2026 北京昌平高三二模

数　　学

本试卷共 5 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid 0\le x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-2,-1,2\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{x\mid 0\le x<2\}$　　D. $\{x\mid x<0$ 或 $x\ge 2\}$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为（　　）

A. $(2,-1)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(-1,-2)$

3. 在 $(2-x)^n$ 的展开式中，所有二项式系数的和为 32，则 x^3 的系数为（　　）

A. -80　　B. -40

C. 40　　D. 80

4. 设 $-1<x<0<y<1$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\log_2|x|-\log_2|y|<0$　　B. $(\dfrac{1}{2})^x-(\dfrac{1}{2})^y<0$

C. $x^2-y^2<0$　　D. $\sin x-\sin y<0$

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$，则 $f(x)$ 是（）

A. 偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数　　B. 奇函数，且在 R 上是增函数

C. 偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数　　D. 奇函数，且在 R 上是减函数

6. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$（$\omega$ 是常数，$\omega>0$），若 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 上单调递减，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$

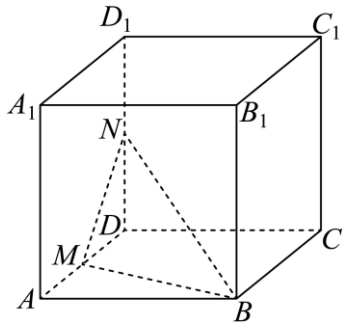
C. $\left(0,\frac{4}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

7. 已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过点F的直线l与抛物线C交于不同的两点A,B，且与准线交于点D. 若点B为线段AD的中点，$|BF|=2$，则p的值为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. 2

C. $\frac{8}{3}$　　D. 4

8. 如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M,N分别是棱AD,DD_1的中点，点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面上运动，且$AP//$平面BMN. 则线段CP的最小值为（　　）



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

9. 设$a\in\mathrm{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}ax^2-2x+1,x\le a\\ax+1,x>a\end{cases}$有最大值的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$　　B. $a\in[-\frac{1}{2},0]$

C. $a\in[-1,0)$　　D. $a\in[-2,0)$

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{4a_n-2}{a_n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，则（　　）

A. 当$\{a_n\}$为常数列时，$a_1=1$

B. 对于任意$a_1>0$，$\{a_n\}$为递减数列

C. 当$1<a_1<2$时，$\{a_n\}$为递增数列，且对于任意正整数n，$a_n<2$成立

D. 当$a_1=3$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在正整数n，使得$a_n<2$成立

第二部分 非选择题 共（110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 双曲线$2x^2-y^2=4$的实轴长为_____.

12. 在平面直角坐标系xOy中，角α与角β均以Ox为始边，它们的终边关于y轴对称，若$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，则$\tan\beta$的最大值为_____.

13. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，且$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的大小为_____；$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{a}\rangle=$_____.

14. 已知圆$C:x^2+y^2-4x-6y+11=0$，则圆C的半径为_____；若直线$l:y=kx+2$上存在点P，使得过点P向圆引的两条切线互相垂直，则k的取值范围为_____.

15. 设函数$f(x)=|e^x-1|-mx-m-\frac{1}{2}$，给出下列四个结论：

①当$m=0$时，$f(x)$恰有 2 个零点；

②存在正数m，使得$f(x)$恰有 1 个零点；

③存在负数m，使得$f(x)$恰有 2 个零点；

④存在负数m，使得$f(x)$恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在△ABC中，$\frac{2b-\sqrt{3}c}{\sqrt{3}a}=\frac{\cos C}{\cos A}$.

（1）求$\angle A$；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得△ABC存在且唯一确定，求a的值.

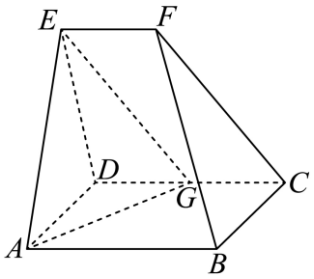
条件①：△ABC的面积为$3\sqrt{3}$，$\frac{b}{c}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

条件②：$b=3\sqrt{3}$，$\sin C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$；

条件③：AB 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\cos C=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，G 为 CD 的中点，$EF=1$，$AE=DE=\sqrt{5}$.



（1）求证：CF // 平面 AEG；

（2）求平面 AEG 与平面 AED 夹角的余弦值.

18. 为了培养学生的 AI 应用能力和创新思维，提高学生的科学素养，某学校开展了人工智能课程.为了解该校学生对相关人工智能课程的兴趣程度，对学生进行了简单随机抽样，获得数据如下表：

	非常感兴趣	一般感兴趣	不感兴趣	合计
小学	20 人	40 人	40 人	100 人
初中	50 人	30 人	20 人	100 人
合计	70 人	70 人	60 人	200 人

假设小学生和初中生每人对人工智能课程的兴趣程度互不影响. 用频率估计概率.

（1）从该校初中生中随机抽取 3 名同学，估计这 3 名同学中至少有两名同学对课程都“非常感兴趣”的概率；

（2）规定：每名“非常感兴趣”的学生记 5 分，每名“一般感兴趣”的学生记 3 分，每名“不感兴趣”的学生记 1 分. 根据学生的兴趣程度采用分层抽样的方式，按照学生人数比例先从样本中的小学生中抽取了 10 人，再从这 10 人中随机抽取 2 人．记 X 为这 2 人的得分之和，求 X 的分布列和数学期望；

（3）记样本中的小学生中“非常感兴趣”、“一般感兴趣”、“不感兴趣”的频率依次为 x_1,x_2,x_3，其方差为 s_1^2；样本中的初中生中“非常感兴趣”、“一般感兴趣”、“不感兴趣”的频率依次为 y_1,y_2,y_3，其方差为 s_2^2；x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 的方差为 s_3^2．写出 s_1^2,s_2^2,s_3^2 的大小关系．结论不要求证明.

19. 设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$的左焦点为$F$，右顶点为$A$，上顶点为$B$，直线$FB$与$AB$的斜率的乘积为$-\dfrac{3}{2}$.

（1）求椭圆C的方程及离心率；

（2）过点$P(1,0)$的直线l交椭圆C于M,N两点，求$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$的取值范围.

20. 已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x^2-ax$，$a\in\mathrm{R}$.

（1）若曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线与直线$x+2y-1=0$垂直，求$a$的值；

（2）若$f\left(x\right)$在R上单调递增，求a的取值范围；

（3）若$f(x)$有两个不同的极值点x_1,x_2，求证：$\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>4$.

21. 对于非空集合A,B，定义变换$\varphi(A,B)=\{a+b\mid\forall a\in A,b\in B\}$，$A,B,\varphi(A,B)$中元素的个数分别记为$\mathrm{card}(A)$，$\mathrm{card}(B)$，$\mathrm{card}(\varphi(A,B))$.

（1）设集合$A=\{-1,1,3\},B=\{1,2,4\}$，直接写出$\mathrm{card}(\varphi(A,A))$，$\mathrm{card}(\varphi(B,B))$，$\mathrm{card}(\varphi(A,B))$的值；

（2）设集合$A_n=\{2^i\mid i=0,1,2,\cdots,n-1\}(n\in\mathrm{N}^*)$，$\varphi(A_n,A_n)$中所有元素的和记为$a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）设集合A与B同时满足下列两个性质：

①$A,B,\varphi(A,B)\subseteq\{x\in\mathbf{N}\mid x\le2026\}$，且$A\bigcap B=\varnothing$；

②$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)=m$且$\mathrm{card}(\varphi(A,B))=2m-1$，其中$m\in\mathrm{N}^*$.

求m的最大值.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）A　（3）B　（4）D　（5）D

（6）B　（7）C　（8）A　（9）A　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$2\sqrt{2}$　（12）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　（13）$\frac{3\pi}{4}$　$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

（14）$\sqrt{2}$　$[-\frac{3}{4},+\infty)$　（15）①③④

（第（13）、（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；第（15）题答对一个给 3 分，答对二个给 4 分，答对三个给 5 分，错答得 0 分。）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 及 $\frac{2b-\sqrt{3}c}{\sqrt{3}a}=\frac{\cos C}{\cos A}$，　……1 分

得 $\frac{2\sin B-\sqrt{3}\sin C}{\sqrt{3}\sin A}=\frac{\cos C}{\cos A}$.　……2 分

整理得 $2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C$　……3 分

$=\sqrt{3}\sin(A+C)$

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin(A+C)=\sin B$.

所以 $2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin B$.　……4 分

因为在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B\neq 0$，

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　……5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.　……6 分

（Ⅱ）选条件①：$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，$\frac{b}{c}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

由（Ⅰ）知 $A=\frac{\pi}{6}$，又由题知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$，　……7 分

所以 $bc=12\sqrt{3}$.　……8 分

因为 $\frac{b}{c}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

所以 $b=3\sqrt{3}$， $c=4$. ……10 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=27+16-2\times3\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$， ……12 分

所以 $a=\sqrt{7}$. ……13 分

选条件③：AB 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$， $\cos C=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

因为 $\cos C=\frac{\sqrt{21}}{7}$， $C\in(0,\pi)$，

所以 $\sin C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ……8 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$. ……11 分

因为 AB 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $a\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……12 分

所以 $a=\sqrt{7}$. ……13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在五面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AB\parallel CD$. ……1 分

因为 $CD\not\subset$ 平面 $ABFE$， $AB\subset$ 平面 $ABFE$，

所以 $CD\parallel$ 平面 $ABFE$. ……2 分

因为 $CD\subset$ 平面 $CDEF$，平面 $ABFE\cap$ 平面 $CDEF=EF$，

所以 $CD\parallel EF$. ……3 分

因为 G 为 CD 中点， $CD=2$，

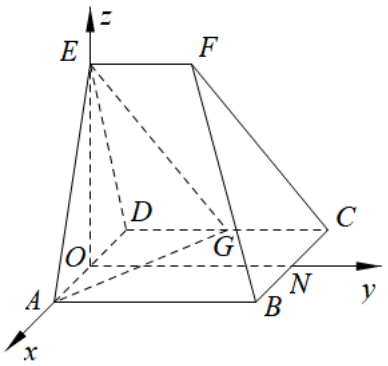
所以 $CG=EF=1$.

所以四边形 $EFCG$ 是平行四边形.

所以 $EG\parallel CF$. ……4 分

因为 $CF\not\subset$ 平面 AEG， $EG\subset$ 平面 AEG，

所以 $CF\parallel$ 平面 AEG. ……5 分



（Ⅱ）取 AD 的中点 O，作 $ON\parallel AB$， $ON\cap BC=N$.

因为 $ABCD$ 为正方形，

所以 $ON\perp AD$.

因为 $AE=DE$，

所以 $OE\perp AD$.

因为 $AE=\sqrt{5}$， $OA=1$，

所以 $OE=2$. ……7 分

因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$， $OE\subset$ 平面 ADE，

所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$. ……8 分

所以 $OE\perp ON$.即 OE,ON,OA 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，则

$O(0,0,0),A(1,0,0),G(-1,1,0),E(0,0,2),N(0,2,0)$.

因此 $\overrightarrow{AG}=(-2,1,0),\overrightarrow{AE}=(-1,0,2)$ ，平面 ADE 的法向量 $\overrightarrow{ON}=(0,2,0)$. ……10 分

设平面 AEG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$. 则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}-2x+y=0,\\ -x+2z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$ ，则 $x=2$ ， $y=4$. 于是 $\boldsymbol{n}=(2,4,1)$. ……11 分

设平面 AEG 与平面 AED 夹角为 θ ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{ON}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ON}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{ON}|}=\frac{8}{2\times\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$ ……13 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）根据题中数据可知，100 名初中生中有 50 名学生“非常感兴趣”， ……1 分

所以从该校初中生中随机抽取1名同学对课程“非常感兴趣”的概率估计为 $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$.

……2 分

设这3名同学中至少有两名同学对课程都“非常感兴趣”为事件 A ，则事件 A 的概率可估计为

$C_3^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$. ……5 分

（Ⅱ）根据学生的兴趣程度采用分层抽样的方式，从样本中的小学生中抽取了10人，则“非常感兴趣”、“一般感兴趣”、“不感兴趣”的人数分别为2,4,4 . ……6 分

所以 X 的可能取值为 $2,4,6,8,10$. ……7 分

则 $P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$；$P(X=4)=\frac{C_4^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$；

$P(X=6)=\frac{C_4^2+C_2^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{14}{45}$；$P(X=8)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{45}$；

$P(X=10)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$. ……9 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	2	4	6	8	10
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

故期望 $E(X)=2\times\frac{2}{15}+4\times\frac{16}{45}+6\times\frac{14}{45}+8\times\frac{8}{45}+10\times\frac{1}{45}=\frac{26}{5}$. …11 分

（Ⅲ） $s_1^2<s_3^2<s_2^2$. ……14 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意可得右顶点 $A(a,0)$，上顶点 $B(0,\sqrt{3})$，设左焦点 $F(-c,0)$.

因为 $k_{FB}\cdot k_{AB}=-\frac{3}{2}$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{c}\times\frac{\sqrt{3}}{-a}=-\frac{3}{2}$，即 $ac=2$. ……2 分

因为 $a^2=b^2+c^2$，

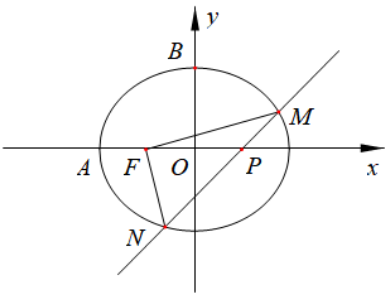
所以 $a=2$，$c=1$.

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率为 $\frac{1}{2}$. ……6 分

（Ⅱ）由题可知 $F(-1,0)$.

当直线 l 斜率不存在时，$M(1,-\frac{3}{2}),N(1,\frac{3}{2})$，

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(2,-\frac{3}{2})\cdot(2,\frac{3}{2})=\frac{7}{4}$. ……7 分



当直线 l 斜率存在时，设斜率为 k，

则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$. ……8 分

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 可得

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

$\Delta=(-8k^2)^2-4(3+4k^2)(4k^2-12)=144(k^2+1)>0$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$. 则

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. ……10 分

因为 $\overrightarrow{FM}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{FN}=(x_2+1,y_2)$， ……11 分

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(x_1+1,y_1)\cdot(x_2+1,y_2)$

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2+1$

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+k^2(x_1-1)(x_2-1)+1$

$=(k^2+1)x_1x_2+(1-k^2)(x_1+x_2)+k^2+1$

$=(k^2+1)\times\frac{4k^2-12}{3+4k^2}+(1-k^2)\times\frac{8k^2}{3+4k^2}+k^2+1$ ……12 分

$$=\frac{7k^2-9}{4k^2+3}$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{\frac{57}{4}}{4k^2+3}.$$ ……13 分

因为 $k^2\geq 0$，所以 $0<\frac{1}{4k^2+3}\leq\frac{1}{3}$.

所以 $-3\leq\frac{7}{4}-\frac{\frac{57}{4}}{4k^2+3}<\frac{7}{4}$. ……14 分

综上所述，$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$ 的取值范围为 $[-3,\frac{7}{4}]$. ……15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2-ax$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2x-a$. ……1 分

所以 $f'(0)=1-a$. ……2 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，

所以 $1-a=2$. ……3 分

所以 $a=-1$. ……4 分

（Ⅱ）$f'(x)=\mathrm{e}^x-2x-a$.

因为函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，

所以 $f'(x)\geq 0$ 在 **R** 上恒成立.

即 $a\leq\mathrm{e}^x-2x$ 在 **R** 上恒成立. ……5 分

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-2x$.

则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2$. ……6 分

令 $\mathrm{e}^x-2=0$，解得 $x=\ln 2$.

当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. ……7 分

$g(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$.

所以 $g(x)$ 的最小值为 $2-2\ln 2$. ……8 分

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,2-2\ln 2]$. ……9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知当 $a\in(2-2\ln 2,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

所以 x_1,x_2 是方程 $\mathrm{e}^x-2x-a=0$ 的两个解. 即

$\mathrm{e}^{x_1}-2x_1-a=0$，$\mathrm{e}^{x_2}-2x_2-a=0$. ……10 分

所以 $\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}=2(x_2-x_1)$.

设 $t=x_2-x_1>0$，则 $x_2=x_1+t$.

所以 $\mathrm{e}^{x_1+t}-\mathrm{e}^{x_1}=2t$，即 $\mathrm{e}^{x_1}(\mathrm{e}^t-1)=2t$.

所以 $\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{2t}{\mathrm{e}^t-1}$. ……11 分

所以 $\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{x_1+t}=\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^t=\dfrac{2t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}$.

所以 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}=\dfrac{2t}{\mathrm{e}^t-1}+\dfrac{2t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}=\dfrac{2t(\mathrm{e}^t+1)}{\mathrm{e}^t-1}$. ……12 分

所以要证 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>4$，只需证：对任意 $t>0$，$\dfrac{t(\mathrm{e}^t+1)}{\mathrm{e}^t-1}>2$.

设 $h(t)=t(\mathrm{e}^t+1)-2(\mathrm{e}^t-1)$，

则 $h'(t)=\mathrm{e}^t(t-1)+1$，$h''(t)=t\mathrm{e}^t$.

因为当 $t>0$ 时，$h''(t)>0$，

所以 $h'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……13 分

因为 $h'(0)=\mathrm{e}^0(0-1)+1=0$，

所以 $h'(t)>h'(0)=0$.

所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……14 分

所以 $h(t)>h(0)=0(1+1)-2(1-1)=0$.

所以 $t(\mathrm{e}^t+1)-2(\mathrm{e}^t-1)>0$.

即 $\dfrac{t(\mathrm{e}^t+1)}{\mathrm{e}^t-1}>2$ 成立.

所以 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>4$. ……15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$\mathrm{card}(\varphi(A,A))=5$；$\mathrm{card}(\varphi(B,B))=6$；$\mathrm{card}(\varphi(A,B))=7$. ……3 分

（Ⅱ）由 $A_n=\{2^i\mid i=0,1,2,\cdots,n-1\}(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $\varphi(A_n,A_n)=\{2^i+2^j\mid i,j=0,1,2,\cdots,n-1\}$.

$\forall i,j,i',j'\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，

若 $2^i+2^j=2^{i'}+2^{j'}$，则 $2^i-2^{i'}=2^{j'}-2^j$.

①当 $i=i'$ 时，$j=j'$；同理，当 $j=j'$ 时，$i=i'$. 即 $i=i'$ 与 $j=j'$ 同时成立.

②当 $i=i'$ 与 $j=j'$ 都不成立时，必有 $\begin{cases}i>i',\\ j'>j.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}i<i',\\ j'<j.\end{cases}$ 两者之一成立.

不妨设 $\begin{cases}i>i',\\ j'>j.\end{cases}$ 则 $2^{i'}(2^{i-i'}-1)=2^j(2^{j'-j}-1)$.

所以 $i'=j$ 且 $i-i'=j'-j$.

所以 $i'=j$ 且 $i=j'$.

所以 $\varphi(A_n,A_n)=\{2^i+2^j\mid 0\le i\le j\le n-1,i,j\in\mathbf{N}\}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以所求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n=\sum\limits_{0\le i\le j\le n-1}(2^i+2^j)=(n+1)(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=(n+1)(2^n-1),n\in\mathbf{N}^*$. ……9 分

（Ⅲ）设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，$b_1<b_2<\cdots<b_m$，

则 $\varphi(A,B)=\{a_i+b_j\mid\forall i,j=1,2,3,\cdots,m\}$.

所以 $a_1+b_1<a_2+b_1<a_3+b_1<\cdots<a_m+b_1<a_m+b_2<a_m+b_3<\cdots<a_m+b_m$. ①

$a_1+b_1<a_1+b_2<a_2+b_2<\cdots<a_{m-1}+b_2<a_m+b_2<a_m+b_3<\cdots<a_m+b_m$. ②

式①与式②中均有 $2m-1$ 个不同的数，这些数都是集合 $\varphi(A,B)$ 中的元素.

因为 $\text{card}(\varphi(A,B))=2m-1$，所以 $\varphi(A,B)$ 中有且仅有 $2m-1$ 个不同元素.

所以式①与式②中的数对应相等，即 $a_{k+1}+b_1=a_k+b_2,\forall k=1,2,3,\cdots,m-1$.

所以 $a_{k+1}-a_k=b_2-b_1,\forall k=1,2,3,\cdots,m-1$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d=b_2-b_1$，项数为 m 的等差数列.

同理，数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $d=a_2-a_1$，项数为 m 的等差数列.

所以数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个公差相等（公差 $d\neq 0$），项数为 m 的等差数列.

设 $a_i=a_1+(i-1)d, i=1,2,3,\cdots,m$，$b_j=b_1+(j-1)d, j=1,2,3,\cdots,m$，其中 $d\neq 0$.

则 $a_i+b_j=(a_1+b_1)+(i+j-2)d, \forall i,j=1,2,3,\cdots,m$，

则 $\varphi(A,B)=\{(a_1+b_1)+(k-1)d \mid k=1,2,3,\cdots,2m-1\}$，且 $\text{card}(\varphi(A,B))=2m-1$.

因为 $A,B,\varphi(A,B)\subseteq\{x\in\mathbf{N}\mid x\leq 2026\}$，所以 $d\in\mathbf{N}^*$.

①当 $d=1$ 时，设 $A=\{a_1+(i-1)\mid i=1,2,3,\cdots,m\}$，$B=\{b_1+(j-1)\mid j=1,2,3,\cdots,m\}$，

$\varphi(A,B)=\{a_1+b_1+(k-1)\mid k=1,2,3,\cdots,2m-1\}$.

所以 $0\leq a_1,b_1,a_m,b_m\leq 2026$，$0\leq a_1+b_1+(2m-2)\leq 2026$，且 $a_1\geq b_1+m$ 或 $b_1\geq a_1+m$.

所以 $3m-2\leq 2026$，解得 $m\leq 676$.

当 $m=676$ 时，$A=\{0,1,2,\cdots,675\}$，$B=\{676,677,\cdots,1351\}$，$\varphi(A,B)=\{676,677,\cdots,2026\}$.

经检验符合题意.

②当 $d\geq 2$ 时，因为 $A,B,\varphi(A,B)\subseteq\{x\in\mathbf{N}\mid x\leq 2026\}$，

所以 $0\leq a_1,b_1\leq 2026$，$0\leq a_1+b_1+(2m-2)d\leq 2026$.

所以 $m\leq\dfrac{1013}{d}+1\leq\dfrac{1015}{2}<676$.

综上，m 的最大值为 676.　　……15 分