2025 北京丰台高三二模

数　　学

2025. 05

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分　选择题（共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{x\,|\,-1<x<2\}$，$B=\{x\,|\,(x-1)(x-3)>0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{x\,|\,-1<x<1\}$　　（B）$\{x\,|\,1<x<2\}$

（C）$\{x\,|\,-1<x<2\}$　　（D）$\{x\,|\,-1<x<3\}$

2．在复平面内，复数 $z=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

3．已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

4．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=0$，$a_{n+1}+2S_n=n$，则 $a_5=$

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

5．已知直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A,B 两点．当 k 变化时，则 $|AB|$

（A）有最小值 $2\sqrt{3}$　　（B）有最大值 $2\sqrt{3}$

（C）有最小值 $\sqrt{3}$　　（D）有最大值 $\sqrt{3}$

6．已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的两实根为 x_1，x_2，则“$|x_1|=|x_2|$”是“关于 x 的不等式 $x^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$”的

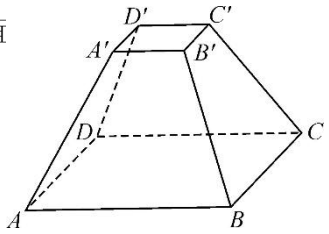
（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7．已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l．过 F 的直线与 C 交于 A,B 两点，过 A,B 作 l 的垂线，垂足分别为 A',B'．若四边形 $AA'B'B$ 的周长等于 $\dfrac{5}{2}|AB|$，则直线 AB 的斜率为

（A）$\pm\frac{1}{2}$　　（B）±2　　（C）$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\pm\sqrt{3}$

8．如图，在棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，底面 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 为正方形，$AB=3$，$A'B'=1$，侧面均为等腰梯形，且侧面与底面 $ABCD$ 的夹角均为 $45°$，则该棱台的表面积为



（A）18　　（B）$10+8\sqrt{2}$

（C）$10+8\sqrt{3}$　　（D）34

9．“红移”和“蓝移”是物理学和天文学中的概念．如果接收器接收到的光波的频率小于波源发出的光波的频率，则光的谱线向红光方向移动，称为“红移”；如果接收器接收到的光波的频率大于波源发出的光波的频率，则光的谱线向蓝光方向移动，称为“蓝移”．记接收器接收到的光波的频率为正数 f'，波源发出的光波的频率为正数 f，f' 和 f 满足光的普遍多普勒效应公式 $f'=f\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$（$\beta\in(0,1)$ 为波源运动速率与光速的比值，$\theta\in[0,\pi]$ 为波源到接收器的方向与波源运动方向的夹角）．某同学依据该公式利用 AI 工具制作了“光的普遍多普勒效应计算器”，在给定范围内输入 β 和 θ 的值，点击“计算”按钮后，运行结果显示“红移”、“蓝移”或“无频移”．下列说法正确的是

（A）输入 $\theta=0$ 和任意 β，运行结果显示“红移”

（B）输入 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 和任意 β，运行结果显示“蓝移”

（C）输入 $\beta=\frac{4}{5}$ 和任意 $\theta>\frac{\pi}{6}$，运行结果显示“红移”

（D）输入 $\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 和任意 $\theta<\frac{\pi}{4}$，运行结果显示“蓝移”

10．已知 $M=\{(x,y)\mid y=t\log_2 x-t+1,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点集．设 d 是 M 中两点间距离的最大值，k 是 M 中的点与原点 O 连线的斜率，S 是 M 表示的图形的面积，给出下列四个结论：

①$(\sqrt{2},\frac{1}{2})\in M$；　②$d=\sqrt{2}$；　③$k\in[0,\frac{1}{2}]$；　④$S<\frac{1}{2}$．

其中所有正确结论的个数为

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

第二部分　非选择题（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}}$ 的定义域为__.

12．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，则 C 的渐近线方程为__.

13．已知直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 为函数 $f(x)=\cos(\omega x+\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$ 图象的一条对称轴，则满足条件

的一个 ω 的取值为__；若 $f(x)$ 在区间 $(-\dfrac{\pi}{3},0)$ 上有零点，则 ω 的最小值为__.

14．已知 $(x-1)^2(2x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_6x^6$，则 $a_1=$__；$a_1+a_3+a_5=$__.

（用数字作答）

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=k\sqrt{a_n+1}-1(k>0)$，给出下列四个结论：

①存在唯一的正实数 k，使得 $\{a_n\}$ 是常数列；

②当 $k=1$ 时，$\{\log_2(a_n+1)\}$ 是等比数列；

③若 $\{a_n\}$ 是递增数列，则 $k\in(0,\sqrt{2})$；

④若对任意的正整数 n，都有 $a_n<3$，则 $k\in(0,2]$.

其中所有正确结论的序号为__.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（本小题 13 分）

在△ ABC 中，$\sqrt{3}c\sin B+b\sin 2C=0$.

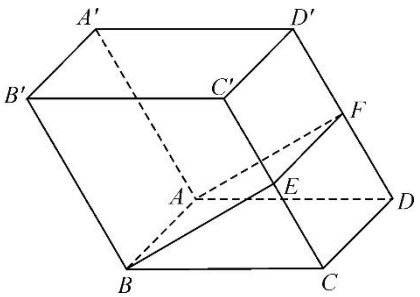
（Ⅰ）求 $\angle C$；

（Ⅱ）若 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，求 AB 边上的高.

17．（本小题 14 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，底面 $ABCD$ 与侧面 $ADD'A'$ 均为菱形，

$AB\perp$ 平面 $ADD'A'$，$AD=2$，E 为 CC' 的中点，DD' 与平面 ABE 交于点 F.



（Ⅰ）求证：F 为 DD' 的中点；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，判断在线段 $A'C$ 上是否存在点 G，使得直线 AG 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{4}$？若存在，求 $\dfrac{A'G}{A'C}$ 的值；若不存在，说明理由．条件①：$AD=AD'$；

条件②：$DD' \perp BF$.

注：如果选择条件①、条件②分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 13 分）

为调查某校学生户外活动时长和视力的关系，某研究小组在该校随机选取了 100 名学生，记录他们的日均户外活动时长（单位：小时）及近视情况，统计得到：日均户外活动时长在区间$[0,1)$内有 70 人，近视率为 80%；日均户外活动时长在区间$[1,2)$内有 20 人，近视率为 40%；日均户外活动时长在区间$[2,3]$内有 10 人，近视率为 20%.

注：近视率是指某区间内近视人数与该区间内人数的比值.

（Ⅰ）估计该校日均户外活动时长不低于 1 小时的学生的近视率；

（Ⅱ）用频率估计概率. 从该校日均户外活动时长低于 1 小时的学生和不低于 1 小时的学生中各随机选取 2 名，求这 4 名学生中恰有 2 名近视的概率；

（Ⅲ）为响应国家降低青少年近视率的号召，该校提出“护眼有妙招，科学动起来”的口号，计划在以下 2 项措施中选择 1 项实施.

措施一：每日给全校学生增设 0.5 小时晨跑活动；

措施二：每日给日均户外活动时长低于 1 小时的学生增设 1 小时户外活动.

假设所有学生都能按要求参加相应活动，记采取措施一后该校全体学生的日均户外活动时长的平均值为$\overline{x}$，采取措施二后该校全体学生的日均户外活动时长的平均值为$\overline{y}$. 用样本估计总体，试比较$\overline{x}$与$\overline{y}$的大小.（结论不要求证明）

19.（本小题 15 分）

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A(-2,0)$，焦距为$2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）设O为原点，过点A且斜率为k的直线l与椭圆E的另一个交点为T，线段AT的垂直平分线与x轴交于点M，与y轴交于点N. 过点$P(1,0)$且与l平行的直线与y轴交于点Q. 若$\triangle OMN$与$\triangle NPQ$的面积之比为$4:3$，求k的值.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=(x^3+2x^2)\mathrm{e}^{ax+b}(a,b\in\mathbf{R})$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=1$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $f(x)\leqslant -x^2-2x$，求 x 的取值范围.

21.（本小题 15 分）

设数列 $\{a_n\}$ 是 $1,2,\cdots,n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的一个排列．由 $\{a_n\}$ 中连续 r 项组成的集合称作“$\{a_n\}$ 的长为 r 的子列集”，其中 $1\leqslant r\leqslant n$．任取不大于 n 的正整数 s,t，当 $st\geqslant n$ 时，若数列 $\{a_n\}$ 的任意长为 s 的子列集 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$ 和数列 $1,2,\cdots,n$ 的任意长为 t 的子列集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_t\}$，都有 $B\cap C\neq\varnothing$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“好数列”.

（Ⅰ）判断下列数列是否为“好数列”：

①$1,3,5,2,4$；②$1,4,6,2,5,3$.

（Ⅱ）证明：由 $1,2,\cdots,n$ 的排列构成的所有“好数列”中，存在首项不超过 $[\frac{n+1}{2}]$ 的“好数列”（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 为“好数列”，求 n 的最大值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	B	A	B	C	B	D	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $(0,1)$　　12. $y=\pm\sqrt{3}x$　　13. 1（答案不唯一）；4

14. -10；-162　　15. ①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）在△ ABC 中，因为 $\sqrt{3}c\sin B+b\sin 2C=0$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 及 $\sin 2C=2\sin C\cos C$，得

$\sqrt{3}\sin C\sin B+2\sin B\sin C\cos C=0$，

因为 $\sin B\neq 0,\sin C\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}+2\cos C=0$，

所以 $\cos C=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\angle C=\frac{5\pi}{6}$.　　.....6 分

（Ⅱ）因为 $\angle C=\frac{5\pi}{6}$，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得

$c^2=1+3-2\times 1\times\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=7$，

所以 $c=\sqrt{7}$.

设 AB 边上的高为 h，

又△ ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ch$，

所以 $h=\frac{ab\sin C}{c}=\frac{1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$，

所以 AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$.　　.....13 分

17.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）在菱形 $ABCD$ 中，$CD\parallel AB$.

因为 $CD \not\subset$ 平面 $ABEF$， $AB \subset$ 平面 $ABEF$，

所以 $CD \parallel$ 平面 $ABEF$.

又 $CD \subset$ 平面 $CDD'C'$，平面 $CDD'C' \cap$ 平面 $ABEF = EF$，

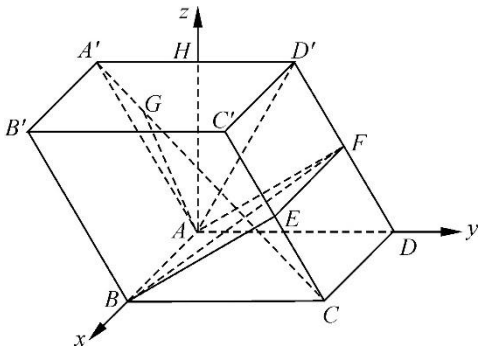
所以 $CD \parallel EF$.

又四棱柱 $ABCD - A'B'C'D'$ 中， $CE \parallel DF$，

所以四边形 $CEFD$ 为平行四边形.

所以 $DF = CE = \frac{1}{2}CC' = \frac{1}{2}DD'$，所以 F 为 DD' 的中点. .....5 分

（Ⅱ）选择条件①：



取 $A'D'$ 中点 H，连接 AH.

在菱形 $ADD'A'$ 中， $AA' = A'D' = AD$.

因为 $AD = AD'$，

所以△ $AA'D'$ 为等边三角形.

因为 H 为 $A'D'$ 中点，

所以 $AH \perp A'D'$，故 $AH \perp AD$.

因为 $AB \perp$ 平面 $ADD'A'$，且 AD， $AH \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB \perp AD$， $AB \perp AH$.

所以 AB， AD， AH 两两垂直. 如图建立空间直角坐标系 $A - xyz$，

则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $A'(0,-1,\sqrt{3})$, $F(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

所以 $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$, $\overrightarrow{AF} = (0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{AA'} = (0,-1,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{A'C} = (2,3,-\sqrt{3})$.

设平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x = 0, \\ \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0. \end{cases}$

令 $z = \sqrt{3}$， 则 $x = 0, y = -1$. 于是 $\boldsymbol{n} = (0,-1,\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{A'G} = \lambda \overrightarrow{A'C} = (2\lambda, 3\lambda, -\sqrt{3}\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

所以 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = (2\lambda, 3\lambda - 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$.

设直线 AG 与平面 ABE 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta = |\cos < \overrightarrow{AG}, \boldsymbol{n} >| = \frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AG}||\boldsymbol{n}|} = \frac{|4 - 6\lambda|}{4\sqrt{4\lambda^2 - 3\lambda + 1}} = \frac{3}{4}$.

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$.

所以存在符合条件的点 G，$\dfrac{A'G}{A'C}=\dfrac{1}{3}$.　　.....14 分

选择条件②：

取 $A'D'$ 中点 H，连接 AH.

因为 $AB\perp$ 平面 $ADD'A'$，且 AD，DD'，$AH\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp AD$，$AB\perp DD'$，$AB\perp AH$.

又 $DD'\perp BF$，且 AB，$BF\subset$ 平面 $ABEF$，$AB\cap BF=B$，

所以 $DD'\perp$ 平面 $ABEF$.

因为 $AF\subset$ 平面 $ABEF$，

所以 $DD'\perp AF$.

又因为 F 为 DD' 中点，

所以 $AD=AD'$.

在菱形 $ADD'A'$ 中，$AA'=A'D'=AD$，

所以△ $AA'D'$ 为等边三角形.

所以 $AH\perp A'D'$，故 $AH\perp AD$.

所以 AB，AD，AH 两两垂直. 如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$A'(0,-1,\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A'C}=(2,3,-\sqrt{3})$.

因为 $DD'\perp$ 平面 $ABEF$，

所以取平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{DD'}=(0,-1,\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{A'G}=\lambda\overrightarrow{A'C}=(2\lambda,3\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，

所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=(2\lambda,3\lambda-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

设直线 AG 与平面 ABE 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AG},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AG}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|4-6\lambda|}{4\sqrt{4\lambda^2-3\lambda+1}}=\dfrac{3}{4}$.

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

所以存在符合条件的点 G，$\dfrac{A'G}{A'C}=\dfrac{1}{3}$.　　.....14 分

18.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由题意，样本中日均户外活动时长不低于 1 小时的学生有 20+10=30 人，

其中近视的学生有 $20\times0.4+10\times0.2=10$ 人，

所以估计该校日均户外活动时长不低于 1 小时学生的近视率为 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. .....4 分

（Ⅱ）设事件 A=“从该校日均户外活动时长低于 1 小时的学生和不低于 1 小时的学生中各随机选取 2 名，这 4 名学生中恰有 2 名近视”.

由题意，从该校日均户外活动时长低于 1 小时的学生中随机选取 1 名，这名学生近视的概率为 $\frac{4}{5}$，从该校日均户外活动时长不低于 1 小时的学生中随机选取 1 名，这名学生近视的概率为 $\frac{1}{3}$.

则 $P(A)=(\frac{4}{5})^2\times(1-\frac{1}{3})^2+C_2^1\times\frac{4}{5}\times(1-\frac{4}{5})\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{4}{5})^2(\frac{1}{3})^2=\frac{97}{225}$.

.....11 分

（Ⅲ）$\overline{x}<\overline{y}$. .....13 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意 $\begin{cases}a=2,\\2c=2\sqrt{2},\\a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $c=\sqrt{2},b=\sqrt{2}.$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. .....5 分

（Ⅱ）由题意，直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$（$k\neq0$），

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\y=k(x+2)\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$.

由题意，$\Delta>0$.

设 $T(x_0,y_0)$，则 $-2x_0=\frac{8k^2-4}{1+2k^2}$，

解得 $x_0=\frac{-4k^2+2}{1+2k^2}$，$y_0=k(\frac{-4k^2+2}{1+2k^2}+2)=\frac{4k}{1+2k^2}$，

所以线段 AT 的中点为 $(\frac{-4k^2}{1+2k^2},\frac{2k}{1+2k^2})$.

线段 AT 垂直平分线的方程为：$y-\frac{2k}{1+2k^2}=-\frac{1}{k}(x+\frac{4k^2}{1+2k^2})$,

令 $y=0$ 得 $x=\frac{-2k^2}{1+2k^2}$，所以 $M(\frac{-2k^2}{1+2k^2},0)$.

令 $x=0$ 得 $y=\frac{-2k}{1+2k^2}$，所以 $N(0,\frac{-2k}{1+2k^2})$.

所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|\frac{-2k}{1+2k^2}|\cdot|\frac{-2k^2}{1+2k^2}|=\frac{1}{2}|\frac{4k^3}{(1+2k^2)^2}|$.

因为过点 $P(1,0)$ 与直线 l 平行的直线的方程为 $y=k(x-1)$，故 $Q(0,-k)$

所以 $S_{\triangle NPQ}=\frac{1}{2}|\frac{-2k}{1+2k^2}-(-k)|=\frac{1}{2}|\frac{k(2k^2-1)}{1+2k^2}|$.

因为 $\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle NPQ}}=\frac{4}{3}$，

所以 $\frac{\frac{1}{2}|\frac{4k^3}{(1+2k^2)^2}|}{\frac{1}{2}|\frac{k(2k^2-1)}{1+2k^2}|}=\frac{4}{3}$，整理得 $3k^2=|4k^4-1|$.

若 $4k^4>1$，则 $4k^4-3k^2-1=0$，解得 $k^2=1$，故 $k=\pm1$；

若 $4k^4\leqslant1$，则 $4k^4+3k^2-1=0$，解得 $k^2=\frac{1}{4}$，故 $k=\pm\frac{1}{2}$.

综上，$k=\pm1$ 或 $\pm\frac{1}{2}$. .....15 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=(x^3+2x^2)\mathrm{e}^{ax+b}(a,b\in\mathbf{R})$，

所以 $f'(x)=(ax^3+2ax^2+3x^2+4x)\mathrm{e}^{ax+b}=[ax^3+(2a+3)x^2+4x]\mathrm{e}^{ax+b}$.

由题意 $\begin{cases}f'(-1)=(a-1)\mathrm{e}^{-a+b}=0,\\ f(-1)=\mathrm{e}^{-a+b}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$ .....5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=(x^3+2x^2)\mathrm{e}^{x+1}$，$f'(x)=(x^3+5x^2+4x)\mathrm{e}^{x+1}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，$x=-1$，$x=-4$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表所示：

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-32\mathrm{e}^{-3}$	单调递增	1	单调递减	0	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-4,-1)$，$(0,+\infty)$，

单调递减区间为 $(-\infty,-4)$，$(-1,0)$. .....11 分

（Ⅲ）设 $g(x)=f(x)-(-x^2-2x)=(x^3+2x^2)\mathrm{e}^{x+1}+x^2+2x=(x^2+2x)(x\mathrm{e}^{x+1}+1)$.

设 $h(x)=x\mathrm{e}^{x+1}+1$，则 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$.

当 $x>-1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)>h(-1)=0$；

当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$h(x)>h(-1)=0$.

所以 $h(x)=xe^{x+1}+1\geqslant 0$ 恒成立.

由题意， $g(x)\leqslant 0$ 等价于 $\begin{cases}h(x)>0,\\ x^2+2x\leqslant 0\end{cases}$ 或 $h(x)=0$，

解得 $\begin{cases}x\neq -1,\\ -2\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$ 或 $x=-1$.

综上， x 的取值范围是 $[-2,0]$. .....15 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）①是“好数列”；②不是“好数列”. .....4 分

（Ⅱ）若 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 是“好数列”，对满足 $st\geqslant n$ 的正整数 s,t ，数列 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 的任意长为 s 的子列集 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$ 和数列 $1,2,\cdots,n$ 的任意长为 t 的子列集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_t\}$，都有 $B\cap C\neq\varnothing$，即存在 $b_i=c_j(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t)$.

令 $B'=\{n+1-b_1,n+1-b_2,\cdots,n+1-b_s\}$

与 $C'=\{n+1-c_1,n+1-c_2,\cdots,n+1-c_t\}$，

于是集合 B' 和 C' 也分别是数列 $\{a_n\}$ 和数列 $1,2,\cdots,n$ 的子列集，

又存在 $b_i=c_j(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t)$，得 $n+1-b_i=n+1-c_j(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t)$.

因此 $B'\cap C'\neq\varnothing$.

所以，数列 $n+1-a_1,n+1-a_2,\cdots,n+1-a_n$ 也是“好数列”.

设 a_1 与 $n+1-a_1$ 中较小者为 m，则 $m\leqslant a_1$ 且 $m\leqslant n+1-a_1$，

因此 $2m\leqslant a_1+n+1-a_1=n+1$ 即 $m\leqslant\dfrac{n+1}{2}$，

于是 $m\leqslant[\dfrac{n+1}{2}]$，

所以存在首项不超过 $[\dfrac{n+1}{2}]$ 的“好数列”. .....9 分

（Ⅲ） n 的最大值为 7.

(1)先考虑 $n=2m(m\geqslant 3)$.

假设存在“好数列” $a_1,a_2\cdots,a_{2m}$.

由（Ⅱ）可知，不妨设 $a_1\leqslant m$.

若 $a_1=1$，则由长为 m 的子列集 $\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$ 和 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{2m}\}$ 与集合 $\{1,2\}$ 的交集非空，知 $a_{m+1}=2$，即此“好数列”为： $1,a_2,\cdots,a_m,2,a_{m+2},\cdots,a_{2m}$.

又 $3(m-1)=2m+(m-3)\geqslant n$，长为 $m-1$ 的子列集 $\{a_2,\cdots,a_m\}$ 和 $\{a_{m+2},\cdots,a_{2m}\}$ 与集合 $\{1,2,3\}$ 的交集非空.

所以 $3\in\{a_2,\cdots,a_m\}$ 且 $3\in\{a_{m+2},\cdots,a_{2m}\}$， 与 $\{a_2,\cdots,a_m\}\bigcap\{a_{m+2},\cdots,a_{2m}\}=\varnothing$ 矛盾.

若 $a_1=k>1$，则由长为 m 的子列集 $\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1}\}$ 和 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{2m}\}$ 与集合 $\{k-1,k\}$ 的交集非空，知 $a_{m+1}=k-1$；

又与集合 $\{k,k+1\}$ 的交集非空，知 $a_{m+1}=k+1$，矛盾.

(2)再考虑 $n=2m+1(m\geqslant 4)$.

假设存在“好数列” $a_1,a_2\cdots,a_{2m+1}$.

由（Ⅱ）可知，不妨设 $a_1\leqslant m+1$.

若 $a_1=1$，则由长为 $m+1$ 的子列集 $\{a_2,a_3,\cdots,a_{m+1},a_{m+2}\}$ 和 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{2m+1}\}$ 与集合 $\{1,2\}$ 的交集非空，知 $2\in\{a_{m+1},a_{m+2}\}$.

又 $3(m-1)=2m+1+(m-4)\geqslant n$，长为 $m-1$ 的子列集 $\{a_2,\cdots,a_m\}$ 和 $\{a_{m+3},\cdots,a_{2m+1}\}$ 与集合 $\{1,2,3\}$ 的交集非空.

所以 $3\in\{a_2,\cdots,a_m\}$ 且 $3\in\{a_{m+3},\cdots,a_{2m+1}\}$，与 $\{a_2,\cdots,a_m\}\bigcap\{a_{m+3},\cdots,a_{2m+1}\}=\varnothing$ 矛盾.

若 $a_1=k>1$，则由长为 $m+1$ 的子列集 $\{a_2,\cdots a_{m+1},a_{m+2}\}$ 和 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{2m+1}\}$ 与集合 $\{k-1,k\}$ 的交集非空，知 $k-1\in\{a_{m+1},a_{m+2}\}$；

又与集合 $\{k,k+1\}$ 的交集非空，知 $k+1\in\{a_{m+1},a_{m+2}\}$，

此时，长为 $m-1$ 的子列集 $\{a_2,\cdots,a_m\}\bigcap\{k-1,k,k+1\}=\varnothing$，矛盾.

所以，当 $n\geqslant 8$ 时，不存在“好数列”.

又数列 $1,4,6,2,5,3,7$ 是“好数列”.

综上，n 的最大值为 7. .....15 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）