2025 北京昌平高三二模

数　　学

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将答题卡交回．

第一部分选择题共 40 分．

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知全集$U=\mathrm{R}$，集合$A=\{x\mid x\geq 2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$（　）.

A. $(1,2]$　　B. $(1,2)$　　C. $[2,3)$　　D. $(2,3)$

2. 若复数$z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则复数$z$的共轭复数$\overline{z}=$（　）.

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $-1+2\mathrm{i}$　　C. $-1-2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

3. 若$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^2+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$（　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

4. 已知$a=\ln 2$，$b=\sqrt{\mathrm{e}}$，$c=(\dfrac{1}{2})^{\mathrm{e}}$其中 e 为自然对数的底数，则（　）.

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

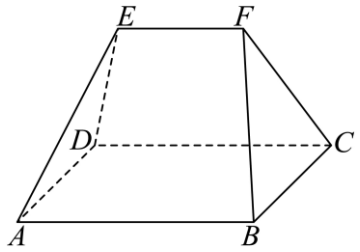
5. 设函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$．已知$f(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且当$f(x_1)f(x_2)=1(x_1\neq x_2)$时，$|x_1-x_2|$的最小值为 4，则（　）.

A. $\omega=\dfrac{\pi}{4},\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\omega=\dfrac{\pi}{4},\varphi=\dfrac{7\pi}{12}$　　C. $\omega=\dfrac{\pi}{2},\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\omega=\dfrac{\pi}{2},\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

6. 已知半径为 1 的圆经过原点，其圆心到直线$3x-4y+15=0$的距离为d，则d的最大值为（　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 庑殿顶是中国传统建筑中的一种屋顶形式，其顶盖几何模型如图所示，底面$ABCD$是矩形，侧面由两个全等的等腰梯形和两个全等的等腰三角形组成．若$BC=10\mathrm{m}$，$EF=5\mathrm{m}$且四个侧面与底面的夹角的大小均相等，则$AB=$（　）.



A. 12 m　　B. 15 m　　C. 20 m　　D. 40 m

8. 设数列$\{a_n\}$是公比不为1的无穷等比数列，则“数列$\{a_n\}$为递减数列”是“对任意的正整数n，$a_{n+2}<a_n$”的（　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数$f(x)=x|x-2a|-a$恰有三个零点，则实数a的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　C. （-1，1）　　D. $[1,+\infty)$

10. 在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=a_n^2-2a_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，则（　）

A. 当$a_1=3$时，对于任意的正整数$n,a_{n+1}>a_n$

B. 当$a_1=1$时，存在正整数N，当$n>N$时，$a_{n+1}>a_n$

C. 当$a_1\in(2,3)$时，对于任意的正整数$n,a_n\le 3$

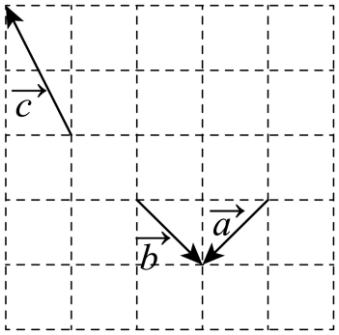
D. 当$a_1\in(3,4)$时，存在正整数N，当$n>N$时，$a_n<3$

第二部分非选择题共110分

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 若抛物线$y^2=mx$的焦点与双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右焦点重合，则实数m的值为_____.

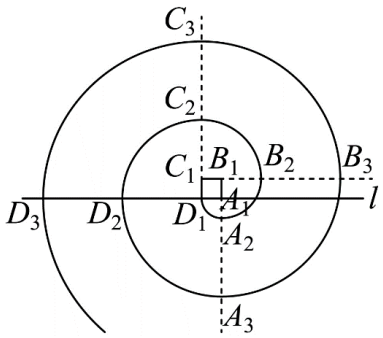
12. 已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$在正方形网格中的位置如图所示，若网格纸上小正方形的边长为1，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____；$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$_____.



13. 已知将函数$f(x)=\cos(2x+\varphi)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位后，所得函数图象关于原点对称，则常数φ的一个取值为_____.

14. 如图，正方形$A_1B_1C_1D_1$的边长为1，点A_1,D_1在直线l上．$\overset{\frown}{D_1A_2}$是以点A_1为圆心，A_1D_1为半径的圆弧，$\overset{\frown}{A_2B_2}$是以点B_1为圆心，B_1A_2为半径的圆弧，$\overset{\frown}{B_2C_2}$是以点C_1为圆心，C_1B_2为半径的圆弧，$\overset{\frown}{C_2D_2}$是以点D_1为圆心，D_1C_2为半径的圆弧，$\overset{\frown}{D_2A_3}$是以点A_1为圆心，A_1D_2为半径的圆弧，...，依次类推，其中点A_1，$D_1,D_2,D_3,\cdots$共线，点B_1,A_1,A_2，$A_3,\cdots$共线，点$C_1,B_1,B_2,B_3,\cdots$共线，点$D_1,C_1,C_2,C_3,\cdots$共

线．则$\overset{\frown}{A_3B_3}$的长度为_____；由上述圆弧组成的曲线E与直线l恰有7个交点时，曲线E长度的最小值为_____．



15. 已知曲线$C: y^2 = x^3 - 2x + 5$，给出下列四个结论：

①曲线C关于x轴对称；

②当$x < 0$时，曲线C上任意一点到点$A(-1, 0)$，的距离均不超过$\sqrt{6}$；

③曲线C与直线$x = 1, x = 2$围成图形的面积小于5；

④经过点$B(1, 2)$且与$x - 4y = 0$平行的直线与曲线C的所有交点的横、纵坐标均为有理数．

其中所有正确结论的序号是_____．

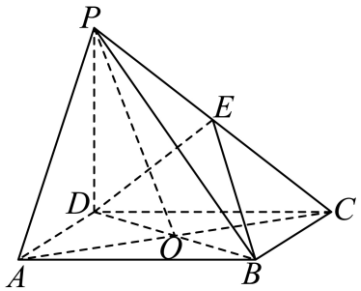
三、解答题共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 在$\triangle ABC$中，$\angle B$为锐角，$2a\sin A\cos C + c\sin 2A = \sqrt{3}a$．

（1）求$\angle B$；

（2）若$b = 7, c\sin B = \frac{5}{2}\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积．

17. 如图，在四棱锥$P - ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，AC与BD相交于点O，平面$PAD \perp$平面$ABCD$，点E在棱PC上，$AD = BD = PD = 2, AB = 2OE = 2\sqrt{2}$．



（1）求证：$AP \perp BD$；

（2）再从条件①，条件②这两个条件中选择一个作为已知，求平面BDE与平面$ABCD$夹角的大小．

条件①：$AP \,//$ 平面BDE；

条件②：$CE = \sqrt{3}$．

18. 在探索数智技术赋能学科学习的过程中，某中学鼓励学生使用某听说平台进行英语口语自主练习．该中学有初中生 1200 人，高中生 800 人．为了解全校学生近一个月内使用此听说平台进行英语口语自主练习的次数，从全校学生中随机抽取 200 名学生进行问卷调查，将他们的使用次数按照$[0,10)$，$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50]$，五个区间进行分组，所得样本数据如下表：

使用次数分组区间	初中生人	高中生人
$[0,10)$	4	3
$[10,20)$	38	29
$[20,30)$	48	28
$[30,40)$	a	17
$[40,50]$	6	3

假设每个学生是否使用此听说平台进行英语口语自主练习相互独立．用频率估计概率．

（1）估计近一个月内全校学生中使用此听说平台进行英语口语自主练习的次数不低于 30 次的总人数；

（2）从上面参与问卷调查且使用此听说平台进行英语口语自主练习次数不足 10 次的学生中随机抽取 3 人，记 X 为这 3 人中高中生的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（3）从该校初中生和高中生中各随机抽取 8 名学生进行调查，设其中初中生和高中生使用此听说平台进行英语口语自主练习次数位于$[20,30)$的人数分别为Y_1和Y_2，比较$D(Y_1)$与$D(Y_2)$的大小．（结论不要求证明）

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{6}$，以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形的面积为 6.

（1）求椭圆 E 的方程及离心率；

（2）过点 $(2,0)$ 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线与椭圆 E 交于 A,B 两点，点 C 与点 B 关于 x 轴对称．在 x 轴上是否存在定点 $D(m,0)$，使 A,C,D 三点共线？若存在，求实数 m 的值，若不存在，说明理由．

20. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}-\frac{a}{3}x^{3}+bx^{2}$，其中 $a\geq 0,b\geq 0$.

（1）当 $a=0,b=0$ 时，

①若 $x\leq 3$，求函数 $f(x)$ 的最大值；

②若直线 l 是曲线 $f(x)$ 的切线，且 l 经过点 $(t,0)$，证明：$|t|\geq 2$；

（2）当 $b>0$ 时，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，求 b 的取值范围.

21. 设 m 为正整数，数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_{5m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中去掉两项 a_i 和 $a_j\ (i<j)$ 后剩余的 $5m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 5 个数都能构成等差数列，则称数列 A 是 (i,j) 的可分数列.

（1）写出所有 $(i,j),1\leq i<j\leq 7$，使得数列 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 是 i 、 j 的可分数列；

（2）当 $m\geq 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{5m+2}$ 是 $(2,16)$ 的可分数列；

（3）若数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{5m+2}$ 是 (i,j) 的可分数列，记所有满足条件的 (i,j) 的个数为 p，求 p 的值.

参考答案

第一部分选择题共 40 分.

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】根据补集和交集的定义求解即可.

【详解】由 $A=\{x\mid x\geq 2\}$，$U=\mathrm{R}$，则 $\complement_{\mathrm{R}}A=\{x\mid x<2\}$，

又 $B=\{x\mid 1<x<3\}$，所以 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=(1,2)$.

故选：B.

2.【答案】A

【分析】利用复数的除法运算和共轭运算即可求解.

【详解】由 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{3-1-3\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2}=1-2\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=1+2\mathrm{i}$，

故选：A.

3.【答案】D

【分析】利用展开式的赋值法即可求解.

【详解】令 $x=0$ 得：$(0-1)^5=a_5\cdot 0+a_4\cdot 0+a_3\cdot 0+a_2\cdot 0+a_1\cdot 0+a_0\Rightarrow a_0=-1$，

令 $x=1$ 得：$(2-1)^5=a_5\cdot 1+a_4\cdot 1+a_3\cdot 1+a_2\cdot 1+a_1\cdot 1+a_0\Rightarrow a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1-(-1)=2$，

故选：D.

4.【答案】A

【分析】根据对数函数与指数函数的性质，分别求得 $\dfrac{1}{2}<a<1$，$b>1$ 和 $c<\dfrac{1}{2}$，即可求解.

【详解】由函数 $y=\ln x$ 为单调递增函数，

因为 $\sqrt{\mathrm{e}}<2<\mathrm{e}$，可得 $\ln\sqrt{\mathrm{e}}<\ln 2<\ln\mathrm{e}$，即 $\dfrac{1}{2}<\ln 2<1$，可得 $\dfrac{1}{2}<a<1$

又由 $\sqrt{\mathrm{e}}>1$，可得 $b>1$，

由函数 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 为单调递减函数，可得 $(\dfrac{1}{2})^{\mathrm{e}}<(\dfrac{1}{2})^1=\dfrac{1}{2}$，即 $c<\dfrac{1}{2}$，

所以 $c<a<b$.

故选：A.

5.【答案】C

【分析】首先根据 $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)=1\left(x_1\neq x_2\right)$ 和 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 4 这两个条件，确定 ω 的值，然后根据 $f\left(1\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 求出 φ 的值.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的值域为 $\left[-1,1\right]$, $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)=1\left(x_1\neq x_2\right)$

所以当函数值同时取最大值或最小值时，满足 $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)=1\left(x_1\neq x_2\right)$.

因为 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 4，所以函数的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=4$.

所以 $\omega=\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $f\left(1\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $f\left(1\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times1+\varphi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{2}+\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：C.

6.【答案】D

【分析】先判定该圆圆心的轨迹，再转化为圆上的点到直线的距离的最值问题进行求解.

【详解】因为半径为 1 的圆经过原点，所以其圆心的轨迹是以原点 O 为圆心，1 为半径的圆，

而原点 O 到直线 $3x-4y+15=0$ 的距离为 $\dfrac{\left|15\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

所以圆心到直线 $3x-4y+15=0$ 距离 d 的最大值为 $3+1=4$.

故选：D.

7.【答案】B

【详解】取 AD,BC 的中点 G,M，连接 GM，

过点 F 作 $FO\perp$ 面 $ABCD$ 于点 O，过点 E 作 $EL\perp$ 面 $ABCD$ 于点 L，作 $OH\perp AB$ 于点 H，连接 FM,FH，

因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB//CD$，

又因为 $CD\subset$ 面 $CDFE$，$AB\not\subset$ 面 $CDFE$，所以 $AB//$ 面 $CDFE$，

又因为 $AB\subset$ 面 $ABEF$，面 $CDFE\cap$ 面 $ABEF=EF$，

所以 $AB//EF$，

因为面 $ABEF$，面 $CDFE$ 都与底面 $ABCD$ 所成的角相等，

所以点 O,L 在直线 GM 上，且 $OL=EF=5$ m，$OH=\dfrac{1}{2}BC=5$ m，

因为侧面由两个全等的等腰梯形和两个全等的等腰三角形组成，

所以 $FM \perp BC$，$GM \perp BC$，

所以 $\angle FMO$ 为面 FBC 与面 $ABCD$ 所成的角，

$FO \perp$ 面 $ABCD$，$AB \subset$ 面 $ABCD$，所以 $FO \perp AB$，

又因为 $OH \perp AB$，$FO \cap OH = O$，$FO, OH \subset$ 平面 FOH，

所以 $AB \perp$ 平面 FOH，又 $FH \subset$ 平面 FOH，

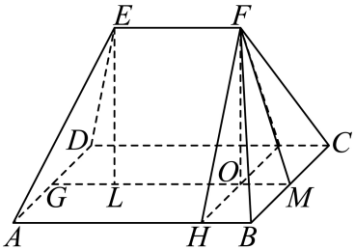
所以 $AB \perp FH$，所以 $\angle FHO$ 为面 $ABEF$ 与面 $ABCD$ 所成的角，

所以 $\angle FMO = \angle FHO$，又 OF 为公共边，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle OFM \cong \mathrm{Rt}\triangle OFH$，所以 $OM = OH = 5$ m，同理 $GL = 5$，

所以 $AB = GM = OM + OL + LG = 5 + 5 + 5 = 15$ m.

故选：B.



8.【答案】C

【分析】由 $a_{n+2} < a_n \Leftrightarrow a_n\left(q^2-1\right) < 0$，分 $a_1 > 0$ 和 $a_1 < 0$ 两种情况讨论公比取值，即可判断.

【详解】若“数列 $\{a_n\}$ 为递减数列”，易得 $a_{n+2} < a_n$，

若“对任意的正整数 n，$a_{n+2} < a_n$”

$a_{n+2} < a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - a_n = a_n\left(q^2-1\right) < 0$，

当 $a_1 > 0$ 时，由 $a_1\left(q^2-1\right) < 0$，得 $q^2 - 1 < 0$，

解得：$-1 < q < 0$ 或 $0 < q < 1$，

若 $-1 < q < 0$，则 $a_2 = a_1 q < 0$，此时 $a_2\left(q^2-1\right) > 0$，与已知矛盾；

若 $0 < q < 1$，则 $a_n = a_1 q^{n-1} > 0$，由指数函数单调性可知 a_n 单调递减；

当 $a_1 < 0$ 时，由 $a_1\left(q^2-1\right) < 0$，得 $q^2 - 1 > 0$，

解得：$q < -1$ 或 $q > 1$，

若 $q < -1$，则 $a_2 = a_1 q > 0$，此时 $a_2\left(q^2-1\right) > 0$，与已知矛盾；

若 $q > 1$，则 $a_n = a_1 q^{n-1} < 0$，由指数函数单调性可知 a_n 单调递减；

综上可知：若 $a_{n+2} < a_n$，可判断数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，

所以“数列 $\{a_n\}$ 为递减数列”是“对任意的正整数 n，$a_{n+2} < a_n$”的充要条件，

故选：C

9.【答案】B

【分析】将函数解析式化为分段函数，分$a=0$、$a>0$和$a<0$三种情况讨论，结合函数的单调性，求出特殊点处的函数值，即可得到不等式组，从而确定a的取值范围.

【详解】因为$f\left(x\right)=x\left|x-2a\right|-a=\begin{cases}x^2-2ax-a,x\geq 2a\\-x^2+2ax-a,x<2a\end{cases}$，

若$a=0$时，$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2,x\geq 0\\-x^2,x<0\end{cases}$，则$f\left(x\right)$有且仅有一个零点0，不符合题意；

若$a>0\left(2a>a\right)$，当$x\geq 2a$时，$f\left(x\right)=x^2-2ax-a=\left(x-a\right)^2-a-a^2$，

则$f\left(x\right)$在$\left(2a,+\infty\right)$上单调递增，且$f\left(2a\right)=-a$，

当$x<2a$时，$f\left(x\right)=-x^2+2ax-a=-\left(x-a\right)^2-a+a^2$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,a\right)$上单调递增，在$\left(a,2a\right)$上单调递减，且$f\left(a\right)=-a+a^2$，

要使$f\left(x\right)$恰有三个零点，则$\begin{cases}-a<0<a^2-a\\a>0\end{cases}$，解得$a>1$；

若$a<0\left(2a<a\right)$，当$x\geq 2a$时，$f\left(x\right)=x^2-2ax-a=\left(x-a\right)^2-a-a^2$，

则$f\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$上单调递增，在$\left(2a,a\right)$上单调递减，且$f\left(a\right)=-a-a^2$，

当$x<2a$时，$f\left(x\right)=-x^2+2ax-a=-\left(x-a\right)^2-a+a^2$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,2a\right)$上单调递增，且$f\left(2a\right)=-a$，

要使$f\left(x\right)$恰有三个零点，则$\begin{cases}-a^2-a<0<-a\\a<0\end{cases}$，解得$a<-1$；

综上可得实数a的取值范围是$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

故选：B

10.【答案】C

【分析】对A，当$a_1=3$时，可得$a_{n+1}=a_n$，得解；对B，由$a_1=1$，结合递推关系可得$a_n=3\left(n\geq 4\right)$，得解；对C，当$a_1\in\left(2,3\right)$时，通过递推关系分$a_n\in\left(2,3\right)$，$a_n\in\left(0,2\right]$，$a_n\in\left[-1,0\right]$讨论求解；对D，当$a_1\in\left(3,4\right)$时，通过递推关系可得$\left\{a_n\right\}$递增，得解.

【详解】对于A，当$a_1=3$时，有$a_2=a_1^2-2a_1=9-6=3$，可得$a_{n+1}=a_n$，不满足$a_{n+1}>a_n$，故A错误；

对于B，当$a_1=1$时，$a_2=1^2-2\times 1=-1$，$a_3=\left(-1\right)^2-2\times\left(-1\right)=3$，$a_4=3$，

则$a_n=3\left(n\geq 4\right)$，不满足存在正整数$N$，当$n>N$时，$a_{n+1}>a_n$，故B错误；

对于 C，当$a_1\in(2,3)$时，则$a_1-2\in(0,1)$，$a_2=a_1(a_1-2)$，故$a_2\in(0,3)$，

因为$a_{n+1}=a_n^2-2a_n=(a_n-1)^2-1\geq-1$，

若$a_n\in(2,3)$，则$a_{n+1}=a_n^2-2a_n\in(0,3)$，

若$a_n\in(0,2]$，则$a_{n+1}=a_n^2-2a_n\in[-1,0]$，

若$a_n\in[-1,0]$，则$a_{n+1}=a_n^2-2a_n\in[0,3]$，

综上，当$a_1\in(2,3)$时，对于任意的正整数n，$a_n\leq3$，故C 正确；

对于 D，当$a_1\in(3,4)$时，则$a_2=a_1(a_1-2)>a_1>3$，

若$a_n>3$，则$a_{n+1}=a_n(a_n-2)>a_n>3$，故$\{a_n\}$递增，故 D 错误.

故选：C.

第二部分非选择题共 110 分

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】8

【分析】先求得双曲线的右焦点，结合抛物线的知识求得m的值.

【详解】双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，$c=\sqrt{3+1}=2$，右焦点$(2,0)$，

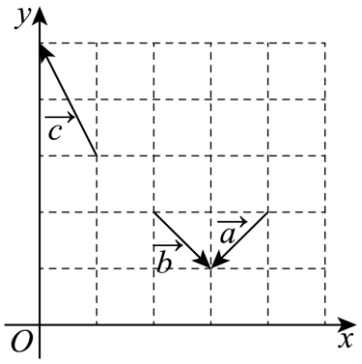
抛物线$y^2=mx$的焦点为$(2,0)$，所以$\frac{m}{4}=2,m=8$.

故答案为：8

12.【答案】 ①. 0 ②. -5

【分析】建立平面直角坐标系，写出向量的坐标，利用向量的坐标运算即可求解.

【详解】



如图,建立平面直角坐标系,则$\vec{a}=(-1,-1),\vec{b}=(1,-1),\vec{c}=(-1,2)$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1+1=0$，$2\vec{a}+\vec{b}=(-2,-2)+(1,-1)=(-1,-3),(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=1+2\times(-3)=-5$，

故答案为：0；-5

13.【答案】$\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）

【分析】首先求出平移后的函数图象解析式，再根据余弦函数的性质求出φ的取值.

【详解】将函数$f\left(x\right)=\cos\left(2x+\varphi\right)$的图象向右平移得到$y=\cos\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=\cos\left(2x+\varphi-\dfrac{2\pi}{3}\right)$的图象，

又$y=\cos\left(2x+\varphi-\dfrac{2\pi}{3}\right)$的图象关于原点对称，所以$\varphi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，

即$\varphi=\dfrac{7\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当$k=-1$时，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{6}$（答案不唯一）.

14.【答案】 ①. 3π ②. 39π

【分析】根据题意，求出A_3B_3所在圆的半径，求解A_3B_3的长度；当圆弧组成的曲线E与直线l恰有7个交点时，要使曲线E长度的最小，即由

$D_1A_2,A_2B_2,B_2C_2,C_2D_2,D_2A_3,A_3B_3,B_3C_3,C_3D_3,D_3A_4,A_4B_4,B_4C_4,C_4D_4$围成，运算得解.

【详解】由题可知，A_3B_3所在圆的半径为6，所以A_3B_3的长度即$\dfrac{1}{4}$个圆弧，

所以A_3B_3的长度为$\dfrac{1}{4}\times2\pi\times6=3\pi$；

当圆弧组成的曲线E与直线l恰有7个交点时，此时与直线l的交点为$D_1,D_2,D_3,D_4,B_2,B_3,B_4$，

曲线E长度的最小，即由下面12个圆弧围成，

$D_1A_2,A_2B_2,B_2C_2,C_2D_2,D_2A_3,A_3B_3,B_3C_3,C_3D_3,D_3A_4,A_4B_4,B_4C_4,C_4D_4$，

它们的圆弧半径依次为$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$，

所以曲线E长度的最小值为$\dfrac{1}{4}\times2\pi\times\left(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12\right)=39\pi$.

故答案为：3π；39π.

15.【答案】①③④

【分析】用$-y$代换方程中的y，方程不变，可判定①正确；设曲线C上的一点$P(x,y)$，求得点P到点$A\left(-1,0\right)$的距离为$\left|PA\right|^2=x^3+x^2+6$，可判定②不正确；当$x=1$和$x=2$时，求得交点坐标，结合梯形$PQNM$的面积为$5$，可得判定③正确；求得直线$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$，联立方程组，求得方程组的解，可判定④正确.

【详解】由曲线$C:y^2=x^3-2x+5$，

用$-y$代换方程中的y，方程不变，所以曲线C关于x轴对称，所以①正确；

设曲线C上的一点$P(x,y)$，其中$x<0$，

则点 P 到点 $A(-1,0)$ 的距离为 $|PA|^2=(x+1)^2+y^2=x^3+x^2+6$，

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，可得 $|PA|^2=\frac{1}{8}+6>6$，

所以点 P 到点 $A(-1,0)$ 的距离可以超过 $\sqrt{6}$，所以②不正确；

当 $x=1$ 时，可得 $y^2=4$，即 $y=\pm2$；

当 $x=2$ 时，可得 $y^2=9$，即 $y=\pm3$；

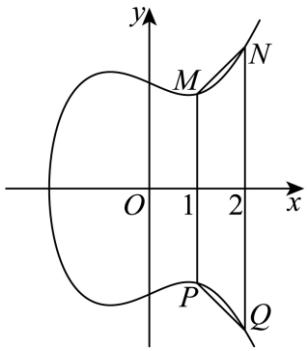
令 $f(x)=x^3-2x+5, x\in[1,2]$，可得 $f'(x)=3x^2-2>0$，所以 $f(x)$ 为增函数，

令 $g(x)=f'(x)=3x^2-2, x\in[1,2]$，可得 $g'(x)=6x>0$，所以 $g(x)$ 为单调递增函数，

所以 $f(x)$ 的增长趋势越来越快，可得曲线大致图象如图所示，

可得梯形 $PQNM$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot(4+6)\times1=5$，

所以曲线 C 与直线 $x=1, x=2$ 围成图形的面积小于 5，所以③正确；



过点 $B(1,2)$ 且与直线 $x-4y=0$ 平行的直线方程为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$，

联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\\ y^2=x^3-2x+5\end{cases}$，整理得 $16x^3-x^2-46x+31=0$，

整理得 $(x-1)^2(16x+31)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{31}{16}$，

当 $x=1$ 时，可得 $y=2$；当 $x=-\frac{31}{16}$ 时，可得 $y=\frac{81}{64}$，

所以经过点 $B(1,2)$ 且与 $x-4y=0$ 平行的直线与曲线 C 的所有交点的横、纵坐标均为有理数，所以④正确.

故答案为：①③④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 【答案】（1）$\angle B=\frac{\pi}{3}$

（2）$10\sqrt{3}$

【分析】对于（1），利用正弦定理将边化为角，再通过三角函数的运算求出角B；对于（2），先根据正弦定理求出c的值，再利用余弦定理求出a的值，最后根据三角形面积公式求解.

【详解】（1）由$2a\sin A\cos C+c\sin 2A=\sqrt{3}a$及正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得$2\sin A\sin A\cos C+2\sin C\sin A\cos A=\sqrt{3}\sin A$.

因为在$\triangle ABC$中，$\sin A\neq 0$，所以$2\sin\left(A+C\right)=\sqrt{3}$.

因为$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$\angle B$为锐角，所以$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，且$c\sin B=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$，解得$c=5$.

由余弦定理$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得$a^2-5a-24=0$，解得$a=8$或$a=-3$（舍）.

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 8\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\pi}{4}$

【分析】（1）先证明$AD\perp BD$，再由平面$PAD\perp$平面$ABCD$证明$BD\perp$平面PAD，即得线线垂直；

（2）选条件①，先根据线面平行的性质定理，推出E为PC的中点，建系后，求出相关点和向量的坐标，由空间向量的夹角公式计算即得；选条件②，由条件先证$OE\perp PC$，再证E为PC的中点，接着证$PD\perp$平面$ABCD$，取DC的中点Q，连接QE,OQ，证明$QE\perp$平面$ABCD$，求出QE,OQ，再证明$\angle EOQ$是平面BDE与平面$ABCD$夹角或补角，求解即得.

【小问1详解】

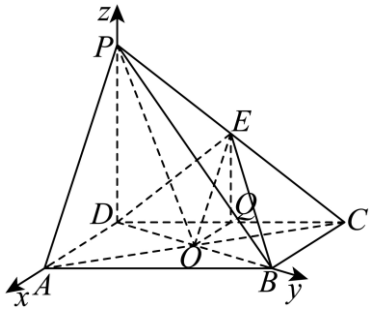
因为在$\triangle ABD$中，$AD=BD=2$，$AB=2\sqrt{2}$

所以$AD^2+BD^2=AB^2$．即$AD\perp BD$.

因平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

所以$BD\perp$平面PAD．又因$AP\subset$平面PAD，所以$AP\perp BD$.

【小问2详解】



选条件①：$AP//$平面BDE.

如图，因为$AP//$平面BDE，$AP\subset$平面PAC，

平面$PAC\cap$平面$BDE=OE$，所以$AP//OE$.

因为$ABCD$为平行四边形，O为AC的中点，所以E为CP的中点.

所以$AP=2OE=2\sqrt{2}$. 因为$AD=PD=2$，所以$AD^2+PD^2=AP^2$.

$AD\perp PD$. 由（1）已得$BD\perp$平面PAD，因$PD\subset$平面PAD，故$BD\perp PD$，

又$BD\perp AD$，即AD,BD,PD两两垂直.

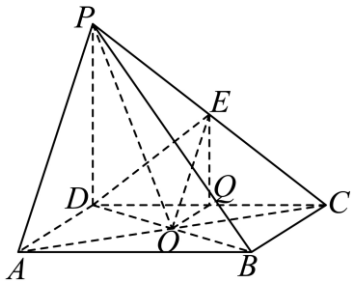
如图建立空间直角坐标系$D-xyz$，则$D(0,0,0),A(2,0,0),B(0,2,0),C(-2,2,0)$，

$P(0,0,2),E(-1,1,1)$，因此$\overrightarrow{DE}=(-1,1,1),\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$.

设平面BDE的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y+z=0,\\ 2y=0\end{cases}$.

令$x=1$，则$z=1$. 所以$\vec{m}=(1,0,1)$. 而平面$ABCD$的一个法向量$\vec{n}=(0,0,1)$.

$\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 所以平面$BDE$与平面$ABCD$夹角为$\dfrac{\pi}{4}$.



选条件②：$CE=\sqrt{3}$.

如图，由（1）得$AD\perp BD$，则$OC=OA=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

又$OE=\sqrt{2}$，由$OE^2+CE^2=OC^2$，可得$OE\perp PC$，因$PO=\sqrt{5}=OC$，则E为PC的中点，

则$OE=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{2}$，即$PA=2\sqrt{2}$，可得$PD\perp AD$，

因平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$PD\subset$平面PAD，故$PD\perp$平面$ABCD$.

取 DC 的中点 Q，连接 QE,OQ，则 $QE//PD$，故 $QE\perp$ 平面 $ABCD$，因 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，则 $QE\perp BD$，

又 $QE=\frac{1}{2}PD=1$，$OQ=\frac{1}{2}AD=1$，且 $OQ\perp BD$，

又 $OQ\cap QE=Q,OQ,QE\subset$ 平面 OQE，故 $BD\perp$ 平面 OQE，

因 $OE\subset$ 平面 OQE，则 $BD\perp OE$，即 $\angle EOQ$ 是平面 BDE 与平面 $ABCD$ 夹角或补角，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OQE$ 中，$QE=OQ$，则 $\angle EOQ=\frac{\pi}{4}$，故平面 BDE 与平面 $ABCD$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

18.【答案】（1）500

（2）分布列见解析；期望为 $\frac{9}{7}$

（3）$D(Y_1)>D(Y_2)$

【分析】（1）根据频数分布表，结合分层抽样的定义进行求解即可；

（2）根据古典型概率公式，结合数学期望的公式进行求解即可；

（3）根据二项分布求得方差判断即可.

【小问 1 详解】

根据题中数据，$4+38+48+a+6+3+29+28+17+3=200$，得 $a=24$.

样本中使用此听说平台进行英语口语自主练习的次数不低于 30 次的频率为 $\frac{24+6+3+17}{200}=\frac{1}{4}$.

因此近一个月内全校学生中使用此听说平台进行英语口语自主练习的次数不低于 30 次的总人数估计为：

$(1200+800)\times\frac{1}{4}=500$.

【小问 2 详解】

参与问卷调查且使用此听说平台进行英语口语自主练习次数不足 10 次的学生中，初中生有 4 人，高中生有 3 人.

所以 X 的取值范围为 $\{0,1,2,3\}$.

$$P(X=0)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35},P(X=1)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35},P(X=3)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

X 的数学期望 $E(X)=\frac{4}{35}\times0+\frac{18}{35}\times1+\frac{12}{35}\times2+\frac{1}{35}\times3=\frac{9}{7}$.

【小问 3 详解】

$D(Y_1)>D(Y_2)$，理由如下：

根据分层抽样定义知，随机抽取 200 名学生种，初中生为 120 名，高中生为 80 名，

抽到初中生使用此听说平台进行英语口语自主练习次数位于 $[20,30)$ 的频率为 $\frac{48}{120}=0.4$，

抽到初中生使用此听说平台进行英语口语自主练习次数位于 $[20,30)$ 的频率为 $\frac{28}{80}=0.35$，

该校初中生和高中生中各随机抽取 8 名学生进行调查服从二项分布，

即 $Y_1\sim B(8,0.4),Y_2\sim B(8,0.35)$，

所以 $D(Y_1)=np(1-p)=8\times0.4\times0.6=1.92$，$D(Y_2)=np(1-p)=8\times0.35\times0.65=1.82$，

因为 $1.92>1.82$，所以 $D(Y_1)>D(Y_2)$.

19. 【答案】（1）$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）存在；$m=3$

【分析】（1）利用椭圆的性质，结合面积公式可列出方程组求解椭圆各参数即求解；

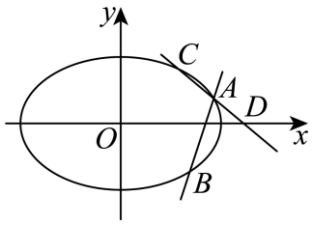
（2）利用直线与椭圆联立方程组，设交点坐标，假设存在点 $D(m,0)$，则可得相等关系 $k_{AD}-k_{CD}=0$，然后利用韦达定理来进行化简，计算即可得结果.

【小问 1 详解】

由题意得 $\begin{cases}2a=2\sqrt{6},\\2bc=6,\\a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{6},b=\sqrt{3},c=\sqrt{3}$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问 2 详解】



直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，设点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\x^2+2y^2=6\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-6=0$.

依据题意，$\Delta>0$．$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{8k^2-6}{1+2k^2}.$

因为点C与点B关于x轴对称，所以点$C\left(x_2,-y_2\right)$．

若在x轴上存在定点$D\left(m,0\right)$，使A,D,C三点共线，则$k_{AD}-k_{CD}=0$．

$$k_{AD}-k_{CD}=\frac{y_1}{x_1-m}-\frac{-y_2}{x_2-m}=\frac{y_1\left(x_2-m\right)+y_2\left(x_1-m\right)}{x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2}$$

$$=\frac{k\left(x_1-2\right)\left(x_2-m\right)+k\left(x_2-2\right)\left(x_1-m\right)}{x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2}$$

$$=\frac{k\left[2x_1x_2-\left(m+2\right)\left(x_1+x_2\right)+4m\right]}{x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)+m^2}$$

由$k_{AD}-k_{CD}=0$，得$k\left[2x_1x_2-\left(m+2\right)\left(x_1+x_2\right)+4m\right]=0$．

由$k\neq0$，得$2x_1x_2-\left(m+2\right)\left(x_1+x_2\right)+4m=0$．

因为$2x_1x_2-\left(m+2\right)\left(x_1+x_2\right)+4m$

$$=2\times\frac{8k^2-6}{1+2k^2}-\left(m+2\right)\frac{8k^2}{1+2k^2}+4m$$

$$=\frac{16k^2-12-8mk^2-16k^2+4m+8mk^2}{1+2k^2}$$

$$=\frac{-12+4m}{1+2k^2},$$

则$k\dfrac{-12+4m}{1+2k^2}=0$，由于对任意$k$恒成立，

所以$-12+4m=0$，解得$m=3$．

则在x轴上存在定点$D\left(3,0\right)$，使A,C,D三点共线．

20.【答案】（1）① e^3；②证明见解析

（2）$(0,\dfrac{\mathrm{e}}{2}]$

【分析】（1）把$a=0,b=0$代入，①利用导数探讨单调性求出最大值；②设出切点坐标，利用导数的几何意义求出切线方程，再由切线过的点，结合一元二次方程有解推理得证.

（2）求出导数，由给定的极小值点可得$a=2b$，且$f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-2bx)$，构造函数$g(x)=\mathrm{e}^x-2bx$，按$g(x)$最小值不小于0和小于0分类讨论求解.

【小问1详解】

（i）当$a=0,b=0$时，函数$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，求导得$f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$，

当$x<1$时，$f'(x)<0$；当$1<x\leq3$时，$f'(x)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，且 $f(x)<0$，在 $(1,3]$ 上单调递增，又 $f(3)=\mathrm{e}^3$

所以当 $x\le 3$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(3)=\mathrm{e}^3$.

（ii）设切点为 $(x_0,f(x_0))$，而 $f(x_0)=(x_0-2)\mathrm{e}^{x_0}$，$f'(x_0)=(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线 l 方程为 $y-(x_0-2)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$

由 l 经过点 $(t,0)$，得 $-(x_0-2)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}(t-x_0)$，整理得 $x_0^2-(t+2)x_0+t+2=0$，

由 $\Delta=(t+2)^2-4(t+2)\ge 0$，得 $t^2\ge 4$，所以 $|t|\ge 2$.

【小问 2 详解】

函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{3}x^3+bx^2$ 的定义域为 R，求导得 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-ax^2+2bx$，

由 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，得 $f'(1)=-a+2b=0$，即 $a=2b$，

则 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-2bx^2+2bx=(x-1)(\mathrm{e}^x-2bx)$，令 $g(x)=\mathrm{e}^x-2bx$，

求导得 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2b$，令 $g'(x)=0$，即 $\mathrm{e}^x-2b=0$，$b>0$，得 $x=\ln(2b)$，

当 $x\in(-\infty,\ln(2b))$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(\ln(2b),+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2b))$ 上单调递减，在 $(\ln(2b),+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(\ln(2b))=\mathrm{e}^{\ln(2b)}-2b\ln(2b)=2b(1-\ln(2b))$，

①当 $g(\ln(2b))\ge 0$ 时，即 $1-\ln(2b)\ge 0$ 时，得 $0<b\le\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，此时 $g(x)\ge 0$，

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)\le 0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，符合题意；

②当 $g(\ln(2b))<0$ 时，即 $1<\ln(2b)$ 时，则 $b>\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，而 $g(1)=\mathrm{e}-2b<0, g(0)=\mathrm{e}^0-0>0$，

则存在 $x_1\in(0,1)$，使 $g(x_1)=0$，当 $x\in(x_1,1)$ 时，$g(x)<0, f'(x)>0$，

因此 $x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点，不符合题意，

所以 b 的取值范围为 $(0,\dfrac{\mathrm{e}}{2}]$.

21.【答案】（1）$(1,2),(1,7),(6,7)$

（2）证明见解析　（3）$p=m^2+m+1$

【分析】（1）根据可分数列的定义可得出合乎条件的 (i,j)；

（2）对 m 进行讨论：①$m=3$，去掉 a_2,a_{16} 后，按照可分数列的定义进行列举即可；②$m>3$ 时，去掉 a_2,a_{16} 后，前 15 项按①中的分组，后面的项按原顺序每 5 项分为一组，结合可分数列的定义可证得结论成

立. 综合可得结论；

（3）设数列A的公差为d，将数列A表示为：

$a_1,a_2,\cdots,a_{5k+1},a_{5k+2},\cdots,a_{5n+1},a_{5n+2},\cdots,a_{5m+2}\left(0\le k\le n\le m\right)$．分两种情况讨论：①$0\le k\le n\le m$；②$0\le k<n\le m$.结合可分数列的定义，求出每种情况下“$k,m$”的个数，可得出$(i,j)$的个数，然后再结合可分数列的定义验证即可.

【小问1详解】

根据题意，(i,j)可以为$(1,2),(1,7),(6,7)$.

【小问2详解】

设数列$a_1,a_2,\ldots,a_{5m+2}$的公差为$d\left(d\ne0\right)$.

当$m=3$时，去掉a_2,a_{16}后，剩余15项按照：$a_1,a_4,a_7,a_{10},a_{13};a_3,a_6,a_9,a_{12},a_{15}$；$a_5,a_8,a_{11},a_{14},a_{17}$分为三组（*），每组都是公差为$3d$的等差数列.

当$m>3$时，去掉a_2,a_{16}后，前15项按如上（*）分组；后面的项按原顺序每5项分为一组，每组都是公差为d的等差数列.

综上，数列$a_1,a_2,\ldots,a_{5m+2}$是$(2,16)$的可分数列.

【小问3详解】

若数列$A:a_1,a_2,\ldots,a_{5m+2}$是$(i,j)$的可分数列，设其公差为$d$，

将数列A表示为：$a_1,a_2,\cdots,a_{5k+1},a_{5k+2},\cdots,a_{5n+1},a_{5n+2},\cdots,a_{5m+2}\left(0\le k\le n\le m\right)$.

①当$0\le k\le n\le m$时，可以去掉数列A中的项a_{5k+1}和a_{5n+2}，其余项顺序保持不变，

从前往后按原顺序每5项分为一组，每组均为公差为d的等差数列，

所以数列A是$(5k+1,5n+2)$的可分数列.

其中，符合$0\le k\le n\le m$的一组“k,m”的取值有C_{m+1}^2+m+1个.

②当$0\le k<n\le m$时，且$n-k\ge2$时，可以去掉数列中的a_{5k+2}和a_{5n+1}.

若$0<k<n<m$，则数列A分组为：$\underset{(A)}{a_1,a_2,\cdots,a_{5k}}$，$\underset{(B)}{a_{5k+1},a_{5k+3},\cdots,a_{5n},a_{5n+2}}$ $\underset{(C)}{a_{5n+3},a_{5n+4}\cdots,a_{5m+2}}$，

其中(A)、(C)部分按原顺序每5项分为一组，每组均为公差为d的等差数列；

(B)部分按照被$n-k$除所得余数分组，余数相同的每组数按序号从小到大每5项分为一组，

则每组数均为等差数列，公差为$(n-k)d$.

若$k=0$或$n=m$，由上述证明，数列A仍可分为m组等差数列.

所以数列A是$(5k+2,5n+1)$的可分数列.

而符合$0\le k<n\le m$的一组“k,m”的取值有C_{m+1}^2-m个.

满足上述两类的(i,j)的个数为$C_{m+1}^2+m+1+C_{m+1}^2-m=m^2+m+1$.

设$r=0,1,2,3,4$，记$D_r=\{a_i|\ i=5j+r,j\in\mathbf{N},i\in\mathbf{N}^*,i\le 5m+2\}$，

用$\tilde{A}$表示数列A中的项组成的集合（下同）.

则$\tilde{A}=D_0\cup D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$，且$D_1,D_2$中元素个数均为$m+1$，$D_0,D_3,D_4$中元素个数均为$m$.

由题意，数列A去掉a_i和a_j两项后可分为每5项一组的等差数列共m组，

记为$\tilde{A}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，对应的公差为d_i，则$\tilde{A}=\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_2\cup\tilde{A}_3\cup\cdots\cup\tilde{A}_m\cup\{a_i,a_j\}$.

考虑d_i被5除所得余数：

当$d_i=5j(j\in\mathbf{Z})$时，数列A_i中的5项均在某一个D_0,D_1,D_2,D_3,D_4中；

当$d_i=5j+t(j\in\mathbf{Z},t=1,2,3,4)$时，数列$A_i$中的5项分别在$D_0,D_1,D_2,D_3,D_4$中，

且没有两项在同一个$D_r(r=0,1,2,3,4)$中，所以$a_i\in D_1,a_j\in D_2$，或$a_i\in D_2,a_j\in D_1$.

综上，所有满足条件的(i,j)的个数$p=m^2+m+1$.