2026 北京丰台高三二模

数　　学

本试卷共 7 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{0,1\}$，$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，则（　　）

A. $-1\in B$　　B. $-1\notin B$

C. $2\in A\bigcap B$　　D. $2\notin B$

2. 复数 $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 的虚部是.

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 下列函数中，定义域和值域相同的是（　　）

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=\ln|x|$

C. $f(x)=\tan x$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

4. 已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

5. 已知圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 的圆心为 C，斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 与该圆相切且与 x 轴交于点 A，则 $|AC|=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

6. 在 $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)(x-1)^3$ 的展开式中，$\dfrac{1}{x}$ 的系数为（　　）

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 3

7. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，M 为双曲线 E 右支上一点，线段 MF_1 与 y 轴交于点 P，若 $|OP|=|OF_1|$（O 为坐标原点），$|MP|=|MF_2|$，则双曲线 E 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

8. 已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos 2x(a>0)$，$x\in[0,2\pi]$，若 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$，则（　　）

A. $a=\dfrac{1}{2}$，$f(x)$ 有 2 个零点　　B. $a=\dfrac{1}{2}$，$f(x)$ 有 3 个零点

C. $a=2$，$f(x)$ 有 2 个零点　　D. $a=2$，$f(x)$ 有 3 个零点

9. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\in\mathbf{R}$，$|f(-x)|=|f(x)|$.若 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则“$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增”是“$f(x)$ 是奇函数”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 已知曲线 $E:x^4+y^4-2x^2-2y^2+1=0$.下列结论正确的是（　　）

A. 曲线 E 上的任意一点 P 在圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的内部

B. 曲线 E 上的任意一点 P 在圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的外部

C. 曲线 E 上存在点 P，使 $|OP|\le\dfrac{4}{5}$

D. 曲线 E 上存在点 P，使 $|OP|\ge 2$

第二部分（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

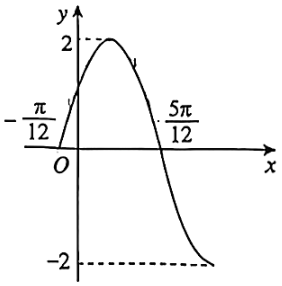
11. 不等式 $2^x<\dfrac{1}{4}$ 的解集是_____.

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 S_3，S_2，S_4 成等差数列，$a_1=1$，则 $S_3=$_____.

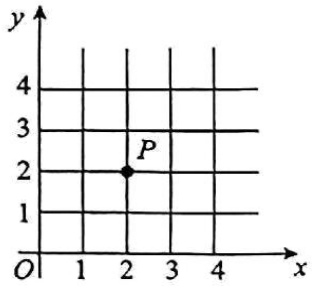
13. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $\omega=$_____；若将函数

$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位后得到函数$g(x)$的图象，请写出$y=g(x)$的图象的一条对称轴方程：

_____.



14. 随着科技的不断进步，智能机器人技术已成为推动现代仓储管理领域创新发展的重要力量.如图，某智能仓储机器人在平面直角坐标系中的格点（横、纵坐标均为整数的点）上运动，每步只能向右或向上移动1个单位长度.设该机器人在横坐标为偶数的格点上，向右一步的能耗为3个单位，向上一步的能耗为2个单位；在横坐标为奇数的格点上，向右一步的能耗为2个单位，向上一步的能耗为4个单位.该机器人从$O(0,0)$出发，先向右移动2个单位长度，再向上移动2个单位长度，到达$P(2,2)$，则它的总能耗为_____个单位；再从$P(2,2)$出发运动到$Q(100,100)$，那么它从P到Q的所有路径中，总能耗的最小值为_____个单位.



15. 已知P是棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$表面及其内部的点，直线AP与直线CD所成的角为45°，且$BP=PC_1$，给出下列四个结论：

①满足条件的点P有无数个；

②点P的轨迹是一段圆弧；

③线段BP长度的最大值为2；

④三棱锥$P-BB_1C$体积的最大值为$\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在△ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$.

（1）求$\angle B$；

（2）若$a=4\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得△ABC存在，求AC边上的高.

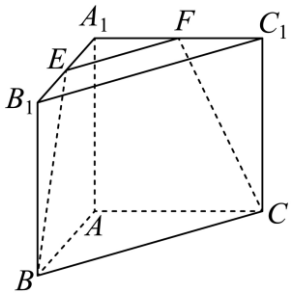
条件①：$b=\sqrt{3}$；

条件②：$\sin(A-C)=1$；

条件③：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=24$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，E为A_1B_1的中点，直线A_1C_1交平面BCE于点F.



（1）求证：F为A_1C_1的中点；

（2）若M是棱CC_1上一点，且直线AM与平面BCE所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，求$\frac{CM}{CC_1}$的值.

18. 某公司为评估员工使用人工智能技术辅助办公的能力，随机抽取了该公司n名员工，通过专用系统进行综合评分（满分为100分），得到如下频率分布表.

综合得分	频数	频率
$[0,30)$	a	b
$[30,60)$	60	0.6
$[60,100]$	30	c

（1）求n,b的值；

（2）现采用按比例分层抽样的方法从综合得分为$[30,60)$和$[60,100]$的员工中抽取6人.若从这6名员工中随机选取2人进行座谈，设X为选取的2名员工中综合得分不低于60分的人数，求X的分布列和数学期望；

（3）该公司为了进一步提升员工应用人工智能技术辅助办公的能力，决定聘请某机构对员工进行培训.该机构给出了以下两个方案：

方案一：对该公司所有员工进行培训，保证培训后人均综合得分提高10分；

方案二：只对该公司综合得分低于60分的员工进行培训，保证培训后，原综合得分在$[0,30)$的员工人均综合得分提高5分，原综合得分在$[30,60)$的员工人均综合得分提高20分.

用样本估计总体.为尽可能提升该公司员工的人均综合得分，应选择哪个方案？（结论不要求证明）

19. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，以椭圆$E$的焦点和短轴顶点为顶点的四边形是边长为2的菱形.

（1）求椭圆E的标准方程；

（2）已知A为椭圆E的左顶点，M，N为椭圆E上两个不同的动点（均不与点A重合），且满足直线AM与直线AN的斜率之积为$\dfrac{5}{4}$.求证：直线MN过定点.

20. 已知函数$f(x)=(x-1)\ln x+ax^2$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数.

（1）若$f'(1)-f(1)=1$，求a的值；

（2）若$f'(x)$存在最大值，求a的取值范围；

（3）设$f'(x)$在$x=1$处取得最大值.直线l是曲线$y=f(x)$在点$P(t,f(t))(t>1)$处的切线，且与y轴交于点Q，O为坐标原点.是否存在点P，使$\triangle OPQ$的面积为$\dfrac{1}{4}$？若存在，求t的值；若不存在，说明理由.

21. 已知无穷正整数数列$\{a_n\}$，满足：①$a_n<a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$；②对于任意正整数$n$，都有$a_n^2=a_1+a_2+\cdots+a_{a_n}$，则称数列$\{a_n\}$具有性质$\Psi$.

（1）判断下列无穷数列，是否具有性质Ψ.

①$a_n=2n-1$；

②$b_n=2^n$.

（2）对于任意具有性质 Ψ 的数列 $\{c_n\}$，记 $d_i = c_i - 2i + 1\left(i \in \mathbf{N}^*\right)$.求证：

$\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{c_n - 1}\right)^2 = d_{c_n}^2 \left(n \in \mathbf{N}^*\right)$；

（3）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 Ψ，证明：集合 $M = \left\{i \in \mathbf{N}^* \mid a_i = 2i - 1\right\}$ 是无限集.

参考答案

第一部分（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	B	D	D	B	C	B	C

第二部分（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$(-\infty,-2)$

【详解】由不等式$2^x<\dfrac{1}{4}$，可化为$2^x<2^{-2}$，

因为函数$y=2^x$为定义域$\mathbf{R}$上的单调递增函数，所以$x<-2$，

所以不等式$2^x<\dfrac{1}{4}$的解集为$(-\infty,-2)$.

12. 【答案】3

【详解】因为S_3，S_2，S_4成等差数列，则$2S_2=S_3+S_4$，

即$\left(S_4-S_2\right)+\left(S_3-S_2\right)=0$，则$a_4+a_3+a_3=0$，即$a_4=-2a_3$，

可得等比数列$\{a_n\}$的公比为$q=\dfrac{a_4}{a_3}=-2$，

且$a_1=1$，所以$S_3=1-2+4=3$.

13. 【答案】　①. 2　②. $x=0$（答案不唯一，满足$x=\dfrac{k_1\pi}{2},k_1\in\mathbf{Z}$即可）

【详解】设函数$f\left(x\right)$的最小正周期为T，

则$\dfrac{T}{2}=\dfrac{5\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，即$T=\pi$，

且$\omega>0$，则$\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$；

由图可知：$x=\dfrac{\dfrac{5\pi}{12}+\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)}{2}=\dfrac{\pi}{6}$为函数$f\left(x\right)$的对称轴，

结合函数 $f\left(x\right)$ 的周期可知函数 $f\left(x\right)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

又因为将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，

所以函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{\left(k+1\right)\pi}{2}=\dfrac{k_1\pi}{2},k\in\mathbf{Z},k_1=k+1$，

所以 $y=g\left(x\right)$ 的图象的一条对称轴方程为 $x=0$.

14. 【答案】 ①. 9 ②. 441

【详解】第一步：$O\left(0,0\right)$（横坐标为偶数）向右移动 1 个单位长度，能耗为 3 个单位；

第二步：$\left(1,0\right)$（横坐标为奇数）向右移动 1 个单位长度，能耗为 2 个单位；

第三步：$\left(2,0\right)$（横坐标为偶数）向上移动 1 个单位长度，能耗为 2 个单位；

第四步：$\left(2,1\right)$（横坐标为偶数）向上移动 1 个单位长度，能耗为 2 个单位；

所以总能耗：$3+2+2+2=9$；

从 $P\left(2,2\right)$ 到 $Q\left(100,100\right)$ 共需要向右走 98 步、向上走 98 步，

且向右走需要 49 步奇横坐标格点向右和 49 步偶横坐标格点，向上走偶横坐标格点向上更便宜，

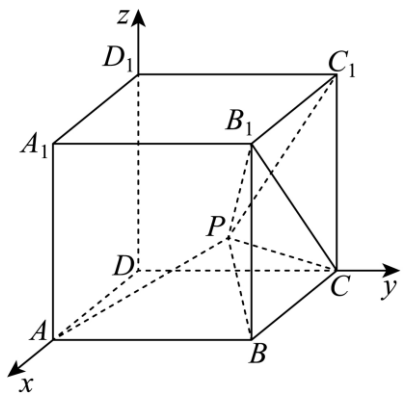
则向右走的耗能是固定的，为 $\left(2+3\right)\times49=245$；

且向上走的耗能最小为偶横坐标格点向上，为 $2\times98=196$；

所以最小总耗能为 $245+196=441$.

15. 【答案】①③④

【详解】以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $A\left(2,0,0\right)$，$B\left(2,2,0\right)$，$C\left(0,2,0\right)$，$D\left(0,0,0\right)$，$C_1\left(0,2,2\right)$，

设 $P(x,y,z),x,y,z\in[0,2]$，

可得 $\overrightarrow{AP}=(x-2,y,z)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(x-2,y-2,z)$，$\overrightarrow{C_1P}=(x,y-2,z-2)$，

因为直线 AP 与直线 CD 所成的角为 45°，

则 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\dfrac{2y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}\times 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，整理可得 $(x-2)^2+z^2=y^2$，

又因为 $BP=PC_1$，则 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$，整理可得 $x=z$，

联立可得 $(x-2)^2+z^2=y^2$，即 $\dfrac{y^2}{2}-(x-1)^2=1$，

可知点 P 的轨迹方程为 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{2}-(x-1)^2=1\\ x=z\end{cases}$，$x,y,z\in[0,2]$，

所以点 P 的轨迹为双曲线的一部分，满足条件的点 P 有无数个，故①正确，②错误；

因为 $x\in[0,2]$，则 $(x-1)^2\in[0,1]$，可得 $y^2=(x-2)^2+x^2=2(x-1)^2+2\in[2,4]$，即 $y\in\left[\sqrt{2},2\right]$，

则 $BP=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{y^2+(y-2)^2}=\sqrt{2(y-1)^2+2}\le 4$，

当且仅当 $y=2$ 时，等号成立，

所以线段 BP 长度的最大值为 2，故③正确；

因为点 P 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $d=2-y\le 2-\sqrt{2}$，

所以三棱锥 $P-BB_1C$ 体积的最大值为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\left(2-\sqrt{2}\right)=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}$，故④正确.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】（1）$\dfrac{\pi}{6}$　　（2）若选②，$2\sqrt{3}$，若选③，$2\sqrt{3}$，

【小问 1 详解】

解：因为 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，可得 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

解：选择条件①：$b=\sqrt{3}$，且 $B=\dfrac{\pi}{6}$

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sqrt{3}}=2$，

因为 $\sin A=2>1$，所以这样的 $\triangle ABC$ 不存在；

选择条件②，因为 $A+B+C=\pi$，且 $B=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $A+C=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，则 $A=\dfrac{5\pi}{6}-C$，

由 $\sin\left(A-C\right)=1$，可得 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-2C\right)=1$，

因为 $A\in(0,\pi),C\in(0,\pi)$，所以 $\dfrac{5\pi}{6}-2C=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $C=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{4\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=4$，

设 AC 边上的高为 h，可得 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bh$，所以 $h=\dfrac{ac\sin B}{b}$，

因为 $A=\dfrac{2\pi}{3},B=C=\dfrac{\pi}{6}$，可得 $b=c$，

又因为 $b=4$，可得 $c=4$，所以 $h=\dfrac{4\sqrt{3}\times4\sin\dfrac{\pi}{6}}{4}=2\sqrt{3}\cdot$

选择条件③：由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=24$，

根据向量的数量积的公式，可得 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos B$，所以 $ac\cos B=24$，

因为 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 且 $a=4\sqrt{3}$，所以 $4\sqrt{3}\cdot c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24$，解得 $c=4$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

可得 $b^2=(4\sqrt{3})^2+4^2-2\times4\sqrt{3}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=16$，所以 $b=4$

设 AC 边上的高为 h，可得 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bh$，所以 $h=\dfrac{ac\sin B}{b}$，

所以 $h=\dfrac{4\sqrt{3}\times4\sin\dfrac{\pi}{6}}{4}=2\sqrt{3}\cdot$

17. 【答案】（1）证明见详解　　（2）$\dfrac{CM}{CC_1}=\dfrac{1}{2}$

【小问 1 详解】

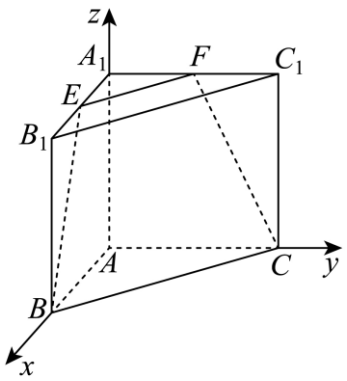
因为平面 $ABC//$ 平面 $A_1B_1C_1$，且平面 $ABC\cap$ 平面 $BCE=AC$，平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $BCE=EF$，

则 $AC//EF$，且 $AC//A_1C_1$，可得 $EF//A_1C_1$，

又因为 E 为 A_1B_1 的中点，所以 F 为 A_1C_1 的中点.

【小问 2 详解】

以 A 为坐标原点，AB,AC,AA_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，$E(1,0,2)$，

设 $M(0,2,a)$，$0\le a\le 2$，

可得 $\overrightarrow{AM}=(0,2,a)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+2y=0\end{cases}$，

令 $x=2$，则 $y=2,z=1$，可得 $\vec{n}=(2,2,1)$，

因为直线 AM 与平面 BCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

则 $\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\dfrac{4+a}{3\times\sqrt{4+a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，整理可得 $a^2-2a+1=0$，解得 $a=1$，

所以 $\dfrac{CM}{CC_1}=\dfrac{1}{2}$.

18. 【答案】（1）$n=100$；$b=0.1$

（2）X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=\frac{2}{3}$

（3）应选择方案二

【小问 1 详解】

因为在$[30,60)$内频数为 60，频率为0.6，则$n=\frac{60}{0.6}=100$，

且在$[60,100]$内频数为 30，则$c=\frac{30}{100}=0.3$，

则在$[0,30)$内频数为$a=100-60-30=10$，频率$b=\frac{10}{100}=0.1$.

【小问 2 详解】

因为综合得分为$[30,60)$和$[60,100]$的人数比为$60:30=2:1$，

则在综合得分为$[30,60)$内抽取人数为$6\times\frac{2}{2+1}=4$，在综合得分为$[60,100]$内抽取人数为$6\times\frac{1}{2+1}=2$，

可知随机变量X的可能值为 0，1，2，则有：

$P(X=0)=\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_4^0C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

X的期望为$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

方案一：该公司员工的人均综合得分$15\times0.1+45\times0.6+80\times0.3+10=62.5$；

方案二：该公司员工的人均综合得分$20\times0.1+65\times0.6+80\times0.3=65$；

因为$62.5<65$，所以应选择方案二.

19. 【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　（2）证明见详解

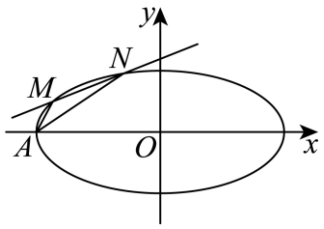
【小问 1 详解】

由题意可得：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a=2$，可得$c=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆E的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

由题意可知：$A(-2,0)$，直线MN的斜率存在，



设直线$MN:y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立方程$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$可得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

则$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0$，可得$m^2<4k^2+1$，

则$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

因为$k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{5}{4}$，

整理可得$(4k^2-5)x_1x_2+(4km-10)(x_1+x_2)+4m^2-20=0$，

即$\dfrac{(4k^2-5)(4m^2-4)}{4k^2+1}-\dfrac{8km(4km-10)}{4k^2+1}+4m^2-20=0$，

整理可得$m^2-5km+6k^2=0$，解得$m=2k$或$m=3k$，

若$m=2k$，则直线$MN:y=kx+2k=k(x+2)$过定点$A(-2,0)$，不合题意；

若$m=3k$，则直线$MN:y=kx+3k=k(x+3)$过定点$(-3,0)$，符合题意；

综上所述：直线MN过定点$(-3,0)$.

20. 【答案】（1）1　　（2）$(-\infty,0)$　　（3）答案见解析

【小问 1 详解】

由函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\ln x+ax^2$，可得 $f'\left(x\right)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}+2ax=\ln x+1-\dfrac{1}{x}+2ax$ ，

则 $f'\left(1\right)=2a$ ， $f\left(1\right)=\left(1-1\right)\ln 1+a\times 1^2=a$ ，

因为 $f'\left(1\right)-f\left(1\right)=1$ ，可得 $2a-a=1$，解得 $a=1$.

【小问 2 详解】

函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\ln x+ax^2$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$,因 $f'\left(x\right)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}+2ax$ ，

令 $\varphi\left(x\right)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}+2ax$，则 $\varphi'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+2a=\dfrac{2ax^2+x+1}{x^2}$

令 $g\left(x\right)=2ax^2+x+1,x\in\left(0,+\infty\right)$ ，

①当 $2a=0$ 时，即 $a=0$ 时， $g\left(x\right)=x+1>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $\varphi'\left(x\right)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；所以 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， $f'\left(x\right)$ 无最大值, 不合题意；

②当 $2a>0$ 时，即 $a>0$ 时，二次函数 $g\left(x\right)=2ax^2+x+1$ 的图象开口向上，

且对称轴 $x=-\dfrac{1}{4a}<0$， $g\left(0\right)=1>0$，所以 $g\left(x\right)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；

即 $\varphi'\left(x\right)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；则 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， $f'\left(x\right)$ 无最大值，不合题意；

③当 $2a<0$ 时，即 $a<0$ 时， $f'\left(x\right)$ 在 $g\left(x\right)=0$ 的根处取得最大值，

由二次函数 $g\left(x\right)$ 的图象开口向下，对称轴 $x=-\dfrac{1}{4a}>0$，

因为 $g\left(0\right)=1>0$，所以存在 $x_0\in(0,+\infty)$ ， $g\left(x_0\right)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $g\left(x\right)>0$，即 $\varphi'\left(x\right)>0$， $f'\left(x\right)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $g\left(x\right)<0$，即 $\varphi'\left(x\right)<0$， $f'\left(x\right)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f'\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值，

综上可得，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$.

【小问 3 详解】

由（1）知 $\varphi\left(x\right)=f'\left(x\right)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}+2ax$，可得 $\varphi'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+2a=\dfrac{2ax^2+x+1}{x^2}$

因为 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，则 $x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的极大值点，

即 $x=1$ 是 $\varphi'(x)=0$ 的根，则 $\varphi'(1)=\dfrac{2a\times1^2+1+1}{1^2}=2a+2=0$，解得 $a=-1$，

把 $a=-1$ 代入得 $f(x)=(x-1)\ln x-x^2$，可得 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}-2x$ ，

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(t,f(t))$ 处的切线方程为 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ ，

令 $x=0$ ，可得 $y_Q=f(t)-t\cdot f'(t)$，

又因为 $f(t)=(t-1)\ln t-t^2, f'(t)=\ln t+1-\dfrac{1}{t}-2t$ ，

可得 $y_Q=f(t)-t\cdot f'(t)=\left((t-1)\ln t-t^2\right)-t\cdot\left(\ln t+1-\dfrac{1}{t}-2t\right)$

$=t\ln t-\ln t-t^2-t\ln t-t+1+2t^2=t^2-t-\ln t+1$，

在 $\triangle OPQ$ 中，O 为原点，$P(t,f(t)),Q(0,y_Q)$，

所以 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|y_Q|\cdot|x_P|=\dfrac{1}{2}t\cdot|y_Q|$，

当 $t>1$ 时，$y_Q=t^2-t-\ln t+1$，令 $h(t)=t^2-t-\ln t+1, t>1$ ，

可得 $h'(t)=2t-1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{(2t+1)(t-1)}{t}$，

当 $t>1$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $h(t)>h(1)=1-1-0+1=1>0$，

即 $y_Q>0$，所以 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}t\cdot y_Q=\dfrac{1}{2}t(t^2-t-\ln t+1)$，

因为 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\dfrac{1}{4}$，可得 $\dfrac{1}{2}t(t^2-t-\ln t+1)=\dfrac{1}{4}$，即 $t^3-t^2+t-t\ln t-\dfrac{1}{2}=0$，

设 $F(t)=t^3-t^2+t-t\ln t-\dfrac{1}{2}, t>1$ ，可得 $F'(t)=3t^2-2t+1-\ln t-1=3t^2-2t-\ln t$ ，

设 $G(t)=3t^2-2t-\ln t, t>1$ ，可得 $G'(t)=6t-2-\dfrac{1}{t}=\dfrac{6t^2-2t-1}{t}$，

令 $m(t)=6t^2-2t-1, t>1$ ，可得 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m(t)>m(1)=3>0$ ，可得 $G'(t)>0$，所以 $G(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $G(t)>G(1)=3\times1^2-2\times1-\ln1=1>0$ ，

可得 $F'(t)>0$，所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(t)>F(1)=1^3-1^2+1-1\times\ln 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $F(t)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上无解，即不存在 t 的值，使得 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{1}{4}$.

21. 【答案】（1）①具有性质 Ψ；②不具有性质 Ψ.

（2）证明见解析.　　（3）证明见解析.

【小问 1 详解】

①当 $a_n=2n-1$ 时，显然 a_n 为正整数，且 $a_n<a_{n+1}$.

又因为 $a_n=2n-1$，所以 $a_{a_n}=2a_n-1$.

从而 $a_1+a_2+\cdots+a_{a_n}=1+3+5+\cdots+(2a_n-1)$.

前 a_n 个正奇数的和为 a_n^2，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{a_n}=a_n^2$.

故数列 $a_n=2n-1$ 具有性质 Ψ.

②当 $a_n=2^n$ 时，该数列虽然是严格递增的正整数数列，但取 $n=1$，有 $a_1=2$.

而 $a_1^2=4$，同时 $a_1+a_2=2+4=6$.

所以 $a_1^2\neq a_1+a_2$.

不满足性质 Ψ 中的条件②，故数列 $a_n=2^n$ 不具有性质 Ψ.

【小问 2 详解】

由数列 $\{c_n\}$ 具有性质 Ψ，得 $c_n^2=c_1+c_2+\cdots+c_{c_n}$.

因此 $d_1+d_2+\cdots+d_{c_n}=(c_1+c_2+\cdots+c_{c_n})-[1+3+\cdots+(2c_n-1)]=c_n^2-\frac{[1+(2c_n-1)]c_n}{2}=0$ ，

所以 $d_1+d_2+\cdots+d_{c_n-1}=-d_{c_n}$，所以 $\left(d_1+d_2+\cdots+d_{c_n-1}\right)^2=d_{c_n}^2$.

【小问 3 详解】

设数列 $\{e_n\}$ 满足 $e_n=a_n-(2n-1),n\in\mathbf{N}^*$.

由题知 $a_i<a_{i+1}$，得 $e_i+(2i-1)<e_{i+1}+(2i+1)$，即 $e_{i+1}-e_i>-2$ ，

假设 $\{e_n\}$ 中满足 $e_n=0$ 的项数有限，则存在正整数 K，使得当 $m>K$ 时，$e_m\neq 0$ ，

即当 $m>K$ 时，$e_m>0$ 或 $e_m<0$.

①若满足 $e_m>0$ 的项数有限，则存在正整数 $l(l\geq K)$，使得当 $m>l$ 时，$e_m<0$ ，

由第二问可知 $e_1+e_2+\cdots+e_{a_n}=0(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立.（1）

设$S=e_1+e_2+\cdots+e_l$，由于当$m>l$ 时，$e_m<0$ ，又e_m是整数，有$e_m\le -1$ ，

所以$T=(e_1+e_2+\cdots+e_l)+\left(e_{l+1}+e_{l+2}+\cdots+e_{l+|S|+1}\right)\le S+(-1)(|S|+1)\le -1$ ，

所以对满足$a_n\ge l+|S|+1$ 的正整数n， $e_1+e_2+\cdots+e_{a_n}<0$，与(1)式矛盾.

②若满足$e_m<0$ 的项数有限，同理可得矛盾.

③由①②可知，$\{e_n\}$中有无穷多项满足$e_m>0$ ，且有无穷多项满足$e_m<0$ ，

因此，存在正整数$i,j(i>j>K)$，使得$e_j>0$ 且$e_i<0$，

因此，存在正整数$l(i>l\ge j)$，使得$e_l>0$ ，且$e_{l+1}<0$ ，即$e_l\ge 1$ 且$e_{l+1}\le -1$ ，于是$e_{l+1}-e_l\le -2$ ，与$e_{l+1}-e_l>-2$ 矛盾，

所以数列$\{e_n\}$中有无穷多项为0.

即集合$M=\{i\in \mathbf{N}^*|a_i=2i-1\}$ 是无限集.