2026 北京房山高三二模

数　　学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}|x<3\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x<0\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$\{x|0<x<3\}$　　（B）$\{1,2\}$

（C）$\{x|0\leqslant x<3\}$　　（D）$\{0,1,2\}$

（2）已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\cdot z=2\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$

（A）$1+\mathrm{i}$　　（B）$1-\mathrm{i}$

（C）$-1+\mathrm{i}$　　（D）$-1-\mathrm{i}$

（3）在 $(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^{-1} 的系数为

（A）-40　　（B）40

（C）-80　　（D）80

（4）下列函数中，既是奇函数又在定义域上单调递增的是

（A）$f(x)=\tan x$　　（B）$f(x)=x^3+1$

（C）$f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$　　（D）$f(x)=x+\frac{1}{x}$

（5）宁夏青铜峡一百零八塔，始建于西夏．塔群依山而建，共12行，总数恰为108座，自上而下每行的塔数构成数列 $\{a_n\}$．已知 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4=12$，从第 5 项到第12项构成等差数列，$a_{12}=19$，则 $a_5=$

（A）3　　（B）5

（C）7　　（D）9

（6）已知 $M(-\sqrt{2},0)$，$N(\sqrt{2},0)$，点 P 满足 $|PM|-|PN|=2$，O 为坐标原点，则直线 PO 的斜率的取值范围是

（A）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　（B）$(-1,1)$

（C）$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　（D）$[-1,1]$

（7）在 $\triangle ABC$ 中，“$\sin A>\sin C$”是“$\cos A<\cos C$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）设点 $A(t,\sqrt{3})$，若在圆 $O:x^2+y^2=3$ 上存在点 B，使得 $\angle OAB=\frac{\pi}{3}$，则 t 的最大值为

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$

（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

（9）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\geqslant 0,\\ kx, & x<0.\end{cases}$ 若存在非零实数 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立，则实数 k 的取值范围是

（A）$[-1,+\infty)$　　（B）$[-1,0)$

（C）$(-1,+\infty)$　　（D）$(-1,0)$

（10）设 $a,b\in\mathbf{R}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=a_n^2+b$，$n\in\mathbf{N}^*$，则

（A）当 $b=\frac{1}{2}$ 时，$a_8>8$　　（B）当 $b=\frac{1}{4}$ 时，$a_8>8$

（C）当 $b=-1$ 时，$a_8>8$　　（D）当 $b=-12$ 时，$a_8>8$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为____.

（12）在 $\triangle ABC$ 中，$\sin 2C=\sin C$，则 $C=$_____；若 $b=1$，$\angle A$ 为钝角，则边 c 的一个取值为____.

（13）我国古代圆柱形粮仓设计精巧，充分体现了古人的工程智慧．某仿古粮仓设计要求圆柱底面直径与高之和为 12，若不计壁厚，则该粮仓容积的最大值为____.

（14）已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$．若点 M 为 CD 中点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}=$____；

若点 N 满足 $\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD}$（$0\leqslant t\leqslant 1$），则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是____.

（15）设集合 $A=\{m\mid\exists x<4,(x-2m)(x-m^2)<0\}$，$B=\{m\mid\forall x<4,(x-2m)(x-m^2)<0\}$，

给出下列四个结论：

① $0\in A$ 且 $0\in B$；

② $1\in A$ 且 $1\notin B$；

③ 若 $m<0$，则 $m\in A$ 且 $m\notin B$；

④ 若 $m\notin A$ 且 $m\notin B$，则 $m\geqslant 2$.

其中正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+a\cos\omega x$ $(\omega>0,a>0)$.

（Ⅰ）若 $f(0)=1$，求 a 的值；

（II）从条件①、条件②、条件③中选择两个作为已知，使得函数 $f(x)$ 存在，求 $f(x)$ 的单调递增区间.

条件①：函数 $f(x)$ 的最大值为1；

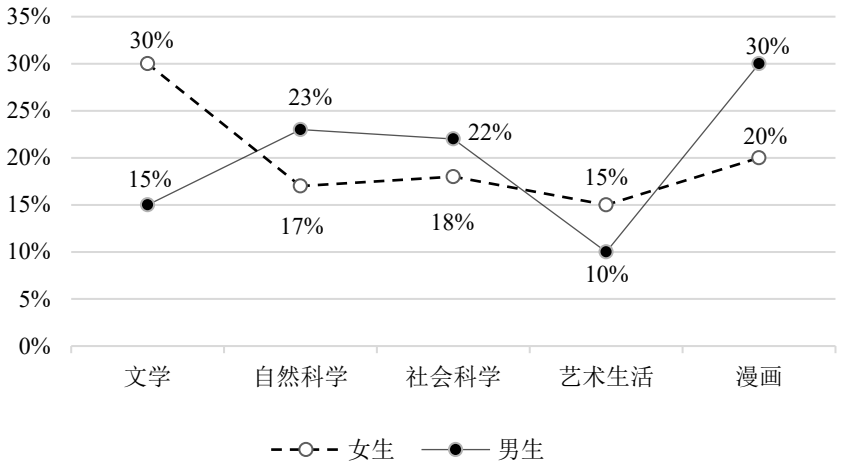
条件②：函数 $f(x)$ 图象的两个相邻对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；

条件③：函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=0$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 13 分）

4 月 23 日是世界读书日．某市调研小学生阅读状况，得到男生、女生最喜爱的一种阅读内容的频率分布如下图：



假设不同学生的选择相互独立．用频率估计概率．

（Ⅰ）从该市小学生中随机抽取1名男生，估计他最喜爱的阅读内容为科学类（包括自然科学和社会科学）的概率；

（Ⅱ）从该市小学生中随机抽取1名男生和2名女生，记这3人中最喜爱的阅读内容为漫画的人数为ξ，求ξ的分布列和数学期望$E\xi$；

（Ⅲ）从该市小学生中随机抽取1名男生，用“$X=1$”表示他最喜爱的阅读内容为科学类，“$X=0$”表示他最喜爱的阅读内容不是科学类；从该市小学生中随机抽取1名女生，用“$Y=1$”表示她最喜爱的阅读内容为科学类，“$Y=0$”表示她最喜爱的阅读内容不是科学类．判断方差DX与DY的大小．（结论不要求证明）

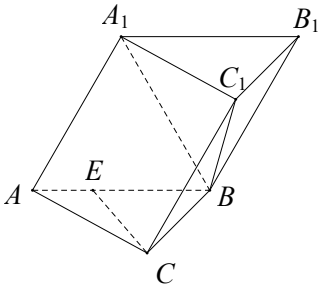
（18）（本小题 14 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp BC$，$AA_1=AB=A_1B=BC=2$，平面$ABC\perp$平面AA_1B_1B．

（Ⅰ）求证：$A_1A\perp BC$；

（Ⅱ）求平面A_1C_1B与平面ABC的夹角的余弦值；

（Ⅲ）设点E为线段AB上任意一点（且不与点A，B重合），求证：直线CE与平面A_1C_1B相交．



(19)（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 $A(-2,0)$， $B(2,0)$，直线 $l:y=x$ 与椭圆 E 交于点 $C(-1,-1)$， $D(1,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程与离心率；

（Ⅱ）若直线 l 与圆 $O:x^2+y^2=r^2\ (0<r<b)$ 交于点 F， G，直线 AF， AG 与椭圆 E 的另一个交点分别为点 M， N，求证：对任意 $r\in(0,b)$，直线 MN 过定点.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x$， $g(x)=kx$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=g(x)$ 相切，求切点 P 的坐标和实数 k 的值；

（Ⅱ）若对任意实数 M，都存在实数 x_0，使得 $f(x_0)-g(x_0)>M$，求 k 的取值范围；

（Ⅲ）对给定的 $k\ (k>\frac{1}{\mathrm{e}})$，任意 $t\ (t\in\mathbf{R})$，直线 $y=t$ 与曲线 $y=f(x)$， $y=g(x)$ 的交点分别为 A，B，求 $|AB|$ 的最小值 $H(k)$.

（21）（本小题 15 分）

由 n 个实数组成的有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维向量. n 维向量 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，当且仅当 $x_i=y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\beta=\gamma$. 对任意 $k\in\mathbf{Z}$，定义：$\beta+\gamma=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$；$k\beta=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$.

设集合 $A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_8)\,|\,x_i\in\{0,1\}$，$x_i+x_{9-i}=1,i=1,2,\cdots,8$，$x_1+x_2+x_3+x_4$ 为偶数$\}$.

令集合 $B=\{\alpha\,|$ 存在 $k_i\in\mathbf{Z}$，使得 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_8\alpha_8$，$\alpha_i\in A$，$i=1,2,\cdots,8\}$.

（I）写出集合 A 的所有元素；

（II）判断 $\beta=(2,0,0,0,0,0,0,-2)$ 与 $\gamma=(10,9,7,5,5,3,1,0)$ 是否属于集合 B，并说明理由；

（III）若 $\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_8),b_i\in\mathbf{N},i=1,2,\cdots,8$，求证：“$\alpha\in B$”的充要条件为“$b_1+b_2+b_3+b_4$ 为偶数，且 $b_1+b_8=b_2+b_7=b_3+b_6=b_4+b_5$”.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D　（2）B　（3）A　（4）C　（5）B

（6）B　（7）C　（8）A　（9）D　（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$y=-1$　（12）$\frac{\pi}{3}$　2（答案不唯一）

（13）64π　（14）2　$[0,1]$

（15）②③

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(0)=\sin(-\frac{\pi}{6})+a\cos 0=a-\frac{1}{2}$，

所以由 $f(0)=1$，得 $a=\frac{3}{2}$.

（Ⅱ）$f(x)=\sin\omega x\cos\frac{\pi}{6}-\cos\omega x\sin\frac{\pi}{6}+a\cos\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+(a-\frac{1}{2})\cos\omega x$.

选①②：

因为 $f(x)$ 的最大值为1，所以 $\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(a-\frac{1}{2})^2}=1$，解得 $a=0$ 或 $a=1$.

又因为 $a>0$，所以 $a=1$. 所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$.

因为函数 $f(x)$ 图象的两个相邻对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$.

所以 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$. 又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$.

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{6}], k\in\mathbf{Z}$.

选②③：

因为 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=0$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+(a-\frac{1}{2})\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(-\omega x)+(a-\frac{1}{2})\cos(-\omega x)=0$.

即 $(a-\frac{1}{2})\cos\omega x=0$ 恒成立，所以 $a=\frac{1}{2}$．所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x$.

因为函数 $f(x)$ 图象的两个相邻对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$.

因为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，所以 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$.

所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$．解得 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}],k\in\mathbf{Z}$.

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）记事件 B 为“从该市小学生中随机抽取1名男生，他最喜爱的阅读内容为自然科学”，

记事件 C 为“从该市小学生中随机抽取1名男生，他最喜爱的阅读内容为社会科学”，

由图可知，$P(B)=0.23$，$P(C)=0.22$.

记事件 A 为“从该市小学生中随机抽取1名男生，他最喜爱的阅读内容为科学类”，

则 $P(A)=P(B)+P(C)=0.23+0.22=0.45$.

（Ⅱ）ξ 的取值范围为 $\{0,1,2,3\}$.

“从该市小学生中随机抽取1名男生，他最喜爱的阅读内容为漫画”的概率为0.3，

“从该市小学生中随机抽取1名女生，她最喜爱的阅读内容为漫画”的概率为0.2.

$P(\xi=0)=(1-0.3)(1-0.2)(1-0.2)=0.448$；

$P(\xi=1)=0.3\times0.8\times0.8+0.7\times0.2\times0.8+0.7\times0.8\times0.2=0.416$；

$P(\xi=2)=0.3\times0.2\times0.8\times2+0.7\times0.2\times0.2=0.124$；

$P(\xi=3)=0.3\times0.2\times0.2=0.012$.

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	0.448	0.416	0.124	0.012

数学期望 $E\xi = 0\times 0.448 + 1\times 0.416 + 2\times 0.124 + 3\times 0.012 = 0.7$.

法二： $E\xi = 1\times 0.3 + 2\times 0.2 = 0.7$.

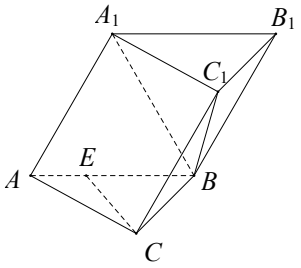
（Ⅲ） $DX > DY$.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B ，面 $ABC \cap$ 面 $AA_1B_1B = AB$ ， $AB \perp BC$ ， $BC \subset$ 面 ABC ，

所以 $BC \perp$ 平面 AA_1B_1B .

又因为 $AA_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B ，所以 $A_1A \perp BC$.

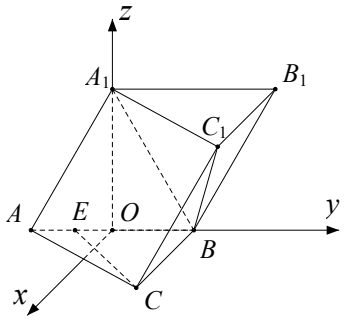


（Ⅱ）取 AB 的中点 O . 又因为 $AA_1 = AB = A_1B$ ，

所以 $A_1O \perp AB$.

又因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B ，所以 $A_1O \perp$ 平面 ABC .

如图建立坐标系 $O - xyz$. 则 $BC // x$ 轴.



则 $A(0,-1,0)$， $B(0,1,0)$， $C(2,1,0)$，

$A_1(0,0,\sqrt{3})$， $B_1(0,2,\sqrt{3})$， $C_1(2,2,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{A_1B} = (0,1,-\sqrt{3})$， $\overrightarrow{A_1C_1} = (2,2,0)$.

因为 $A_1O \perp$ 平面 ABC ，所以平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m} = (0,0,1)$.

设平面 A_1C_1B 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ ，则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \perp A_1B, \\ \boldsymbol{n} \perp A_1C_1. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} y - \sqrt{3}z = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$

令 $z = 1$，得 $\boldsymbol{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$.

设平面 A_1C_1B 与平面 ABC 的夹角为 θ ，则 $\cos\theta = |\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>| = \dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{1}{1\times\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

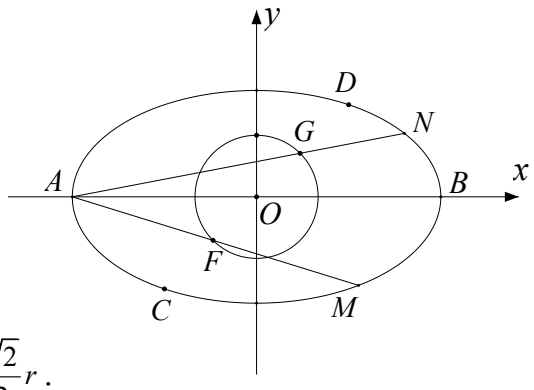
（Ⅲ）设 $E(0,y,0), -1 < y < 1$ ，则 $\overrightarrow{CE} = (-2, y-1, 0)$.

由（Ⅱ）知平面 A_1C_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE} = -\sqrt{3}\times(-2) + \sqrt{3}\times(y-1) + 0 = \sqrt{3}(y+1) \neq 0$ ，

所以直线CE与平面A_1C_1B相交.

（19）（本小题 15 分）



解：（Ⅰ）由题意得$a=2$，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，所以$b^2=\frac{4}{3}$.

所以椭圆E的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$.

因为$c^2=a^2-b^2=\frac{8}{3}$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）由$\begin{cases}y=x,\\x^2+y^2=r^2,\end{cases}$得$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，或$x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

不妨设$F(m,m)$，$G(-m,-m)$，因为$0<r<b$，所以$m\neq 0$，$m\neq -2$.

设直线AF的方程为$y=kx+n$，则$k=\frac{m}{m+2}$，$n=\frac{-2m}{m+2}$.

由$\begin{cases}y=kx+n,\\x^2+3y^2=4,\end{cases}$得$(3k^2+1)x^2+6knx+3n^2-4=0$.

所以$-2+x_M=\frac{-6kn}{3k^2+1}=\frac{-m^2+2m+2}{3k^2+1}$. 所以$x_M=\frac{-6kn+2+6k^2}{3k^2+1}=\frac{-m^2+2m+2}{m^2+m+1}$.

所以$y_M=kx_M+n=\frac{m^2+2m}{m^2+m+1}$.

设点$P(2,2)$，则$k_{PM}=\frac{y_M-2}{x_M-2}=\frac{\frac{m^2+2m}{m^2+m+1}-2}{\frac{-m^2+2m+2}{m^2+m+1}-2}=\frac{m^2+2}{3m^2}$.

同理$k_{PN}=\frac{(-m)^2+2}{3(-m)^2}=\frac{m^2+2}{3m^2}$. 所以$k_{PM}=k_{PN}$.

所以P，M，N三点共线.

所以对任意$r\in(0,b)$，直线MN过定点$P(2,2)$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）设切点$P(x_0,y_0)$，则$y_0=\ln x_0$，$y_0=kx_0$.

由$f'(x)=\frac{1}{x}$，得切线斜率$k=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

由$\begin{cases}y_0=\ln x_0,\\y_0=kx_0,\\kx_0=1\end{cases}$，得$y_0=1$，$x_0=\mathrm{e}$，$k=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以切点P的坐标为$(\mathrm{e},1)$，$k=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（Ⅱ）设 $F(x)=f(x)-g(x)=\ln x-kx$，

则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{x}-k=\dfrac{-kx+1}{x}$， $x\in(0,+\infty)$.

当 $k\leqslant 0$ 时， $-kx+1>0$， $F'(x)>0$， $F(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

对任意实数 M，都存在实数 $x_0=\mathrm{e}^{M+1}$，使得 $f(x_0)-g(x_0)=\ln x_0-kx_0\geqslant M+1>M$，

当 $k>0$ 时，

由 $F'(x)>0$ 解得 $0<x<\dfrac{1}{k}$． $F(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{k})$.

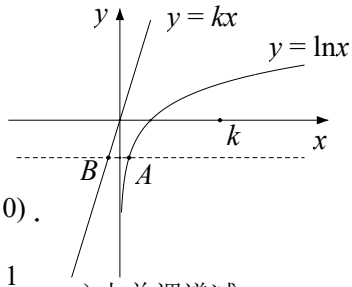
由 $F'(x)<0$ 解得 $x>\dfrac{1}{k}$． $F(x)$ 的单调递减区间为 $(\dfrac{1}{k},+\infty)$.

所以在 $(0,+\infty)$ 上， $F(x)\leqslant F(\dfrac{1}{k})=-\ln k-1$.

存在 $M=-\ln k-1$，对任意 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)-g(x)=F(x)\leqslant M$，不符合题意.

所以 k 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

（Ⅲ）因为 $y=t$ 与 $y=\ln x$， $y=kx$ 的交点分别为 A,B，



所以可设 $A(x_1,t)$， $B(x_2,t)$，则 $t=\ln x_1$， $t=kx_2$.

所以 $|AB|=|x_2-x_1|=|\dfrac{1}{k}t-x_1|=|\dfrac{1}{k}\ln x_1-x_1|=\dfrac{1}{|k|}|\ln x_1-kx_1|\ (x_1>0)$.

由（II）知当 $k>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时， $F(x)=\ln x-kx$ 在 $(0,\dfrac{1}{k})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{k},+\infty)$ 上单调递减.

所以在区间 $(0,+\infty)$ 上， $F(x)=\ln x-kx\leqslant F(\dfrac{1}{k})=-\ln k-1$.

因为 $k>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $-\ln k-1<0$.

所以 $|\ln x-kx|\geqslant\ln k+1$.

所以 $|AB|=|x_2-x_1|=\dfrac{1}{k}|\ln x_1-kx_1|\geqslant\dfrac{\ln k+1}{k}$，当且仅当 $x_1=\dfrac{1}{k}$ 时取等号.

所以当 $x_1=\dfrac{1}{k}$，即 $t=-\ln k$ 时，$|AB|$ 的最小值为 $H(k)=\dfrac{\ln k+1}{k}$.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）集合 A 的所有元素：

$\alpha_1=(0,0,0,0,1,1,1,1)$， $\alpha_8=(1,1,1,1,0,0,0,0)$，

$\alpha_2=(1,1,0,0,1,1,0,0)$，　$\alpha_7=(0,0,1,1,0,0,1,1)$，

$\alpha_3=(1,0,1,0,1,0,1,0)$，　$\alpha_6=(0,1,0,1,0,1,0,1)$，

$\alpha_4=(1,0,0,1,0,1,1,0)$，　$\alpha_5=(0,1,1,0,1,0,0,1)$.

（II）$\beta\in B$，$\gamma\notin B$.

因为$\beta=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+(-\alpha_5)$，

所以$\beta\in B$.

记$\alpha_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i8})\in A, i=1,2,\cdots,8$，

假设存在 $k_i\in\mathbf{Z}$，$i=1,2,\cdots,8$，使得$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_8\alpha_8$，则

$10=k_1x_{11}+k_2x_{21}+\cdots+k_8x_{81}$，

$9=k_1x_{12}+k_2x_{22}+\cdots+k_8x_{82}$，

$7=k_1x_{13}+k_2x_{23}+\cdots+k_8x_{83}$，

$5=k_1x_{14}+k_2x_{24}+\cdots+k_8x_{84}$.

相加，得

$31=k_1(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14})+k_2(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24})+\cdots+k_8(x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84})$.

因为$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}\ (i=1,2,\cdots,8)$为偶数，等式左右两端奇偶性相反，矛盾.

所以$\gamma\notin B$.

（III）必要性

因为$\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_8)\in B$，所以存在$k_i\in\mathbf{Z}$使得$\alpha=\sum_{i=1}^{8}k_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{8}k_i(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i8})$.

所以$b_n=\sum_{i=1}^{8}k_ix_{in}, n=1,2,\cdots,8$.

所以$b_1+b_2+b_3+b_4=\sum_{i=1}^{8}k_ix_{i1}+\sum_{i=1}^{8}k_ix_{i2}+\sum_{i=1}^{8}k_ix_{i3}+\sum_{i=1}^{8}k_ix_{i4}=\sum_{i=1}^{8}k_i(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4})$.

又因为$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}$为偶数，$k_i\in\mathbf{Z}\ (i=1,2,\cdots,8)$，所以$b_1+b_2+b_3+b_4$为偶数.

因为$b_1+b_8=\sum_{i=1}^{8}k_ix_{i1}+\sum_{i=1}^{8}k_ix_{i8}=\sum_{i=1}^{8}k_i(x_{i1}+x_{i8})=\sum_{i=1}^{8}k_i$，同理$b_m+b_{9-m}=\sum_{i=1}^{8}k_i, m=2,3,4$.

所以$b_1+b_8=b_2+b_7=b_3+b_6=b_4+b_5$.

充分性：

因为$b_1+b_2+b_3+b_4$为偶数，且$b_1+b_8=b_2+b_7=b_3+b_6=b_4+b_5$，$b_i\in\mathbf{N}, i=1,2,\cdots,8$，

设 $b_1+b_2+b_3+b_4=2S$，$S\in\mathbf{Z}$，$b_1+b_8=b_2+b_7=b_3+b_6=b_4+b_5=K$，$K\in\mathbf{Z}$．

因为 $\alpha=(K-S)\alpha_1+(S-b_3-b_4)\alpha_2+(S-b_2-b_4)\alpha_3+b_4\alpha_4+(S-b_1)\alpha_5$，

且 $K-S$，$S-b_3-b_4$，$S-b_2-b_4$，b_4，$(S-b_1)\in\mathbf{Z}$，

所以 $\alpha\in B$．