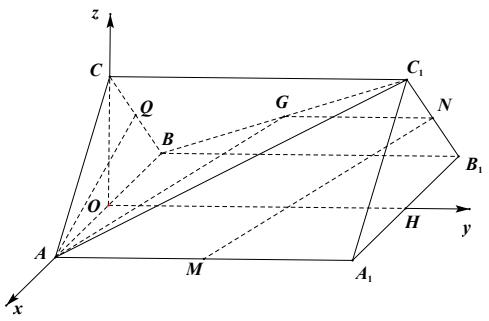
由 N,G 分别为 B_1C_1,BC_1 的中点，

得 $NG\parallel BB_1$，且 $NG=\frac{1}{2}BB_1$.

又因为 $AM\parallel BB_1$，且 $AM=\frac{1}{2}BB_1$，

所以 $AM\parallel GN$，且 $AM=GN$.

故四边形 $AMNG$ 为平行四边形.



所以 $MN \parallel AG$.

又因为 $MN \not\subset$ 平面 ABC_1 ， $AG \subset$ 平面 ABC_1 ，

所以 $MN \parallel$ 平面 ABC_1 . 【4 分】

（Ⅱ）取 AB 中点 O ， A_1B_1 中点 H ，连结 CO, OH .

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 为等边三角形，

则 $OH \parallel BB_1, CO \perp AB$ ，易得 $OH \perp$ 平面 ABC .

所以 $OH \perp AB$ ， $OH \perp OC$.

故 AB, OC, OH 两两互相垂直．不妨设 $AB=2$ ，

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，

则 $O(0,0,0)$ ， $B(-1,0,0)$ ， $A(1,0,0)$ ， $C(0,0,\sqrt{3})$ ， $C_1(0,2\sqrt{6},\sqrt{3})$ ，

因此 $\overrightarrow{BA}=(2,0,0)$ ， $\overrightarrow{BC_1}=(1,2\sqrt{6},\sqrt{3})$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x+2\sqrt{6}y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=-\sqrt{2}$ ，则 $z=4$ ．于是 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{2},4)$.

取 BC 中点 Q ，则易知 $\overrightarrow{AQ}$ 为平面 BB_1C_1 的一个法向量.

平面 BB_1C_1 的一个法向量 $\overrightarrow{AQ}=(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AQ}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

由题义知二面角 $A-BC_1-B_1$ 为钝角，所以其余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. 【10 分】

（Ⅲ）因为 $AB \parallel A_1B_1$ ， $AB \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

所以 $AB \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$.

因为平面 $ABC_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1=l$ ， $AB \subset$ 平面 ABC_1 ，

所以 $AB \parallel l$.

又因为 $\overrightarrow{MN}=(-\frac{3}{2},\sqrt{6},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设直线 l 与直线 MN 所成角为 α，

$$\cos\alpha=|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}>|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{MN}|}=\frac{3}{2\times3}=\frac{1}{2},$$

直线 l 与直线 MN 所成角为 $\frac{\pi}{3}$. 【14 分】

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）表中青年组共有游客 30 名，其中集章个数不少于 4 的人数为 $12+12+2=26$，从中随机抽取 1 名游客，该游客集章个数不少于 4 的概率为 $\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$.

【3 分】

（Ⅱ）根据题中数据，“青年游客集章 4 个”的概率可估计为 $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$；

“青年游客集章 5 个”的概率可估计为 $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$；

“中年游客集章 4 个”的概率可估计为 $\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$；

“中年游客集章 5 个”的概率可估计为 $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$.

所以“恰有 2 人集章 4 个、2 人集章 5 个”的概率可估计为：

$(\frac{2}{5})^2\times(\frac{1}{4})^2+(\frac{2}{5})^2\times(\frac{1}{2})^2+C_2^1(\frac{2}{5})^2\times C_2^1(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})=\frac{13}{100}$. 【11 分】

（Ⅲ）2 【13 分】

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由已知可得 $\begin{cases}a^2+b^2=5\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 【5 分】

（Ⅱ）据题意 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，假设存在平行于 AB 的直线 l，

设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+t$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $x^2+2tx+2t^2-2=0$，

$\Delta = 4t^2 - 4(2t^2 - 2) > 0$，即 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$，

$x_1 + x_2 = -2t, x_1 x_2 = 2t^2 - 2$，

因为以 A, B, N, M 为顶点的四边形为等腰梯形，

所以 $|AM| = |BN|$，即 $|AM|^2 - |BN|^2 = 0$ 成立，

$|AM|^2 = (x_1 + 2)^2 + y_1^2$，$|BN|^2 = x_2^2 + (y_2 - 1)^2$，

$(x_1 + 2)^2 + y_1^2 - x_2^2 - (y_2 - 1)^2 = 0$，

$(x_1 + 2)^2 + (\frac{1}{2}x_1 + t)^2 - x_2^2 - (\frac{1}{2}x_2 + t - 1)^2 = 0$，

整理得 $-\frac{5}{2}tx_1 + \frac{5}{2}tx_2 + (t + 4)x_1 - (t - 1)x_2 + 2t + 3 = 0$.

代入 $x_1 = -2t - x_2$，

得 $3(t - 1)[x_2 + (t - 1)] = 0$，即 $t = 1$ 或 $x_2 = 1 - t$，

当 $x_2 = 1 - t$ 时，$x_1 = -1 - t$，则 $x_1 x_2 = t^2 - 1$，

又因为 $x_1 x_2 = 2t^2 - 2$，解得 $t = \pm 1$.

当 $t = 1$ 时，直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与直线 AB 重合，

不符合题意，舍去；

当 $t = -1$ 时，直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 所得四边形为平行四边形，

不符合题意，舍去；

所以不存在平行于 AB 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点，使得以 A, B, N, M 为顶点的四边形为等腰梯形. 【15 分】

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）根据题意，$f(x) = \ln(2 + x) - \ln(2 - x)$，$x \in (-2, 2)$，

$f'(x) = \frac{1}{2 + x} - \frac{-1}{2 - x} = \frac{4}{4 - x^2}$，$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$，

所以所求切线方程为 $y = x$. 【4 分】

（Ⅱ）（i）$a = 1$ 时，$g(x) = f(x) - \sin x$，

$g'(x) = f'(x) - \cos x = \frac{4}{4 - x^2} - \cos x$，

设 $h(x) = g'(x)$，则 $h'(x) = \frac{8x}{(4 - x^2)^2} + \sin x$，

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时，$\frac{8x}{(4 - x^2)^2} \leqslant 0$，$\sin x \leqslant 0$，所以 $h'(x) \leqslant 0$；

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{8x}{(4-x^2)^2}\geqslant 0$，$\sin x\geqslant 0$，所以 $h'(x)\geqslant 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0]$ 单调递减，在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增.

所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)=h(x)\geqslant h(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增. 【9 分】

（ii）由已知，$g(x)=f(x)-a\sin x$，

$g'(x)=f'(x)-a\cos x=\frac{4}{4-x^2}-a\cos x$

①当 $a\leqslant 1$ 时，$g'(x)=f'(x)-a\cos x=\frac{4}{4-x^2}-a\cos x\geqslant\frac{4}{4-x^2}-\cos x\geqslant 0$

所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，不合题意.

②当 $a>1$ 时，设 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\frac{8x}{(4-x^2)^2}+a\sin x$.

当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0]$ 时，$\frac{8x}{(4-x^2)^2}\leqslant 0, a\sin x\leqslant 0$，所以 $h'(x)\leqslant 0$；

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{8x}{(4-x^2)^2}\geqslant 0, a\sin x\geqslant 0$，所以 $h'(x)\geqslant 0$.

所以 $h(x)=g'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0]$ 单调递减，在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增.

因为 $g'(0)=1-a<0$，$g'(-\frac{\pi}{2})=\frac{4}{4-\frac{\pi^2}{4}}>0$，$g'(\frac{\pi}{2})=\frac{4}{4-\frac{\pi^2}{4}}>0$，

所以存在 $x_1\in(-\frac{\pi}{2},0), x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $g'(x_1)=g'(x_2)=0$.

当 x 变化时，$g'(x), g(x)$ 情况如下：

x	$(-\frac{\pi}{2},x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,\frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上存在唯一的极大值点，符合题意.

综上所述，$a>1$. 【15 分】

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_1=3,a_2=7,a_3=8,a_4=12$，

所以 $S_0=0,S_1=3,S_2=10,S_3=18,S_4=30$，

所以 $a_1\in(S_0,S_1],a_3\in(S_1,S_2]$，所以 $C(a_1)=1,C(a_3)=2$，

所以 $\lambda(a_1)=1-C(a_1)=0,\lambda(a_3)=3-C(a_3)=1$. 【4 分】

（Ⅱ）由已知得 $a_n=2n-1, S_n=n^2$.

设存在正整数 k，使得 $\lambda(a_k)=10$，则 $S_{j-1}<a_k\leqslant S_j, C(a_k)=j$，$\lambda(a_k)=k-C(a_k)=k-j$，

可得 $(j-1)^2<2k-1\leqslant j^2$，$k-j=10$，

所以 $\begin{cases} j^2-4j-18<0 \\ j^2-2j-19\geqslant 0 \end{cases}$，解得 $1+\sqrt{20}\leqslant j<2+\sqrt{22}$.

因为 $j\in\mathbf{N}^*$，所以 $j=6, k=16$.

检验：$a_{16}=31, S_5=25, S_6=36$，

所以 $a_{16}\in(S_5, S_6]$，$C(a_{16})=6, \lambda(a_{16})=16-6=10$，符合题意.

综上所述，存在唯一的 $k=16$ 符合题意. 【9 分】

（Ⅲ）当 $k=1$ 时，$S_0<a_1\leqslant S_1$，$C(a_1)=1$，$\lambda(a_1)=1-1=0$.

当 $k\geqslant 2$ 时，设 $C(a_k)=j_k$，则 $S_{j_{k-1}-1}<a_{k-1}<a_k\leqslant S_{j_k}$

所以 $j_{k-1}-1<j_k, j_k-j_{k-1}>-1$.

因为 $j_{k-1}\in\mathbf{N}^*$，所以 $j_k-j_{k-1}\geqslant 0$

所以 $\lambda(a_k)-\lambda(a_{k-1})=k-C(a_k)-(k-1-C(a_{k-1}))=1-(j_k-j_{k-1})\leqslant 1$.

任取 $m\in\{0,1,2,\cdots,M\}$，设 $\lambda(a_i)$ 是 $\lambda(a_1), \lambda(a_2), \cdots \lambda(a_i)$ 中首次达到或超过 m 的项，

即 $\lambda(a_i)\geqslant m$ 且 $\lambda(a_{i-1})<m$.

因为 $\lambda(a_k)-\lambda(a_{k-1})\leqslant 1$，所以 $\lambda(a_i)\leqslant\lambda(a_{i-1})+1<m+1$，即 $m\leqslant\lambda(a_i)<m+1$，

所以 $\lambda(a_i)=m$. 【15 分】

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）