2026 北京海淀高三二模

数　　学

2026.05

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，若复数 z 对应的点位于第三象限，则复数 $\mathrm{i}\cdot z$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是单位向量，且 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$-\dfrac{1}{2}$

（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（3）函数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}+1}$ 的最小值为

（A）2　　（B）4

（C）3　　（D）6

（4）若直线 l_1：$2x-y+1=0$ 与 l_2：$ax+y+a=0$ 平行，则 l_1 与 l_2 的距离为

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（B）2

（C）3　　（D）6

（5）已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=6$，$a_{2n}=2a_n$，则 $a_{2026}=$

（A）2025　　（B）2026

（C）2048　　（D）4052

（6）已知 $a=\log_3\mathrm{e}$，$b=\log_3 5-\log_3 2$，$c=2\ln\sqrt{3}$，则

（A）$c>a>b$　　（B）$b>c>a$

（C）$a>c>b$　　（D）$c>b>a$

（7）若函数 $f(x)=\sin x+\cos(x+\varphi)$ 的值域为 $[-1,1]$，则 φ 可以为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{2}$

（C）π　　（D）$\frac{4\pi}{3}$

（8）如图 1，在△ABC 中，$AC=BC=2$，$\angle C=90°$，E，F，G 分别为边 AB，BC，AC 的中点. 将△AEG 沿 EG 折起到△$A'EG$，△BEF 沿 EF 折起到△$B'EF$，使得 $A'B'$// 平面 $EFCG$ 且△$A'B'E$ 为等边三角形，如图 2 所示. 则多面体 $A'B'EFCG$ 的体积为

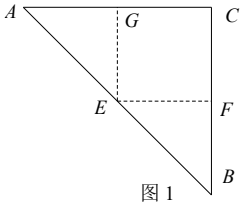


图 1

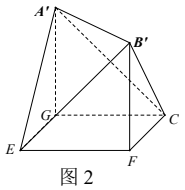


图 2

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{3}$

（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

（9）已知圆 $C:x^2+y^2-2ax+2by=0\ (ab\neq 0)$，　则“$|a|=|b|$”是“圆 C 与直线 $y=x$ 相切”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+t, & x\le 2,\\ -2^x-t, & x>2,\end{cases}$　集合 $M=\{m\mid \exists\, x_1\neq x_2,\ f(x_1)=f(x_2)=m\}$.

若对任意 $m_1,m_2\in M$，都有 $|m_1-m_2|<3$，则 t 的取值范围为

（A）$[-3,+\infty)$　　（B）$[-3,-\frac{3}{2}]$

（C）$[-2,+\infty)$　　（D）$[-2,-\frac{3}{2}]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的渐近线的方程为_____.

（12）在 $(1-x)^5$ 的展开式中，各项系数的最大值为_____.

（13）某环保基金会的生态修复专项账户有资金 2000 万元. 基金会制定了如下使用方案：在第 n 年开始时，若账户中的资金超过 10 万元，则在该年将账户中的一半资金投入使用；若账户中的资金不超过 10 万元，则在该年将账户中的全部资金投入使用，修复项目在该年结束. 按上述使用方案，第 4 年投入使用的资金为_____万元，该修复项目将在第_____年结束.

（14）若锐角 α 满足 $\tan\alpha \leqslant \cos\alpha$，则 $\sin\alpha$ 的一个取值为_____；$\cos 2\alpha$ 的最小值为_____.

（15）在△ ABC 中，$AB=5$，$AC=4$，$BC=3$，D 为边 AB 的中点，P 为边 AB 上的动点. Q 为△ ABC 所在平面内的动点，且 $DQ=\frac{5}{2}$. 给出下列四个结论：

① 对任意的 P，存在 Q 使得 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PQ}<0$；

② 对任意的 Q，存在 P 使得 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PQ}<0$；

③ 存在 P，Q，使得 $|2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}|=2$；

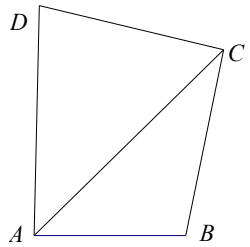
④ 存在 P，Q，使得 $|2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}|=10$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=\pi$，AC 是 $\angle DAB$ 的角平分线.



（Ⅰ）求证：$BC=CD$；

（Ⅱ）若 $AC=14$，$CD=10$. 再从条件 ①、条件 ②、条件 ③这三个条件中选择一个作为已知，使得四边形 $ABCD$ 存在，求四边形 $ABCD$ 的面积.

条件 ①：$\cos B=-\frac{1}{5}$；

条件 ②：$AD-AB=4$；

条件 ③：$\sin\angle CAB=\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

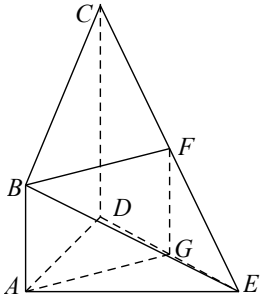
（17）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=1$，$AD=AE=CD=2$，点 G 为 DE 的中点，且平面 ABG 与 CE 交于点 F.

（Ⅰ）求证：$AB=GF$；

（Ⅱ）若平面 $ABFG\perp$ 平面 ADE，四边形 $ABFG$ 为矩形，$AD\perp AE$.

点 H 在线段 CD 上，直线 FH 与平面 BCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求线段 DH 的长.



（18）（本小题 13 分）

某公司利用自动分拣系统对价值500元以下的中、小件包裹进行分拣. 该系统对每件包裹分拣的准确率为99.9%．若一件包裹分拣错误，当包裹价值不超过10元时，该公司的损失费用为包裹价值的150%；当包裹价值超过10元但不超过100元时，该公司的损失费用为包裹价值的60%；当包裹价值超过100元时，该公司的损失费用为包裹价值的75%．

该公司随机抽取10000件包裹，记录并整理这些包裹的价值，获得数据如下表：

价值	(0,10]	(10,100]	(100,300]	(300,500)
件数	4000	4000	1200	800

假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替.

假设不同包裹分拣正确与否相互独立．用频率估计概率.

（Ⅰ）估计一件包裹价值不超过100元的概率；

（Ⅱ）记 X 为一件包裹分拣错误时该公司的损失费用，估计 X 的数学期望；

（Ⅲ）该公司每天平均处理10万件包裹．若使用一项新技术，可以让分拣的准确率增加到99.99%，但每天需额外支付5000元．仅从费用的角度考虑，该公司是否应该使用该项新技术？说明理由.

（19）（本小题 15 分）

椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的下顶点为 $A(0,-1)$，左焦点到 A 的距离为 $\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程及离心率；

（Ⅱ）经过点 A 的直线与椭圆的另一个交点为 D（位于 x 轴上方），与 x 轴的交点为 M．点 D 关于 x 轴的对称点为 E．过点 D 作与 x 轴平行的直线交直线 AE 于点 N．设 $\triangle DEN$ 与 $\triangle AEM$ 的面积分别为 $S_{\triangle DEN}$ 与 $S_{\triangle AEM}$，若 $S_{\triangle DEN}=3S_{\triangle AEM}$，求直线 AD 的斜率.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x+a}{\sin x+2}$，其中 $a\geqslant 0$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(0,0)$ 的切线条数；

（Ⅱ）当 $\frac{\pi}{2}<a\leqslant 2$ 时，求证：对任意 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$f(x)<\frac{2a}{3}$；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f'(x)=1$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上有且仅有1个解，直接写出 a 的最小值.

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 m，如果一个无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：对于任意正整数 k，$a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+m}$ 这 m 项中恰有 a_k 个不同的数，则称 $\{a_n\}$ 为 $m-$ 预言数列.

（Ⅰ）分别写出下列数列是否为 $3-$ 预言数列；

① $a_n = 1$；　　② $b_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{n+3}{2}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

（Ⅱ）是否存在首项为 3 的 $3-$ 预言数列？若存在，求出所有符合条件的数列；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）求 $m-$ 预言数列的个数.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D　（2）B　（3）C　（4）A　（5）D

（6）A　（7）A　（8）C　（9）B　（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$y=\pm x$　（12）10

（13）125　9　（14）$\frac{1}{2}$（答案不唯一）　$\sqrt{5}-2$

（15）①　④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\angle B+\angle D=\pi$，

所以 $\sin B=\sin(\pi-D)=\sin D$.

又 AC 是 $\angle DAB$ 的角平分线，

所以 $\angle DAC=\angle CAB$，所以 $\sin\angle DAC=\sin\angle CAB$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle B}$

在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理 $\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle D}$

所以 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{AC}{\sin\angle D}=\frac{CD}{\sin\angle DAC}$

所以 $BC=CD$

（Ⅱ）选择条件①：$\cos B=-\frac{1}{5}$.

由（Ⅰ），$BC=CD=10$，

在 $\triangle ABC$ 中，

由余弦定理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$

所以 $14^2=AB^2+10^2-2AB\cdot 10\cdot(-\frac{1}{5})$

解得 $AB=8, AB=-12$（舍）

同理，在 $\triangle ACD$ 中，

由 $\cos D=-\cos B=\frac{1}{5}$，可得 $AD=12$，

因为 $\cos B=-\frac{1}{5}$，$B\in(0,\pi)$，

所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ， $\sin D=\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

所以 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin B+\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot\sin D$

所以 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$

所以 $S_{ABCD}=40\sqrt{6}$

选择条件②： $AD-AB=4$.

因为 $\angle DAC=\angle CAB$，

所以 $\cos\angle DAC=\cos\angle CAB$.

在△ACD 和△ABC 中，

在△ACD 中，由余弦定理 ， $\cos\angle DAC=\frac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD\cdot AC}$

在 △ABC 中，由余弦定理， $\cos\angle CAB=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

所以 $\frac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD\cdot AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

解得 $AD=12$，$AD=-8$ （舍）

所以 $AB=8$. $\cos\angle DAC=\frac{5}{7}$，

因为 $\angle DAC\in(0,\pi)$，

所以 $\sin\angle DAC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

所以 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin B+\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot\sin D$

所以 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$

所以 $S_{ABCD}=40\sqrt{6}$

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB\parallel CD$，$AB\not\subset$ 平面 CDE， $CD\subset$ 平面 CDE，

所以 $AB\parallel$ 平面 CDE.

因为 平面 $ABG\cap$ 平面 $CDE=FG$，

所以 $AB\parallel FG$，

所以 $CD\parallel FG$，

在△CDE 中，因为点 G 为 DE 的中点，

所以点 F 为 CE 的中点.

所以 $FG=\frac{1}{2}CD=1$，

所以 $AB=FG$.

（Ⅱ）因为 平面 $ABFG\perp$ 平面 ADE， 平面 $ABFG\cap$ 平面 $ADE=AG$，

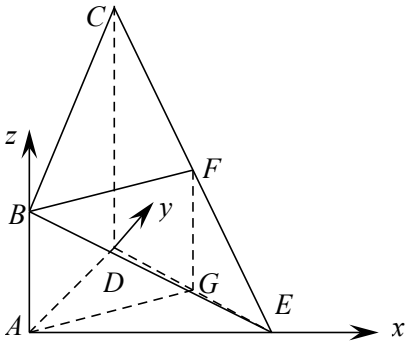
$AB\perp AG$， $AB\subset$ 平面 $ABFG$，

所以 $AB\perp$ 平面 ADE.

所以 $AB\perp AD, AB\perp AE$.

又 $AD\perp AE$，

如图，以点 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



所以 $A(0,0,0)$， $B(0,0,1)$， $C(0,2,2)$， $E(2,0,0)$， $F(1,1,1)$，

设 $H(0,2,h)(0\leqslant h\leqslant 2)$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{BE}=(2,0,-1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BCE 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y+z=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1, z=2$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$.

因为 $\overrightarrow{FH}=(-1,1,h-1)$，

所以 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{FH},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{FH}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{FH}||\boldsymbol{n}|}=\left|\frac{2h-4}{\sqrt{6}\times\sqrt{h^2-2h+3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解得 $h_1=1$， $h_2=5$（舍）.

所以 $DH=1$.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）包裹价值不超过100元的概率可以估计为 $P=\frac{4000+4000}{10000}=\frac{4}{5}$；

（Ⅱ）由题设， X 的所有可能值为7.5，33，150，300（单位：元）

$P(X=7.5)=\frac{4000}{10000}=\frac{2}{5}$ $P(X=33)=\frac{4000}{10000}=\frac{2}{5}$

$P(X=150)=\frac{1200}{10000}=\frac{3}{25}$ $P(X=300)=\frac{800}{10000}=\frac{2}{25}$

X	7.5	33	150	300
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$

$E(X)=7.5\times\frac{2}{5}+33\times\frac{2}{5}+150\times\frac{3}{25}+300\times\frac{2}{25}=58.2$（元）

（Ⅲ）建议使用新技术.

理由：$58.2\times0.09\%\times100000-5000=238>0$，所以建议使用新技术.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$\begin{cases}b=1,\\ a^2=b^2+c^2=3.\end{cases}$

解得 $a=\sqrt{3},c=\sqrt{2}$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，离心率为 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）设直线 AD 的方程为 $y=kx-1$，

令 $y=0$，得 $x_M=\frac{1}{k}$

所以 $M(\frac{1}{k},0)$

由 $\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2-6kx=0$，

所以 $x_D=\frac{6k}{1+3k^2}$，所以 $y_D=\frac{3k^2-1}{1+3k^2}$，

所以 $D(\frac{6k}{1+3k^2},\frac{3k^2-1}{1+3k^2})$，

所以 $E(\frac{6k}{1+3k^2},\frac{1-3k^2}{1+3k^2})$.

因为 $k_{AE}=\frac{\frac{1-3k^2}{1+3k^2}+1}{\frac{6k}{1+3k^2}}=\frac{1}{3k}$

所以直线 AE 的方程为 $y+1=\frac{1}{3k}x$

令 $y=\frac{3k^2-1}{1+3k^2}$，得 $x_N=\frac{18k^3}{1+3k^2}$

所以 $|DN|=|\frac{6k(3k^2-1)}{1+3k^2}|$

因为 $S_{\triangle DEN}=\frac{1}{2}|DE|\cdot|DN|$

$$S_{\triangle AEM}=S_{\triangle AED}-S_{\triangle DEM}=\frac{1}{2}|DE|(|x_D|-|x_D-x_M|)$$

因为 $\frac{6k}{1+3k^2}$ 与 $\frac{1}{k}$ 符号相同，

所以 $S_{\triangle AEM}=S_{\triangle AED}-S_{\triangle DEM}=\frac{1}{2}|DE||x_M|$

所以 $|DN|=3|x_M|$

所以 $|\frac{6k(3k^2-1)}{1+3k^2}|=\frac{3}{|k|}$

解得 $k=\pm 1$.

法二：

设点 $D(x_0,y_0)$ ， $\frac{{x_0}^2}{3}+{y_0}^2=1$，

所以 $E(x_0,-y_0)$.

所以 $k_{AD}=\frac{y_0+1}{x_0}$.

所以 AD 的方程为 $y+1=\frac{y_0+1}{x_0}x$

所以 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$，所以 $M(\frac{x_0}{y_0+1},0)$

因为 $k_{AE}=\frac{-y_0+1}{x_0}$

所以直线 AE 的方程为 $y+1=\frac{-y_0+1}{x_0}x$.

令 $y=y_0$，得 $x_N=\frac{x_0(y_0+1)}{1-y_0}$

所以 $|DN|=|\frac{2x_0y_0}{1-y_0}|$

因为 $S_{\triangle DEN}=\frac{1}{2}|DE|\cdot|DN|$

$$S_{\triangle AEM}=S_{\triangle AED}-S_{\triangle DEM}=\frac{1}{2}|DE|(|x_D|-|x_D-x_M|)$$

因为 $\frac{x_0}{y_0+1}$ 与 x_0 符号相同，

所以 $S_{\triangle AEM}=S_{\triangle AED}-S_{\triangle DEM}=\frac{1}{2}|DE||x_M|$

所以 $|DN|=3|x_M|$

所以 $|\frac{2x_0y_0}{1-y_0}|=3|\frac{x_0}{y_0+1}|$

解得 $y_0=\frac{1}{2}, y_0=-3$（舍）.

所以 $k=\pm 1$.

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{\sin x+2}$，$f'(x)=\dfrac{\sin x+2-x\cos x}{(\sin x+2)^2}$，

设 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线经过 $(0,0)$.

因为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

代入 $(0,0)$ 得到，$-\dfrac{x_0}{\sin x_0+2}=\dfrac{\sin x_0+2-x_0\cos x_0}{(\sin x_0+2)^2}(-x_0)$

所以 $x_0\ \cos x_0=0$，

所以 $x_0=0$ 或 $x_0=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, x_0=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},$

当 $x_0=0$ 时，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，

当 $x_0=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(2k\pi-\dfrac{\pi}{2})=1$，

当 $x_0=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{3}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(0,0)$ 处的切线有 3 条.

（Ⅱ）因为 $f(x)=\dfrac{x+a}{\sin x+2}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{\sin x+2-(x+a)\cos x}{(\sin x+2)^2}$.

令 $g(x)=\sin x+2-(x+a)\cos x$，

所以 $g'(x)=(x+a)\sin x$.

因为 $x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，$\dfrac{\pi}{2}<a\leqslant 2$，

所以 $x+a>0$.

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=0$.

所以 $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$[-\dfrac{\pi}{2},0)$	0	$(0,\dfrac{\pi}{2}]$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

因为 $g(0)=2-a\geqslant 0$，

所以 $g(x)\geqslant 0$，即 $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 成立，

所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

所以 $f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{\frac{\pi}{2}+a}{3}<\frac{a+a}{3}=\frac{2a}{3}$

（Ⅲ）a 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$.

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$\{a_n\}$ 是 $3-$ 预言数列，$\{b_n\}$ 不是 $3-$ 预言数列.

（Ⅱ）不存在，证明如下：

由题可知 $a_{k+1}-a_k\in\{-1,0,1\}$ 且 $a_k\in\{1,2,3\}$（$k=1,2,\cdots$）

假设存在，则 $a_1=3$，所以 $\{a_2,a_3,a_4\}=\{1,2,3\}$

（1）若 $a_2=1$，由题可知 $a_3=a_4$，矛盾；

（2）若 $a_2=2$，由题可知 $\{a_3,a_4\}=\{1,3\}$ 矛盾；

（3）若 $a_2=3$，由题可知 $\{a_3,a_4\}=\{1,2\}$，且 $a_5=3$，又因为 $a_5-a_4\in\{-1,0,1\}$，

所以 $a_4=2,a_3=1$，$\{a_4,a_5\}=\{2,3\}$ 与 $a_3=1$ 矛盾；

综上不存在首项为 3 的 $3-$ 预言数列.

（Ⅲ）当 $m=1$ 时，$a_n=1$，此时 $m-$ 预言数列的个数为 1；

当 $m\geqslant 2$ 时，$m-$ 预言数列的个数为 $m+2$.

证明如下：

（1）同（Ⅱ）可得 $a_{k+1}-a_k\in\{-1,0,1\}$ 且 $a_k\in\{1,2,\cdots,m\}$（$k=1,2,\cdots$），

所以若数列中某一项为 1，则后续 m 项只可能均为 1 或者均为 2.

（2）设 $\{a_n\}$ 中的最大项为 t，证明 $t\leqslant 2$.

假设 $t\geqslant 3$，则存在 $a_k=t$，

由题可知 $a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_{k+m}$ 中恰有 $1,2,\cdots,t$ 这 t 个不同的数，

所以其中存在 $a_i=t$（若有多个，则取最后一个），

存在 $a_j=1$（若有多个，则取最前一个）.

若 $j<i$，则 $a_{j+1}=a_{j+2}=\cdots=a_{j+m}=a_i=t$，$a_{i+1}-a_i=t-1\notin\{-1,0,1\}$，矛盾;

若 $j>i$，则 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+m}$ 中恰有 $1,2,\cdots,t$ 这 t 个不同的数，

又因为 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_j$ 中没有 t，且 $a_j=1$，其后续 m 项也没有 t 矛盾.

由上可知 $t\leqslant 2$.

（3）由（2）若$t=1$，则$a_n=1$，符合；

若$t=2$，设$a_k=2$，则其后续m项可取到1和2，

且其中第一个1的后续m项只能为2，

否则其前一项（取2）对应后续后续$m+1$项只能取1，矛盾，

所以若 $a_k=2$，则其后续m项只能有1个1， $m-1$个2，

共有m种不同的取法，考虑到数列首项还可能是1，

所以当数列中最大项为2时，共有$m+1$个$m-$预言数列

综上，当$m\geqslant 2$时， $m-$预言数列的个数为$m+2$.