2023 北京昌平高三二模
数　　学

2023.5

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,2\}$，$B=\{-1,1\}$，则集合 $A\cup B=$

（A）$\{-1\}$　（B）$\{-1,0,2\}$　（C）$\{-1,0,1,2\}$　（D）$\{0,2\}$

（2）在$(1-2x)^5$的展开式中，x^2的系数为

（A）40　（B）-40　（C）80　（D）-80

（3）已知复数 $z=a+\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 满足 $z\cdot\bar{z}=5$，则 a 的值为

（A）$\sqrt{6}$　（B）2　（C）$\pm\sqrt{6}$　（D）±2

（4）已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$，则 $f(-1)=$

（A）1　（B）-1　（C）2　（D）-2

（5）将函数 $y=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

（A）在区间$[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$上单调递增　（B）在区间$[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$上单调递减

（C）在区间$[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}]$上单调递增　（D）在区间$[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}]$上单调递减

（6）已知点 P 在直线 $\sqrt{3}x-y-10=0$ 上，点 $Q(2\cos\theta,2\sin\theta)(\theta\in\mathbf{R})$，则$|PQ|$的最小值为

（A）1　（B）3　（C）5　（D）7

（7）已知双曲线$C:3mx^2-my^2=3$的一个焦点坐标为$(-2,0)$，则双曲线C的离心率为

（A）$\dfrac{3}{2}$　（B）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（C）2　（D）4

（8）对于两个实数 a,b，设 $\min\{a,b\}=\begin{cases}b,\ a\geq b,\\ a,\ a<b.\end{cases}$ 则“$t=1$”是“函数 $f(x)=\min\{|x|,|x-t|\}$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称”的

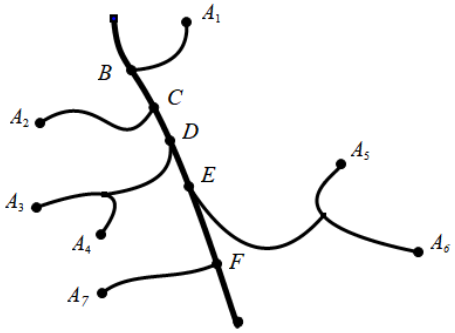
（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件
（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则下列结论中一定成立的是

（A）若 $a_6>0$，则 $S_{2n}<0$　（B）若 $a_6>0$，则 $S_{2n}>0$

（C）若 $a_5>0$，则 $S_{2n+1}<0$　　（D）若 $a_5>0$，则 $S_{2n+1}>0$

（10）某市一个经济开发区的公路路线图如图所示，粗线是大公路，细线是小公路，七个公司 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5A_6,A_7$ 分布在大公路两侧，有一些小公路与大公路相连.现要在大公路上设一快递中转站，中转站到各公司（沿公路走）的距离总和越小越好，则这个中转站最好设在



（A）路口 C

（B）路口 D

（C）路口 E

（D）路口 F

第二部分　（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

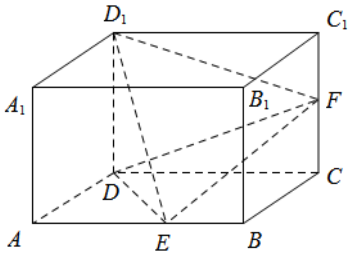
（11）$3^{-2},2^{\frac{1}{3}},\log_2 5$ 三个数中最大的数是_____.

（12）已知抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，且 M 在第一象限，则点 F 的坐标为_____；若 $|MF|=3$，点 M 到直线 $x=-1$ 的距离为_____.

（13）若函数 $f(x)=\cos x-A\sin x(A>0)$ 的最大值为 2，则 $A=$_____，$f(x)$ 的一个对称中心为_____.

（14）已知点 A,B,C 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，且 $AB\perp BC$，若点 P 的坐标为 $(1,0)$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 的取值范围是_____.

（15）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,AA_1=AD=1$，动点 E,F 分别在线段 AB 和 CC_1 上.



给出下列四个结论：

①$V_{D_1-DEF}=\frac{1}{3}$；

②△ D_1EF 不可能是等边三角形；

③当 $D_1E\perp DF$ 时，$D_1F=EF$；

④至少存在两组 E,F，使得三棱锥 D_1-DEF 的四个面均为直角三角形.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

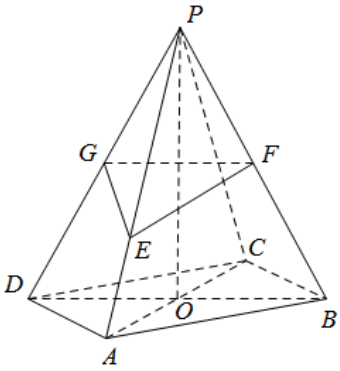
在△ ABC 中，$\sqrt{3}a = 2b\sin A$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{7}$，$c=3$，求△ ABC 的面积.

(17)（本小题 13 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$AC \cap BD = O$，且 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，$PO=2$，F,G 分别是 PB, PD 的中点，E 是 PA 上一点，且 $AP=3AE$.



（Ⅰ）求证：BD // 平面 EFG；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，

求直线 PA 与平面 EFG 所成角的正弦值.

条件①：$BD=2\sqrt{3}$；

条件②：$\angle DAB = \dfrac{2\pi}{3}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答记分.

（18）（本小题 14 分）

2023 年 9 月 23 日至 2023 年 10 月 8 日，第 19 届亚运会将在中国杭州举行. 杭州某中学高一年级举办了“亚运在我心”的知识竞赛，其中 1 班，2 班，3 班，4 班报名人数如下:

班号	1	2	3	4
人数	30	40	20	10

该年级在报名的同学中按分层抽样的方式抽取 10 名同学参加竞赛，每位参加竞赛的同学从预设的 10 个题目中随机抽取 4 个作答，至少答对 3 道的同学获得一份奖品.

假设每位同学的作答情况相互独立.

（Ⅰ）求各班参加竞赛的人数；

（Ⅱ）2 班的小张同学被抽中参加竞赛，若该同学在预设的 10 个题目中恰有 3 个答不对，记他答对的题目数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）若 1 班每位参加竞赛的同学答对每个题目的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，求 1 班参加竞赛的同学中至少有 1 位同学获得奖品的概率.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上的点到两个焦点的距离之和为 4，且右焦点为 $(1,0)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 A,B 分别为椭圆 C 的左、右顶点，点 P 为椭圆 C 上一点（不与 A,B 重合），直线 AP, BP 分别与直线 $x=4$ 相交于点 M,N. 当点 P 运动时，求证：以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=kx-\ln(1+x)(k>0)$.

（Ⅰ）当 $k=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，求 k 的取值范围；

（Ⅲ）如果存在 $x_0 \in (0,+\infty)$，使得当 $x \in (0, x_0)$ 时，恒有 $f(x)<x^2$ 成立，求 k 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

若数列$\{a_n\}$满足$|a_{k+1}-a_k|=1$（$k=1,2,3,\cdots,n-1(n\geq 2)$），则称数列$\{a_n\}$为$\eta$数列.记$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

（Ⅰ）写出一个满足$a_1=a_5=1$，且$S_5=5$的η数列；

（Ⅱ）若$a_1=24,n=2000$，证明：η数列$\{a_n\}$是递增数列的充要条件是$a_n=2023$；

（Ⅲ）对任意给定的整数$n(n\geq 3)$，是否存在首项为1的η数列$\{a_n\}$，使得$S_n=1$？如果存在，写出一个满足条件的η数列$\{a_n\}$；如果不存在，说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）A　（3）D　（4）A　（5）D

（6）B　（7）C　（8）C　（9）D　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\log_2 5$　（12）$F(0,1)$　$2\sqrt{2}+1$　（13）$\sqrt{3}$　$(\frac{\pi}{6},0)$（答案不唯一）

（14）$[1,5]$　（15）①②④

（第 12 题、第 13 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 15 题答对一个给 2 分，答对两个给 3 分，答对三个给 5 分，错答得零分。）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $\sqrt{3}a=2b\sin A$，　……1 分

得 $\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin A$.　……2 分

因为 $\sin A\neq 0$，　……3 分

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　……4 分

因为 $0<\angle B<\pi$，　……5 分

所以 $\angle B=\frac{\pi}{3}$ 或 $\angle B=\frac{2\pi}{3}$.　……7 分

（II）因为 $b=\sqrt{7},c=3$，

所以 $b<c$，即 $\angle B<\angle C$.　……8 分

所以 $\angle B=\frac{\pi}{3}$.　……9 分

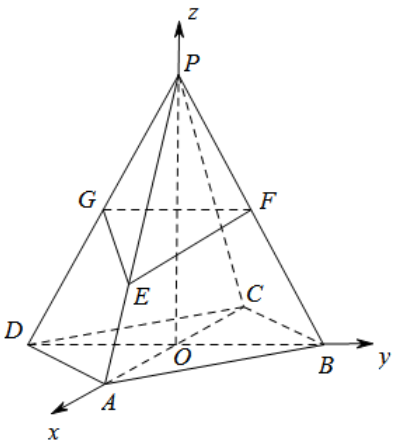
由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $a^2-3a+2=0$.　……10 分

所以 $a=1$ 或 $a=2$.　……11 分

当 $a=1$ 时，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；　……12 分

当 $a=2$ 时，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.　……13 分

(17)（共 13 分）



解：（I）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，

因为 F,G 分别是 PB,PD 的中点，

所以 $BD // FG$. ……1 分

因为 $BD \not\subset$ 平面 EFG ，$FG \subset$ 平面 EFG ， ……2 分

所以 $BD //$ 平面 EFG . ……4 分

（II）因为底面 $ABCD$ 是菱形，

所以 $AC \perp BD$. ……5 分

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PO \perp OA, PO \perp OB$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$. ……6 分

选条件①： $BD=2\sqrt{3}$.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，

所以 $OD=\sqrt{3}$, $OA=1$. ……7 分

则 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), P(0,0,2), G(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},1), F(0,\frac{\sqrt{3}}{2},1).$

因为 E 是 PA 上一点，且 $AP=3AE$ ，

所以 $E(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3})$. ……8 分

所以 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-2), \overrightarrow{GF}=(0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{GE}=(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{3}).$ ……9 分

设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{3}z=0,\\ \sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $y=0$ ，则 $x=1, z=2$ ，于是 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$ ……11 分

设直线 PA 与平面 EFG 所成角为 α ，则

$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PA}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PA}|}=\frac{3}{5}.$ ……13 分

选条件②： $\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$.

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，

所以 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$.

所以 $AC=2$.

所以 $OD=\sqrt{3}$, $OA=1$. ……1 分

以下同选条件①.

(18)（共 14 分）

解：（I）由题意知，抽出的 100 名学生中，来自 1 班，2 班，3 班，4 班的学生分别有 30 名，40 名，20 名，10 名，根据分层抽样的方法，1 班，2 班，3 班，4 班参加的人数分别为 3，4，2，1. ……4 分

（II）根据题意，随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 4. 且 ……5 分

$P(X=1)=\dfrac{C_3^3C_7^1}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{30}$； $P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=\dfrac{9}{30}$；

$P(X=3)=\dfrac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4}=\dfrac{15}{30}$； $P(X=4)=\dfrac{C_3^0C_7^4}{C_{10}^4}=\dfrac{5}{30}$. ……9 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{9}{30}$	$\dfrac{15}{30}$	$\dfrac{5}{30}$

故随机变量 X 的数学期望 $E(X)=1\times\dfrac{1}{30}+2\times\dfrac{9}{30}+3\times\dfrac{15}{30}+4\times\dfrac{5}{30}=\dfrac{14}{5}$. …11 分

（III）由题意知，1 班每位同学获得奖品的概率为 $C_4^3(\dfrac{1}{3})^3\times\dfrac{2}{3}+C_4^4(\dfrac{1}{3})^4=\dfrac{1}{9}$. …13 分

所以 1 班参加竞赛的同学中至少有 1 位同学获得奖品的概率为 $1-(\dfrac{8}{9})^3=\dfrac{217}{729}$.

……14 分

（19）（共 15 分）

解：（I）由题设，$\begin{cases}2a=4,\\ c=1,\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$ ……4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……5 分

（II）**解法一：**

由题意可知 $A(-2,0)$， $B(2,0)$.

设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $3x_0^2+4y_0^2=12$. ① ……6 分

直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$. ……7 分

令 $x=4$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\dfrac{6y_0}{x_0+2}$，则 M $(4,\ \dfrac{6y_0}{x_0+2})$. ……8 分

直线 BP 的方程： $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$. ……9 分

令 $x=4$，得点 N 的纵坐标为 $y_N=\dfrac{2y_0}{x_0-2}$，则 N $(4,\ \dfrac{2y_0}{x_0-2})$. ……10 分

设以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $Q(x_1,0)$，则 $MQ\perp NQ$.

由 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$ 得 $(x_1-4)^2+\dfrac{12y_0^2}{(x_0+2)(x_0-2)}=0$. ② ……11 分

由①式得 $12y_0^2=36-9x_0^2=9(4-x_0^2)$，代入②得 $(x_1-4)^2=9$. ……12 分

解得 $x_1=1$ 或 $x_1=7$. ……13 分

所以以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$. ……14 分

所以以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值 6. ……15 分

解法二：

由题意可知 $A(-2,0)$， $B(2,0)$.

设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $3x_0^2+4y_0^2=12$. ……6 分

因为 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{\frac{12-3x_0^2}{4}}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$， ……7 分

设直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$.

令 $x=4$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=6k$，则 $M\ (4,6k)$. ……8 分

则直线 BP 的方程为 $y=-\frac{3}{4k}(x-2)$. ……9 分

令 $x=4$，得点 N 的纵坐标为 $y_N=-\frac{3}{2k}$，则 $N\ (4,-\frac{3}{2k})$. ……10 分

设以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $Q(x_1,0)$，则 $MQ\perp NQ$. ……11 分

由 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$ 得 $(x_1-4)^2+(0-6k)(0+\frac{3}{2k})=0$. ……12 分

可得 $(x_1-4)^2=9$，解得 $x_1=1$ 或 $x_1=7$. ……13 分

所以以 MN 为直径的圆经过 x 轴上的定点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$. ……14 分

所以以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值 6. ……15 分

解法三：

由题意可知 $A(-2,0)$， $B(2,0)$.

设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，则 $3x_0^2+4y_0^2=12$. ① ……6 分

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$. ……7 分

令 $x=4$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\frac{6y_0}{x_0+2}$，则 $M\ (4,\ \frac{6y_0}{x_0+2})$. ……8 分

直线 BP 的方程： $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$. ……9 分

令 $x=4$，得点 N 的纵坐标为 $y_N=\frac{2y_0}{x_0-2}$，则 $N\ (4,\ \frac{2y_0}{x_0-2})$. ……10 分

所以 $|MN|=|\frac{6y_0}{x_0+2}-\frac{2y_0}{x_0-2}|$.

则 MN 的中点为 $Q(4,\frac{3y_0}{x_0+2}+\frac{y_0}{x_0-2})$. ……11 分

所以以 MN 为直径的圆的方程为

$(x-4)^2+[y-(\frac{3y_0}{x_0+2}+\frac{y_0}{x_0-2})]^2=(\frac{3y_0}{x_0+2}-\frac{y_0}{x_0-2})^2$. ……12 分

令 $y=0$, 则 $(x-4)^2=(\frac{3y_0}{x_0+2}-\frac{y_0}{x_0-2})^2-(\frac{3y_0}{x_0+2}+\frac{y_0}{x_0-2})^2=\frac{-12{y_0}^2}{{x_0}^2-4}$.

由①可得 $-12y_0^2=9(x_0^2-4)$.

所以 $(x-4)^2=9$.

所以 $x=1$ 或 $x=7$. ……13 分

所以以 MN 为直径的圆恒过点 $(1,0),(7,0)$. ……14 分

所以以 MN 为直径的圆截 x 轴所得的弦长为定值 6. ……15 分

(20)（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $k=1$ 时， $f(x)=x-\ln(1+x)$.

所以 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}.$ ……1 分

因为 $f'(0)=0, f(0)=0.$ ……3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=0.$ ……4 分

（II）函数 $f(x)$ 定义域 $(-1,+\infty)$. ……5 分

因为 $f'(x)=k-\frac{1}{1+x}.$ ……6 分

法一：

因为 $x>0,$ 所以 $0<\frac{1}{1+x}<1.$ ……7 分

①当 $k\geq 1$ 时， $f'(x)>0,$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最小值，即 $k\geq 1$ 不合题意. ……8 分

②当 $0<k<1$ 时，令 $f'(x)=0,$ 则 $x=\frac{1}{k}-1>0.$

当 $f'(x)>0$ 时， $x>\frac{1}{k}-1$， $f(x)$ 在 $(\frac{1}{k}-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $f'(x)<0$ 时， $0<x<\frac{1}{k}-1$， $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{k}-1)$ 上单调递减. ……9 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值时 k 的取值范围为 $(0,1).$ ……10 分

法二：

因为 $f'(x)=k-\frac{1}{1+x}=\frac{kx+k-1}{1+x}=\frac{k(x+\frac{k-1}{k})}{1+x}.$ ……6 分

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{k}-1.$ ……7 分

①当 $k\geq 1$ 时， $x=\frac{1}{k}-1<0$，

所以当 $x>0$ 时， $f'(x)>0,$ 即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最小值，即 $k\geq 1$ 不合题意. ……8 分

②当 $0<k<1$ 时， $x=\frac{1}{k}-1>0.$

当 $f'(x)>0$ 时， $x>\frac{1}{k}-1$， $f(x)$ 在 $(\frac{1}{k}-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $f'(x)<0$ 时， $0<x<\frac{1}{k}-1$， $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{k}-1)$ 上单调递减. ……9 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值时 k 的取值范围为 $(0,1).$ ……10 分

（III）设 $g(x)=f(x)-x^2=kx-\ln(1+x)-x^2.$

由题意，存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使 $x\in(0,x_0)$，恒有 $f(x)<x^2$，

即 $x\in(0,x_0)$，恒有 $g(x)<0$ 成立. ……11 分

因为 $g'(x)=k-\frac{1}{1+x}-2x=\frac{-2x^2+(k-2)x+k-1}{1+x},$ ……12 分

设 $h(x)=-2x^2+(k-2)x+k-1.$

①当$0<k\le 1$时，函数$h(x)$的对称轴为$x=\dfrac{k-2}{4}<0$，$h(0)=k-1\le 0$，

即当$x\ge 0$时，$h(x)\le 0$，所以$g'(x)\le 0$。

所以$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

所以$g(x)\le g(0)=0$，即$x\in(0,x_0)$，恒有$g(x)<0$成立.　　……13 分

②当$k>1$时，令$h(x)=0$.

因为$\Delta=(k-2)^2-4\times(-2)(k-1)=k^2+4k-4=(k+2)^2-8>1>0$，

所以$x=\dfrac{(k-2)\pm\sqrt{(k+2)^2-8}}{4}$.

因为当$x\in(0,\dfrac{(k-2)+\sqrt{(k+2)^2-8}}{4})$时，$g'(x)>0,$

所以$g(x)$在$(0,\dfrac{(k-2)+\sqrt{(k+2)^2-8}}{4})$上单调递增.

所以$g(x)>g(0)=0$，不合题意.　　……14 分

综上可知当$0<k\le 1$时，存在$x_0\in(0,+\infty)$，使$x\in(0,x_0)$，恒有$f(x)<x^2$.

……15 分

(21)（共 15 分）

解：（I）$1,0,1,2,1$.（答案不唯一 $1,2,1,0,1$.）　　……3 分

（II）必要性：

因为η数列$\{a_n\}$是递增数列，

所以$a_{k+1}-a_k=1$（$k=1,2,3,\cdots,1999$）.　　……4 分

所以η数列$\{a_n\}$是以 24 为首项，公差为1的等差数列.

所以$a_{2000}=24+(2000-1)\times 1=2023$.　　……5 分

充分性：

因为$|a_{k+1}-a_k|=1$，

所以$a_{k+1}-a_k\le 1.$　　……6 分

所以$a_{2000}-a_{1999}\le 1$，

$a_{1999}-a_{1998}\le 1$，

……

$a_2-a_1\le 1.$

所以$a_{2000}-a_1\le 1999$，即$a_{2000}\le a_1+1999$.　　……7 分

因为$a_1=24,a_{2000}=2023$，

所以$a_{2000}=a_1+1999$.　　……8 分

所以$a_{k+1}-a_k=1>0$（$k=1,2,3,\cdots,1999$）.

即η数列$\{a_n\}$是递增数列.　　……9 分

综上，结论得证.

（Ⅲ）令 $b_k = a_{k+1} - a_k (k = 1,2,3,\cdots,n-1)$，则 $b_k = \pm 1$. ……10 分

所以 $a_2 = a_1 + b_1$，

$a_3 = a_1 + b_1 + b_2$，

……

$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$.

所以 $S_n = na_1 + (n-1)b_1 + (n-2)b_2 + \cdots + b_{n-1}$

$= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 - [(n-1)(1-b_1) + (n-2)(1-b_2) + \cdots + (1-b_{n-1})]$

$= \frac{n(n+1)}{2} - [(n-1)(1-b_1) + (n-2)(1-b_2) + \cdots + (1-b_{n-1})]$. …… 11 分

因为 $b_k = \pm 1$，

所以 $1-b_k$ 为偶数 $(k = 1,2,3,\cdots,n-1)$.

所以 $(n-1)(1-b_1) + (n-2)(1-b_2) + \cdots + (1-b_{n-1})$ 为偶数.

所以要使 $S_n = 1$，即 $S_n - 1 = 0$，

必须使 $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ 为偶数. ……12 分

即 4 整除 $(n-1)(n+2)$，

因为 $n \geq 3$，

所以 $n = 4m+1$ 或 $n = 4m+2 (m \in \mathbf{N}^*)$.

当 $n = 4m+1 (m \in \mathbf{N}^*)$ 时，η 数列 $\{a_n\}$ 的项满足

$a_{4k-3} = 1, a_{4k-2} = 0, a_{4k-1} = -1, a_{4k} = 0, a_{4m+1} = 1$ $(k = 1,2,3,\cdots,m)$ 时，

有 $a_1 = 1, S_n = 1$； ……13 分

当 $n = 4m+2 (m \in \mathbf{N}^*)$ 时，η 数列 $\{a_n\}$ 的项满足 $a_{4k-3} = 1, a_{4k-2} = 0, a_{4k-1} = -1, a_{4k} = 0, a_{4m+2} = 0$

$(k = 1,2,3,\cdots,m)$ 时，

有 $a_1 = 1, S_n = 1$； ……14 分

当 $n = 4m$ 或 $n = 4m+3 (m \in \mathbf{N}^*)$ 时，$(n-1)(n+2)$ 不能被 4 整除，此时不存在 η 数列 $\{a_n\}$，使得 $a_1 = 1, S_n = 1$. ……15 分