2024 北京昌平高三二模

数　　学

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将答题卡交回．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}, B=\{x\mid x^2-2x>0\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{0,1,2\}$　B．$\{1\}$　C．$\{-1,0,1,2\}$　D．$\{-1,3\}$

2．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n, a_2=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和等于（　）

A．16　B．24　C．30　D．62

3．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点和双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右顶点重合，则 p 的值为（　）

A．1　B．2　C．4　D．6

4．在 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为（　）

A．－15　B．15　C．30　D．360

5．若 $0<a<b<1, c>1$，则（　）

A．$c^b<c^a$　B．$\log_c a>\log_c b$　C．$\sin\frac{c}{a}>\sin\frac{c}{b}$　D．$a^c<b^c$

6．若圆 $x^2+8x+y^2-6y+m=0$ 与 x 轴，y 轴均有公共点，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,9]$　B．$(-\infty,16]$　C．$[9,25)$　D．$[16,25)$

7．设 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，且 $m\subset\alpha, \alpha//\beta$，则“$n\perp\beta$”是“$n\perp m$”的（　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, x\le 1,\\ \ln(x-1), x>1.\end{cases}$ 若对任意的 x 都有 $|f(x)|\ge ax$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,0]$　B．$[-4,0]$　C．$[-3,0]$　D．$(-\infty,2]$

9．中国茶文化博大精深，茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关，经验表明，某种绿茶用 90℃的水泡制，再等到茶水温度降至 60℃时饮用，可以产生极佳口感在 20℃室温下，茶水温度从 90℃开始，经过 $t$min 后的温度为 y℃，可选择函数 $y=60\times0.9^t+20\ (t\ge0)$ 来近似地刻画茶水温度随时间变化的规律，则在上述条件下，该种绿茶茶水达到最佳饮用口感时，需要放置的时间最接近的是（　）

（参考数据：$\lg2\approx0.30, \lg3\approx0.48$）

A．2.5min　B．4.5min　C．6min　D．8min

10．已知数列$\left|a_n\right|$满足$a_{4n-3}=-1,a_{4n-1}=1,a_{2n}=a_n$，该数列的前$n$项和为$S_n$，则下列论断中错误的是（　）

A．$a_{31}=1$　　B．$a_{2024}=-1$

C．$\exists$非零常数$T,\forall n\in \mathrm{N}^*$，使得$a_{n+T}=a_n$　D．$\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有$S_{2n}=-2$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．已知复数$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则$z\cdot\bar{z}=$_____．

12．已知$\triangle ABC$中，$a=4,b=2c,\cos A=-\dfrac{3}{4}$，则$S_{\triangle ABC}=$_____．

13．已知正方形$ABCD$的边长为1，点P满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda>0)$．当$\lambda=\dfrac{1}{3}$时，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PD}=$_____；当$\lambda=$_____．时，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{DP}$取得最大值．

14．已知p：设函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的图象是一条连续不断的曲线，若$f(1)\cdot f(2)>0$，则$f(x)$在区间$(1,2)$内无零点．能说明p为假命题的一个函数的解析式是_____．

15．已知曲线$G:x|x|+y|y|=4,0$为坐标原点．给出下列四个结论：

①曲线G关于直线$y=x$成轴对称图形；

②经过坐标原点0的直线l与曲线G有且仅有一个公共点；

③直线$l:x+y=2$与曲线G所围成的图形的面积为$\pi-2$；

④设直线$l:\gamma=kx+2$，当$k\in(-1,0)$时，直线l与曲线G恰有三个公共点．其中所有正确结论的序号是_____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．本小题13分

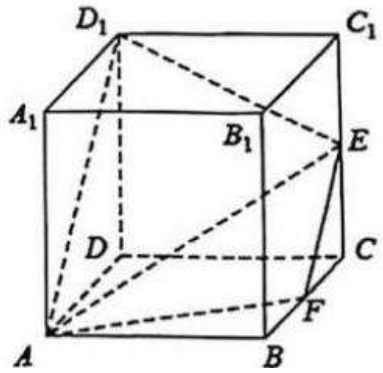
已知函数$f(x)=\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+3\cos x\right)-a$的图像经过点$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{2}\right)$．

（I）求实数a的值，并求$f(x)$的单调递减区间；

（II）当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)\geq m$恒成立，求实数$m$的取值范围．

17．本小题14分

如图，在棱长均为2的四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E是CC_1的中点，BC交平面AD_1E于点F．



（I）求证：点 F 为线段 BC 的中点；

（II）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 存在且唯一确定．

（i）求二面角 D_1-AF-B 的余弦值；

（ii）求点 B_1 到平面 AD_1EF 的距离．

条件①：$DD_1\perp$ 平面 $ABCD$；

条件②：四边形 $ABCD$ 是正方形；

条件③：平面 $AA_1D_1D\perp$ 平面 CC_1D_1D．

注：如果选择的条件不符合要求，则第 II 问得 0 分；如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（本小题 13 分）

某行业举行专业能力测试，该测试由 A,B,C 三项组成，每项测试成绩分为合格和不合格，三项测试结果相互独立．当三项测试成绩均合格时，认定分为 10 分；当 C 项测试成绩合格，且 A,B 两项中恰有一项成绩合格时，认定分为 5 分；当 C 项测试成绩不合格，且 A,B 两项测试成绩都合格时，认定分为 2 分；其它测试成绩，认定分为 0 分．

甲在参加该专业能力测试前进行了 20 次模拟测试，测试成绩合格的频数统计如下表：

测试项	A	B	C
频数	16	15	10

用频率估计概率．

（I）试估计甲参加该专业能力 A 项测试成绩合格的概率；

（II）设 X 表示甲获得的认定分，求 X 的分布列和数学期望 $E\left(X\right)$；

（III）若乙参加该专业能力测试，三项测试成绩合格的概率均为 $\frac{2}{3}$．试估计甲、乙两人获得认定分的大小，并说明理由．

19．本小题 15 分

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，短轴长为 $2\sqrt{3}$．

（I）求椭圆 E 的方程；

（II）设 A,B 是椭圆 E 的左、右顶点，F 是椭圆 E 的右焦点．过点 F 的直线 l 与椭圆 E 相交于 M,N 两点（点 M 在 x 轴的上方），直线 AM,BN 分别与 y 轴交于点 P,Q，试判断 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 是否为定值？若是定值，求出这个定值；若不是定值，说明理由．

20．（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=x+\frac{a}{\mathrm{e}^x}$．

（I）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（II）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上的最小值；

（III）若 $a>0$，当 $x>0$ 时，求证：$f\left(\ln a-x\right)>f\left(\ln a+x\right)$．

21．本小题 15 分

已知$Q:a_1,a_2,\cdots,a_N$为有穷正整数数列，$a_1\le a_2\le\cdots\le a_N$，且$s=a_1+a_2+\cdots+a_N$．从$Q$中选取第$i_1$项，第$i_2$项，$\cdots$，第$i_m$项$\left(i_1<i_2<\cdots<i_m\right)$，称数列$a_{i_1},a_{i_i}$，$\cdots,a_{i_m}$为$Q$的长度为$m$的子列．规定：数列$Q$的任意一项都是$Q$的长度为1的子列．

若对于任意的正整数$t\le s$，数列Q存在长度为m的子列$a_{t_1},a_{t_2},\cdots,a_{t_m}$，使得$a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_m}=t$，则称数列$Q$为全覆盖数列．

（I）判断数列$1,1,1,5$和数列$1,2,4,8$是否为全覆盖数列；

（II）在数列Q中，若$s\le 2N-1$，求证：

当$2\le n\le N$时，$a_n\le n\le 1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$；

（III）若数列Q满足：$a_1=1$，且当$2\le n\le N$时，$a_n\le 1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，求证：数列$Q$为全覆盖数列．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	D	C	B	B	D	A	A	B	B	D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11） 2　　（12） $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　（13） $\frac{2}{3}$　$\frac{1}{2}$

（14） $f(x)=(x-\frac{3}{2})^2$ **（答案不唯一）**　　（15）①③④

注：（13）题第一空 3 分，第二空 2 分；

（15）题选对 1 个得 2 分，选对 2 个得 3 分，选对 3 个得 5 分，错选 1 个得 0 分.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（16）（共 13 分）

解：（I）由题意得， $\cos\frac{\pi}{6}(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}+3\cos\frac{\pi}{6})-a=\frac{3}{2}$.

解得 $a=\frac{3}{2}$.　　……1 分

所以 $f(x)=\cos x(\sqrt{3}\sin x+3\cos x)-\frac{3}{2}=\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x-\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+3\times\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{3\cos 2x}{2}=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　……4 分.

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,

所以 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$.　　……6 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.　……7 分

（II）由（I）可知 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$.　　……8 分

所以 $-\frac{3}{2}\leqslant\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})\leqslant\sqrt{3}$.

所以 $-\frac{3}{2}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$.　　……9 分

当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即$x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最小值是$-\frac{3}{2}$. ……11 分

因为$f(x)\geqslant m$恒成立等价于$m\leqslant f(x)_{\min}$，所以$m\leqslant -\frac{3}{2}$.

所以实数 m 的取值范围是$(-\infty,-\frac{3}{2}]$. ……13 分

（17）（共 14 分）

解：（I）连接BC_1.

因为BC交平面AD_1E于点F，$BC\subset$平面B_1BCC_1，

所以$F\in$平面B_1BCC_1.

所以 平面$B_1BCC_1\cap$平面$D_1AFE=EF$. ……1 分

因为 平面B_1BCC_1//平面A_1ADD_1，平面$D_1DAA_1\cap$平面$D_1AFE=AD_1$，

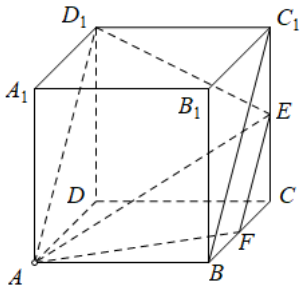
所以$AD_1//EF$. ……2 分

因为$D_1C_1//AB$,且$D_1C_1=AB$，

所以四边形ABC_1D_1是平行四边形.

所以$AD_1//BC_1$.

所以$EF//BC_1$. ……3 分



因为点E是CC_1的中点，

所以点F为线段BC的中点. ……4 分

（II）选择条件①②：

因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，

所以$DD_1\perp DA$，$DD_1\perp DC$.

因为四边形$ABCD$是正方形，

所以$DA\perp DC$. ……5 分

（i）如图建立空间直角坐标系$D-xyz$.

则$D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$. ……6 分

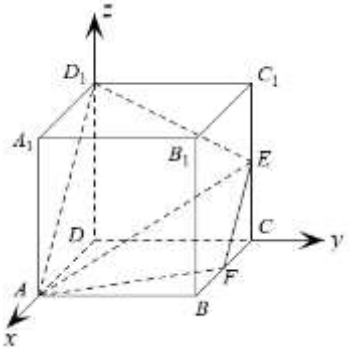
所以$F(1,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AF}=(-1,2,0)$. .....7 分

设平面D_1AFE的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{m}=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}-2x+2z=0,\\ -x+2y=0.\end{cases}$$

令$x=2$，则$y=1$，$z=2$，于是$\boldsymbol{m}=(2,1,2)$.

……8 分



因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，

所以平面$ABCD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ……9 分

所以

$$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}.$$ ……10 分

由题知，二面角D_1-AF-B为钝角， ……11 分

所以二面角D_1-AF-B的余弦值为$-\frac{2}{3}$. ……12 分

（ii）因为 $A(2,0,0)$， $B_1(2,2,2)$，所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$.

所以点 B_1 到平面 AD_1EF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=2$. ……14 分

选择条件①③：

因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp DA$， $DD_1\perp DC$. ……2 分

因为 平面 $AA_1D_1D\perp$ 平面 CC_1D_1D， 平面 $AA_1D_1D\cap$ 平面 $CC_1D_1D=DD_1$，

所以 $DA\perp$ 平面 CC_1D_1D. ……3 分

所以 $DA\perp DC$. ……4 分

以下同选条件①②.

选择条件②③不合题意，此时几何体不能唯一确定.

（18）（共 13 分）

解：（I）因为甲参加专业能力 A 项测试成绩合格的频率为 $\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$， ……2 分

由频率估计概率，估计甲参加专业能力 A 项测试成绩合格的概率为 $P(A)=\dfrac{4}{5}$. ……3 分

（II）设甲参加专业能力 A，B，C 三项测试成绩合格分别为事件 A_1,B_1,C_1，由频率估计概率，估计 $P(A_1)=\dfrac{4}{5}$，估计 $P(B_1)=\dfrac{3}{4}$，估计 $P(C_1)=\dfrac{1}{2}$. ……4 分

根据题意，随机变量 X 的所有可能取值为 $10,5,2,0$，且

$P(X=10)=P(A_1B_1C_1)=P(A_1)P(B_1)P(C_1)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$； ……5 分

$P(X=5)=P(\overline{A_1}B_1C_1)+P(A_1\overline{B_1}C_1)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{40}$； ……6 分

$P(X=2)=P(A_1B_1\overline{C_1})=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$； ……7 分

$P(X=0)=1-P(X=10)-P(X=5)-P(X=2)=\dfrac{9}{40}$. ……8 分

所以 X 的分布列为

X	0	2	5	10
P	$\dfrac{9}{40}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{7}{40}$	$\dfrac{3}{10}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{9}{40}+2\times\dfrac{3}{10}+5\times\dfrac{7}{40}+10\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{179}{40}=4.475$. ……10 分

（III）乙获得的认定分大. ……11 分

理由如下：

设乙参加专业能力 A，B，C 三项测试成绩合格分别为事件 A_2,B_2,C_2，由频率估计概率，估计 $P(A_2)=P(B_2)=P(C_2)=\dfrac{2}{3}$.

设 Y 表示乙获得的认定分，随机变量 Y 的所有可能取值为 $10,5,2,0$，且

$P(Y=10)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$； $P(Y=5)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}\times2=\dfrac{8}{27}$；

$P(Y=2)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{27}$； $P(Y=0)=1-P(Y=10)-P(Y=5)-P(Y=2)=\dfrac{7}{27}$.

所以 $E(Y)=0\times\frac{7}{27}+2\times\frac{4}{27}+5\times\frac{8}{27}+10\times\frac{8}{27}=\frac{128}{27}\approx 4.74>4.475$.

所以 $E(X)<E(Y)$. 所以乙获得的认定分大. .....……13 分

（19）（共 15 分）

解：（I）由题设，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ 2b=2\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ ……2 分

解得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1.$ ……4 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……5 分

（II）$\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{1}{3}$. ……6 分

由题意可知 $A(-2,0)$， $B(2,0)$， $F(1,0)$.

（i）当 $MN\perp x$ 轴时，直线 l 的方程为 $x=1$，易知 $M(1,\frac{3}{2})$， $N(1,-\frac{3}{2})$.

直线 AM 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x+2)$，所以 $P(0,1)$，$|OP|=1$.

直线 BN 的方程为 $y=\frac{3}{2}(x-2)$，所以 $Q(0,-3)$，$|OQ|=3$.

所以 $\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{1}{3}$. ……7 分

（ii）当直线 MN 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

则 $\Delta=144(k^2+1)>0$. ……8 分

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. ……9 分

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=0$，则 $y_P=\frac{2y_1}{x_1+2}$，所以 $P(0,\frac{2y_1}{x_1+2})$.

……10 分

直线 BN 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=0$，则 $y_Q=\frac{-2y_2}{x_2-2}$，所以 $Q(0,\frac{-2y_2}{x_2-2})$.

……11 分

所以 $|OP|=\left|\frac{2y_1}{x_1+2}\right|$， $|OQ|=\left|\frac{-2y_2}{x_2-2}\right|$.

所以 $\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{\left|\frac{2y_1}{x_1+2}\right|}{\left|\frac{-2y_2}{x_2-2}\right|}=\left|\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}\right|$

$$=\left|\frac{k(x_1-1)(x_2-2)}{k(x_2-1)(x_1+2)}\right|=\left|\frac{x_1x_2-2x_1-x_2+2}{x_1x_2-x_1+2x_2-2}\right| \qquad \text{……12 分}$$

可得 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}=\left|\dfrac{\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-2x_1-(\frac{8k^2}{3+4k^2}-x_1)+2}{\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-x_1+2(\frac{8k^2}{3+4k^2}-x_1)-2}\right|=\left|\dfrac{\frac{4k^2-6}{3+4k^2}-x_1}{\frac{12k^2-18}{3+4k^2}-3x_1}\right|=\dfrac{1}{3}$. ……14 分

综上，$\dfrac{|OP|}{|OQ|}=\dfrac{1}{3}$. ……15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）因为 $f(x)=x+\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}$，

所以 $f'(x)=1-\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}$. ……2 分

所以 $f'(0)=1-a$， $f(0)=a$. ……3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1-a)x+a$. ……4 分

（II）由题知，$f'(x)=1-\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-a}{\mathrm{e}^x}$.

（1）当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是增函数.

所以当 $x=0$ 时，$f(x)_{\min}=a$. ……6 分

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，即 $\mathrm{e}^x-a=0$，

所以 $x=\ln a$.

① 当 $\ln a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是增函数.

所以当 $x=0$ 时，$f(x)_{\min}=a$. ……7 分

② 当 $0<\ln a<1$，即 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下：

x	$(0,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,1)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=\ln a$ 时，$f(x)_{\min}=\ln a+1$. ……9 分

③当 $\ln a\geqslant 1$，即 $a\geqslant \mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是减函数.

所以当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=1+\dfrac{a}{\mathrm{e}}$.

综上，$f(x)_{\min}=\begin{cases}a, & a\leqslant 1,\\ \ln a+1, & 1<a<\mathrm{e},\\ 1+\dfrac{a}{\mathrm{e}}, & a\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$ ……11 分

（III）**解法 1**：设 $g(x)=f(\ln a-x)-f(\ln a+x)$

$$=\ln a-x+\frac{a}{\mathrm{e}^{\ln a-x}}-(\ln a+x+\frac{a}{\mathrm{e}^{\ln a+x}})$$

$= -2x + e^x - \frac{1}{e^x}$，

所以 $g'(x) = -2 + e^x + \frac{1}{e^x}$. ……12 分

令 $h(x) = -2 + e^x + \frac{1}{e^x}$，则 $h'(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$.

因为 $x > 0$，所以 $e^x > 1$，$0 < \frac{1}{e^x} < 1$.

所以 $h'(x) > 0$，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……13 分

又因为 $h(x) > h(0) = 0$，

所以 $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增. ……14 分

所以 $g(x) > g(0) = 0$.

所以 $g(x) = f(\ln a - x) - f(\ln a + x) > 0$.

所以 $f(\ln a - x) > f(\ln a + x)$. ……15 分

【解法 2】：设 $g(x) = f(\ln a - x) - f(\ln a + x)$

$= \ln a - x + \frac{a}{e^{\ln a - x}} - (\ln a + x + \frac{a}{e^{\ln a + x}})$

$= -2x + e^x - \frac{1}{e^x}$，

所以 $g'(x) = -2 + e^x + \frac{1}{e^x}$. ……12 分

因为 $x > 0$，所以 $e^x > 0$，$\frac{1}{e^x} > 0$，且 $e^x \neq \frac{1}{e^x}$，

所以 $-2 + e^x + \frac{1}{e^x} > 2\sqrt{e^x \cdot \frac{1}{e^x}} - 2 = 0.$ ……13 分

所以 $g'(x) > 0$.

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数. ……14 分

所以 $g(x)_{\min} > g(0) = 0$.

所以 $g(x) = f(\ln a - x) - f(\ln a + x) > 0$.

所以 $f(\ln a - x) > f(\ln a + x)$. ……15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）数列 $1,1,1,5$ 不是全覆盖数列，数列 $1,2,4,8$ 是全覆盖数列. ……4 分

（Ⅱ）由题知，$a_1 = 1$. 若不成立，则 $a_1 \geqslant 2$，那么 $a_1 + a_2 + \cdots + a_N \geqslant 2N$ 与假设矛盾.

因为 $s \leqslant 2N - 1$，即 $a_1 + a_2 + \cdots + a_N \leqslant 2N - 1$. ①

又 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} \geqslant N - 1$，

所以 $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} \geqslant N$.

所以 $-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) \leqslant -N + 1$. ②

由①+②得，$a_N \leqslant N$.

所以 $a_N \leqslant N \leqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}$. .....7 分

当 $a_N = 1$ 时，$a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 1$，

得$a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}=N-1\leqslant 2N-3$，命题成立.

此时，当$2\leqslant n\leqslant N-1$时，$a_n\leqslant n\leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$成立.

当$a_N\geqslant 2$时，得$a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}\leqslant 2N-3$.

同理可得，$a_{N-1}\leqslant N-1\leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{N-2}$.

归纳可得，当$2\leqslant n\leqslant N-1$时，$a_n\leqslant n\leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$.

综上可得，命题成立. 9分

(Ⅲ)下面证明，当$1\leqslant n\leqslant N$时，对于任意的$t\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$，

存在子列a_{t_1}，$a_{t_2},\cdots$，a_{t_m}，其中$t_1,t_2,\cdots,t_m\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，

使得$a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_m}=t$.

（1）当$n=1$时，$a_1=1$，所以当$t\leqslant S_1=1$时，有$t=a_1$.

当$n=2$时，则$a_2\leqslant a_1+1=2$.

所以$a_1=1,a_2=1$，$a_1+a_2=2$. 对于任意$t\leqslant 2$，命题成立.

或$a_1=1,a_2=2$，$a_1+a_2=3$. 对于任意$t\leqslant 3$，命题成立. 10分

（2）假设当$n=k(k\leqslant N-1)$时，命题成立.

即对于任意的正整数$t\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$，存在子列$a_{t_1}$，$a_{t_2},\cdots$，$a_{t_m}$，

其中$t_1,t_2,\cdots,t_m\in\{1,2,3,\cdots,k\}$，使得$a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_m}=t$.

则当$n=k+1$时，对于任意的正整数$t\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}$.

①当正整数$t\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$时，由假设成立.

存在子列a_{t_1}，$a_{t_2},\cdots$，a_{t_m}，其中$t_1,t_2,\cdots,t_m\in\{1,2,3,\cdots,k\}$，

使得$a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_m}=t$. 12分

②当正整数$t\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_k+1$时，

因为$a_{k+1}\leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_k$，所以$t\geqslant a_{k+1}$.

若$t=a_{k+1}$，则此时成立.

若$t>a_{k+1}$，则$1\leqslant t-a_{k+1}\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$. 13分

由假设，存在子列$a_{t_1'},a_{t_2'},\cdots,a_{t_m'}$，其中$t_1',t_2',\cdots,t_m'\in\{1,2,3,\cdots,k\}$，

使得$a_{t_1'}+a_{t_2'}+\cdots+a_{t_m'}=t-a_{k+1}$，

整理得$t=a_{t_1'}+a_{t_2'}+\cdots+a_{t_m'}+a_{k+1}$，此时$t_1',t_2',\cdots,t_m',k+1\in\{1,2,3,\cdots,k,k+1\}$.

即命题成立.

综上，对于任意的$t\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_N$，存在子列$a_{t_1}$，$a_{t_2},\cdots$，$a_{t_m}$，

其中$t_1,t_2,\cdots,t_m\in\{1,2,3,\cdots,N\}$，使$a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_m}=t$.

所以数列Q为全覆盖数列. 15分