2023 北京丰台高三二模

数　　学

本试卷共 6 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}, B=\{x|-1<x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 若复数 $z=\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)$，则 $|z-1|=$（　）

A. $-2-\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

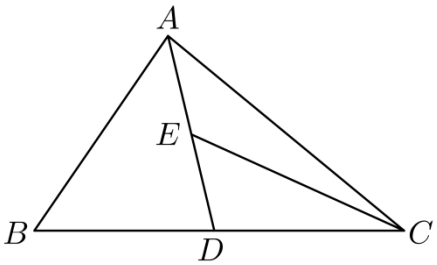
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=n^2-1$，则 $a_3=$（　）

A. -5　　B. 5　　C. 7　　D. 8

4. 若某圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形，则它的体积为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\sqrt{3}\pi$　　D. 2π

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，若 E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{CE}=$（　）



A. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

6. 已知圆 $C: x^2+y^2-6x+8=0$，若双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的一条渐近线与圆 C 相切，则 $m=$（　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 8

7. 为了得到函数 $y=\log_2(2x-2)$ 的图象，只需把函数 $y=\log_2 x$ 的图象上的所有点（　）

A. 向左平移 2 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度

B. 向右平移 2 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度

C. 向左平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

D. 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

8. 已知 A，B 是 $\triangle ABC$ 的内角，“$\triangle ABC$ 为锐角三角形"是“$\sin A>\cos B$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论正确的是（　）

A. $f(-x)-f(x)=0$

B. $f'(x)<0$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $x_1f\left(x_2\right)>x_2f\left(x_1\right)$

D. 若 $0<x_1<x_2$，则 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_1+x_2\right)$

10. 已知 A，B，C 是单位圆上的三个动点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值是（　）

A. 0　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. -2

第二部分（非选择题 110 分）

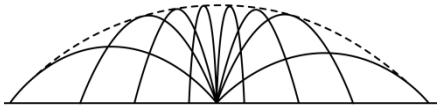
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 在 $(2x+1)^4$ 的展开式中，x^2 的系数为_____.（用数字作答）

12. 已知点 $P(0,2)$，直线 $l:x+2y-1=0$，则过点 P 且与直线 l 相交的一条直线的方程是_____.

13. 若函数 $f(x)=\sin x-\cos 2x$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$_____，$f(x)$ 的值域为_____.

14. 在水平地面竖直定向爆破时，在爆破点炸开的每块碎片的运动轨迹均可近似看作是抛物线的一部分．这些碎片能达到的区域的边界和该区域轴截面的交线是抛物线的一部分（如图中虚线所示），称该条抛物线为安全抛物线．若某次定向爆破中碎片达到的最大高度为 40 米，碎片距离爆炸中心的最远水平距离为 80 米，则这次爆破中，安全抛物线的焦点到其准线的距离为_____米.



15. 已知函数 $f(x)=|\cos 2x|+1$．给出下列四个结论：

① $f(x)$ 的最小正周期是 π；

② $f(x)$ 的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{4}$；

③若函数 $g(x)=f(x)+b(b\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left[0,\frac{9\pi}{8}\right]$ 上有 5 个零点，从小到大依次记为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，则 $x_1+2\left(x_2+x_3+x_4\right)+x_5=5\pi$；

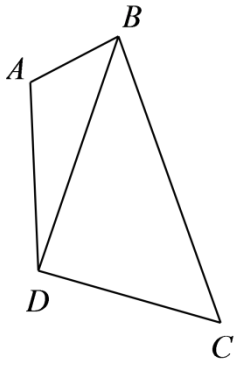
④存在实数 a，使得对任意 $m\in\mathbf{R}$，都存在 $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 且 $x_1\neq x_2$，满足

$af\left(x_k\right)=f(m)+\frac{1}{f(m)}(k=1,2)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$CD=DA=2$，$BC=3$，再从条件①，条件②这两个条件中选择一个作为已知，解决下列问题.



（1）求 BD 的长；

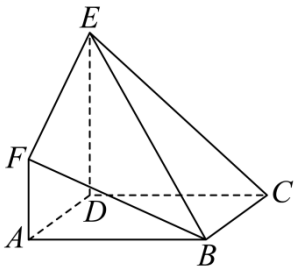
（2）求四边形 $ABCD$ 的面积.

条件①：$\cos\angle DBC=\frac{\sqrt{5}}{3}$；

条件②：$\angle DCB+\angle DAB=\pi$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，面 $ABCD$ 是正方形，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 ABF // 平面 CDE，A，D，E，F 四点共面，$AB=DE=2$，$AF=1$.



（1）求证：$AF//DE$；

（2）求点 F 到平面 BCE 的距离；

（3）过点 F 作与 CE 垂直的平面交直线 BE 于点 P，求 EP 的长度.

18. 某地区教育研究部门为了解当前本地区中小学教师在教育教学中运用人工智能的态度、经验、困难等情况，从该地区 2000 名中小学教师中随机抽取 100 名进行了访谈．在整理访谈结果的过程中，统计他们对“人工智能助力教学”作用的认识，得到的部分数据如下表所示：

类别 \ 人数 \ 观点		没有帮助	有一些帮助	很有帮助	合计
性别	男	2	10		20
	女		35	40	80
年龄	40岁以下（含40岁）	1		35	
	40岁以上	6	26		45

假设用频率估计概率，且每位教师对“人工智能助力教学”作用的认识相互独立．

（1）估计该地区中小学教师中认为人工智能对于教学“没有帮助”的人数；

（2）现按性别进行分层抽样，从该地区抽取了 5 名教师，求这 5 名教师中恰有 1 人认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率；

（3）对受访教师关于“人工智能助力教学”的观点进行赋分：“没有帮助”记 0 分，“有一些帮助”记 2 分，“很有帮助”记 4 分．统计受访教师的得分，将这 100 名教师得分的平均值记为 μ_0，其中年龄在 40 岁以下（含 40 岁）教师得分的平均值记为 μ_1，年龄在 40 岁以上教师得分的平均值记为 μ_2，请直接写出 μ_0,μ_1,μ_2 的大小关系．（结论不要求证明）

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过两点 $A(-2,0),B\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率；

（2）设 P，Q 为椭圆 C 上不同的两个点，直线 AP 与 y 轴交于点 E，直线 AQ 与 y 轴交于点 F，若点 $M(1,0)$ 满足 $MF\perp ME$，求证：P，O，Q 三点共线．

20. 已知函数 $f(x)=(\sqrt{x}+a)\mathrm{e}^x(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 是增函数，求 a 的取值范围；

（3）证明：$f(x)$ 有最小值，且最小值小于 $f(1)$.

21. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q（$q\neq 1$），其所有项构成集合A，等差数列$\{b_n\}$的公差为d（$d\neq 0$），其所有项构成集合B．令$C=A\bigcup B$，集合C中的所有元素按从小到大排列构成首项为1的数列$\{c_n\}$．

（1）若集合$C=\{1,3,4,5,6,7,9\}$，写出一组符合题意的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$；

（2）若$a_n=2^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，数列$\{b_n\}$为无穷数列，$A\cap B=\varnothing$，且数列$\{c_n\}$的前5项成公比为$p$的等比数列．当$b_1<a_5$时，求$p$的值；

（3）若数列$\{b_n\}$是首项为1的无穷数列，求证：“存在无穷数列$\{a_n\}$，使$A\subseteq B$”的充要条件是“d是正有理数”.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【解析】

【分析】根据交集概念进行计算.

【详解】$A\cap B=\{-1,0,1,2\}\cap\{x|-1<x\le 1\}=\{0,1\}$.

故选：B

2 【答案】C

【解析】

【分析】根据复数代数形式的乘法运算化简，再根据复数模的计算公式计算可得.

【详解】因为$z=\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)=\mathrm{i}^2-\mathrm{i}=-1-\mathrm{i}$，所以$z-1=-2-\mathrm{i}$，

则$|z-1|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

故选：C

3.【答案】B

【解析】

【分析】根据$a_3=S_3-S_2$计算可得.

【详解】因为$S_n=n^2-1$，所以$a_3=S_3-S_2=\left(3^2-1\right)-\left(2^2-1\right)=5$.

故选：B

4.【答案】A

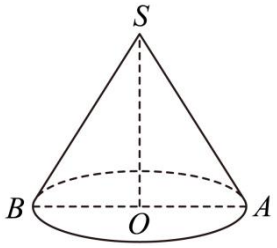
【解析】

【分析】根据轴截面求出圆锥的底面半径和高，求出体积.

【详解】因为圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形，所以圆锥的底面半径为 1，且圆锥的高

$SO=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

故体积为$\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.



故选：A

5.【答案】D

【解析】

【分析】根据平面向量线性运算法则计算可得.

【详解】$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

故选：D

6.【答案】C

【解析】

【分析】求出圆心和半径，及双曲线的渐近线，由相切关系列出方程，求出答案.

【详解】$C:x^2+y^2-6x+8=0$ 变形为 $\left(x-3\right)^2+y^2=1$，故圆心为 $\left(3,0\right)$，半径为 1，

$y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{x}{m}$，

不妨取 $y=\frac{x}{m}$，由点到直线距离公式可得 $\frac{\left|\frac{3}{m}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}=1$，解得 $m=2\sqrt{2}$，负值舍去.

故选：C

7.【答案】D

【解析】

【分析】按照左加右减，上加下减，结合对数运算法则进行计算，得到答案.

【详解】A 选项，向左平移 2 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，得到

$y=\log_2\left(x+2\right)+2=\log_2 4\left(x+2\right)=\log_2 4x+8$，错误；

B 选项，向右平移 2 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度得到 $y=\log_2\left(x-2\right)-2=\log_2\frac{x-2}{4}$，错误；

C 选项，向左平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度得到

$y=\log_2\left(x+1\right)+1=\log_2\left(x+1\right)+\log_2 2=\log_2 2\left(x+1\right)=\log_2\left(2x+2\right)$，错误；

D 选项，向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度得到

$y=\log_2\left(x-1\right)+1=\log_2\left(x-1\right)+\log_2 2=\log_2 2\left(x-1\right)=\log_2\left(2x-2\right)$，正确.

故选：D

8.【答案】A

【解析】

【分析】先根据诱导公式及正弦函数单调性得到充分性成立，再举出反例得到必要性不成立.

【详解】因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $A+B>\frac{\pi}{2}$，所以 $A>\frac{\pi}{2}-B$，

其中 $\frac{\pi}{2}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

因为 $y=\sin x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单独递增，所以 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，充分性成立，

若 $\sin A>\cos B$，不妨设 $A=\frac{\pi}{2},B=\frac{\pi}{3}$，满足 $\sin A>\cos B$，但 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故必要性不成立.

故选：A

9.【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性概念判断 A，根据导函数值域判断 B，利用特例法排除选项 C，利用指数运算及指数函数的单调性结合不等式的性质即可判断 D.

【详解】对于 A，易知 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}=\frac{2^x-1}{2(2^x+1)}$，

所以 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2(2^{-x}+1)}=\frac{1-2^x}{2(1+2^x)}$，所以 $f(-x)=-f(x)$，错误；

对于 B，因为 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，所以 $f'(x)=\frac{2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$，

由 $\ln 2>0$ 知 $f'(x)>0$，错误；

对于 C，$f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=\frac{1}{6}$，$f(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2+1}=\frac{3}{10}$，

虽然 $0<1<2$，但是 $1\times f\left(2\right)<2\times f\left(1\right)$，

故对 $0<x_1<x_2$，$x_1f\left(x_2\right)>x_2f\left(x_1\right)$ 不恒成立，错误；

对于 D，函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}=\frac{2^x-1}{2\cdot 2^x+2}$，

则 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\frac{2^{x_1}-1}{2(2^{x_1}+1)}+\frac{2^{x_2}-1}{2(2^{x_2}+1)}$，$f\left(x_1+x_2\right)=\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

因为 $x_2>x_1>0$，所以 $2^{x_2}>2^{x_1}>1$，所以 $2^{x_1}(2^{x_2}-1)>2^{x_2}-1>0$，

所以 $2^{x_1+x_2}+1>2^{x_1}+2^{x_2}$，所以 $2\cdot 2^{x_1+x_2}+2>2^{x_1+x_2}+2^{x_1}+2^{x_2}+1$，

即 $2(2^{x_1+x_2}+1)>(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)$，所以 $\dfrac{2}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

所以 $\dfrac{2(2^{x_1+x_2}-1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

又 $\left(2^{x_1}-1\right)\left(2^{x_2}+1\right)+\left(2^{x_2}-1\right)\left(2^{x_1}+1\right)=2\left(2^{x_1+x_2}-1\right)$，

所以 $\dfrac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)+(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

所以 $\dfrac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)+(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{2(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

即 $\dfrac{2^{x_1}-1}{2(2^{x_1}+1)}+\dfrac{2^{x_2}-1}{2(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

所以 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_1+x_2\right)$，正确.

故选：D

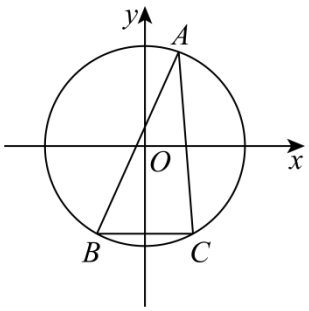
10. 【答案】B

【解析】

【分析】建立平面直角坐标系，设出 $A(a,b)$， $B(m,n),C(-m,n)$，表达出

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\left(n-\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{2}$，结合 $b\in[-1,1]$，求出最小值.

【详解】以 BC 的垂直平分线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，



设 $A(a,b)$， $B(m,n),C(-m,n)$，

则 $a^2+b^2=1,m^2+n^2=1$，

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(m-a,n-b)\cdot(-m-a,n-b)=a^2-m^2+n^2-2nb+b^2=2n^2-2bn=2\left(n-\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{2}$，

当 $n=\dfrac{b}{2}$ 时， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\left(n-\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{2}$ 取得最小值，最小值为 $-\dfrac{b^2}{2}$，

由于 $b\in[-1,1]$，故当 $b=\pm1$ 时， $-\dfrac{b^2}{2}$ 最小，故最小值为 $-\dfrac{1}{2}$，

此时 $n=\pm\frac{1}{2}$，满足要求，

故选：B

【点睛】平面向量解决几何最值问题，通常有两种思路：

①形化，即用平面向量的几何意义将问题转化为平面几何中的最值或取值范围问题，然后根据平面图形的特征直接进行求解；

②数化，即利用平面向量的坐标运算，把问题转化为代数中的函数最值与值域，不等式的解集，方程有解等问题，然后利用函数，不等式，方程的有关知识进行求解.

第二部分（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】24

【解析】

【分析】写出展开式的通项公式，求出 x^2 的系数.

【详解】$(2x+1)^4$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r\left(2x\right)^{4-r}$，

令 $r=2$，得 $T_3=\mathrm{C}_4^2\left(2x\right)^2=24x^2$，故 x^2 的系数为 24.

故答案为：24.

12.【答案】$y=x+2$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】求出过 $P(0,2)$ 且与 $l:x+2y-1=0$ 不平行的方程即可.

【详解】直线 $l:x+2y-1=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，故只需所求直线方程斜率不是 $-\frac{1}{2}$ 即可，

可设过点 P 且与直线 l 相交的一条直线的方程为 $y=x+2$.

故答案为：$y=x+2$ (答案不唯一).

13.【答案】 ①. 0 ②. $\left[-\frac{9}{8},2\right]$

【解析】

【分析】根据特殊角计算得函数值，换元可得 $t=\sin x\in\left[-1,1\right], y=2t^2+t-1$,再根据二次函数的单调性可得值域.

【详解】$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}-\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$f(x)=\sin x-\cos 2x=\sin x-\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^2 x+\sin x-1,\ t=\sin x,\ y=2t^2+t-1,$

设 $t=\sin x\in\left[-1,1\right], y=2t^2+t-1,$

$t\in\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$，$y=2t^2+t-1$单调递减，

$t\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$，$y=2t^2+t-1$单调递增，

$t=-\frac{1}{4},y_{\min}=-\frac{9}{8};t=1,y_{\max}=2;$

$f(x)$的值域为$\left[-\frac{9}{8},2\right]$.

故答案为：$0;\left[-\frac{9}{8},2\right]$.

14.【答案】80

【解析】

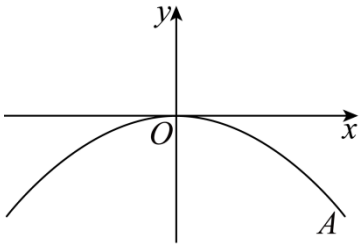
【分析】建立平面直角坐标系，待定系数法求出抛物线方程，得到答案.

【详解】以抛物线最高点为坐标原点，平行于地面为x轴，建立平面直角坐标系，

设抛物线方程为$x^2=-2py$，

由题意得$A(80,-40)$，将其代入抛物线方程得$6400=80p$，

解得$p=80$，故安全抛物线的焦点到其准线方程为80米.



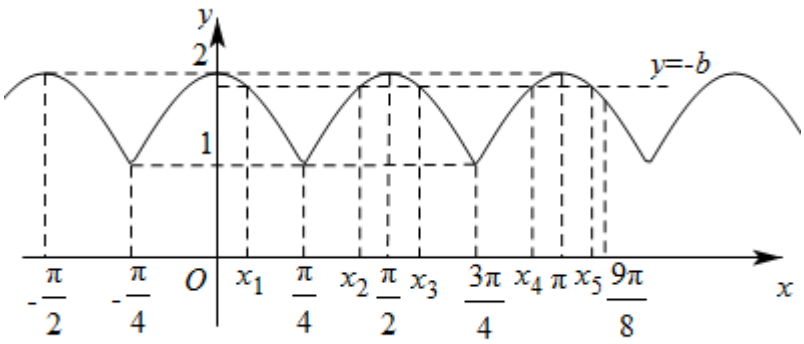
故答案为：80

15.【答案】②③

【解析】

【分析】画出函数图像，可判断①②，对于③，转化为$y=-b$与$y=f(x)$在$x\in\left[0,\frac{9\pi}{8}\right]$上交点问题，数形结合得到5个根的对称性，从而得到答案；对于④，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$时，$f(x)=|\cos 2x|+1$单调递增，且$f(x)\in\left[\frac{3}{2},2\right]$，从而判断出存在实数$a$，使得对任意$m\in\mathbf{R}$，只有一个$x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$，满足要求.

【详解】$f(x)=|\cos 2x|+1$的图象如下：



对于①，$f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$，①错误；

对于②，$f(x)$的一条对称轴方程为$x=\frac{\pi}{4}$，②正确；

对于③，画出图象，$y=-b$与$y=f(x)$在$x\in\left[0,\frac{9\pi}{8}\right]$上有5个交点，这5个交点即为函数$g(x)=f(x)+b(b\in\mathbf{R})$在区间$\left[0,\frac{9\pi}{8}\right]$上有5个零点，

从小到大依次记为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，且x_1,x_2关于$x=\frac{\pi}{4}$对称，x_2,x_3关于$x=\frac{\pi}{2}$对称，x_3,x_4关于$x=\frac{3\pi}{4}$对称，x_4,x_5关于$x=\pi$对称，

则$x_1+x_2=\frac{\pi}{2},x_2+x_3=\pi,x_3+x_4=\frac{3\pi}{2},x_4+x_5=2\pi$，

故$x_1+2\left(x_2+x_3+x_4\right)+x_5=\left(x_1+x_2\right)+\left(x_2+x_3\right)+\left(x_3+x_4\right)+\left(x_4+x_5\right)=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3\pi}{2}+2\pi=5\pi$，③正确；

对于④，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$时，$f(x)=|\cos 2x|+1$单调递增，且$f(x)\in\left[\frac{3}{2},2\right]$，

对任意$m\in\mathbf{R}$，$f\left(m\right)\in[1,2]$，由对勾函数性质可知$y=f(m)+\frac{1}{f(m)}$在$f\left(m\right)\in[1,2]$上单调递增，

故$f(m)+\frac{1}{f(m)}\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，

由单调性可知存在实数a，使得对任意$m\in\mathbf{R}$，只有一个$x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$，满足$af\left(x\right)=f(m)+\frac{1}{f(m)}$，④错误.

故答案为：②③

【点睛】函数零点问题：将函数零点问题或方程解的问题转化为两函数的图象交点问题，将代数问题几何化，借助图象分析，大大简化了思维难度，首先要熟悉常见的函数图象，包括指数函数，对数函数，幂函数，三角函数等，还要熟练掌握函数图象的变换，包括平移，伸缩，对称和翻折等，涉及零点之和问题，

通常考虑图象的对称性进行解决.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）选①，$BD=\sqrt{5}$；选②，$BD=\sqrt{7}$

（2）选①，$\sqrt{5}+1$；选②，$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）选①，利用余弦定理得到$BD=\sqrt{5}$；选②，利用互补得到$\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$，结合余弦定理列出方程，求出答案；

（2）选①，在（1）的基础上，得到$AB\perp AD$，结合三角形面积公式求出$\triangle ABD$和$\triangle BCD$的面积，相加即可；选②，在（1）的基础上求出$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$和$\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$，利用三角形面积公式求出$\triangle ABD$和$\triangle BCD$的面积，相加得到答案.

【小问 1 详解】

选①，由余弦定理得$\cos\angle DBC=\dfrac{DB^2+BC^2-CD^2}{2DB\cdot BC}=\dfrac{DB^2+9-4}{6DB}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

解得$BD=\sqrt{5}$，

选②，在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$\cos\angle BAD=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{1+4-BD^2}{4}=\dfrac{5-BD^2}{4}$，

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得$\cos\angle BCD=\dfrac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD\cdot BC}=\dfrac{4+9-BD^2}{12}=\dfrac{13-BD^2}{12}$，

因为$\angle DCB+\angle DAB=\pi$，所以$\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$，

即$\dfrac{5-BD^2}{4}+\dfrac{13-BD^2}{12}=0$，解得$BD=\sqrt{7}$.

【小问 2 详解】

选①，$BD=\sqrt{5}$，$\sin\angle DBC=\sqrt{1-\cos^2\angle DBC}=\dfrac{2}{3}$，

故$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot CB\sin\angle DBC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times3\times\dfrac{2}{3}=\sqrt{5}$，

在$\triangle ABD$中，$AB^2+AD^2=BD^2$，所以$AB\perp AD$，故$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$，

所以四边形$ABCD$的面积为$\sqrt{5}+1$；

选②，$BD=\sqrt{7}$，故$\cos\angle BAD=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{1}{2}$，故$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，

因为$\angle DCB+\angle DAB=\pi$，所以$\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$，

故 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】（1）由面面平行的性质证明即可；

（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量法计算可得；

（3）依题意可得 $CE\perp FP$，设 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EB}$，表示出 $\overrightarrow{FP}$，再根据数量积的坐标表示得到方程，求出 λ 的值，即可得解.

【小问 1 详解】

因为平面 ABF // 平面 CDE，A，D，E，F 四点共面，

且平面 $ABF\cap$ 平面 $ADEF=AF$，平面 $CDE\cap$ 平面 $ADEF=DE$，

所以 $AF//DE$.

【小问 2 详解】

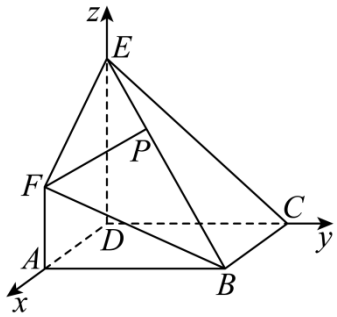
因为 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，$ABCD$ 是正方形，

如图建立空间直角坐标系，则 $F(2,0,1)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$E(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{CF}=(2,-2,1)$，

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-2y+2z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,1)$，

所以点 F 到平面 BCE 的距离 $d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



【小问 3 详解】

因为过点 F 与 CE 垂直的平面交直线 BE 于点 P，所以 $CE \perp FP$，

设 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EB}$，因为 $\overrightarrow{EB}=(2,2,-2)$，所以 $\overrightarrow{EP}=\lambda(2,2,-2)=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

$\overrightarrow{FE}=(-2,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EP}=(-2,0,1)+(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)=(2\lambda-2,2\lambda,1-2\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{FP}=-2\times2\lambda+2\times(1-2\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，

所以 $\left|\overrightarrow{EP}\right|=\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{EB}\right|=\dfrac{1}{4}\times\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18. 【答案】（1）140　（2）$\dfrac{7}{40}$

（3）$\mu_1>\mu_0>\mu_2$

【解析】

【分析】（1）完善表格，并得到认为人工智能对于教学“没有帮助”的频率，从而估计出该地区中小学教师中认为人工智能对于教学“没有帮助”的人数；

（2）根据分层抽样定义得到抽取的 5 名教师，有 1 名男教师，4 名女教师，再结合该地区中小学教师中男教师和女教师认为对于教学“很有帮助”的概率，分两种情况求出这 5 名教师中恰有 1 人认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率；

（3）计算平均值，并比较出大小即可.

【小问 1 详解】

根据表格中数据，完善表格，

人数 / 观点 / 类别		没有帮助	有一些帮助	很有帮助	合计
性别	男	2	10	8	20
	女	5	35	40	80
年龄	40岁以下（含40岁）	1	19	35	55
	40岁以上	6	26	13	45

可以得到 100 名教师中，认为人工智能对于教学“没有帮助”的频率为 $\dfrac{7}{100}$，

用频率估计概率，估计该地区中小学教师中认为人工智能对于教学“没有帮助”的人数为

$2000\times\frac{7}{100}=140$；

【小问 2 详解】

男女比例为$20:80=1:4$，故抽取的 5 名教师，有 1 名男教师，4 名女教师，

用频率估计概率，估计该地区中小学教师中男教师认为对于教学“很有帮助”的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，

女教师认为对于教学“很有帮助”的概率为$\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$，

抽取的 5 名教师中，恰有 1 人认为人工智能对于教学“很有帮助”，

则 1 名男教师认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率为$\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{40}$，

1 名女教师认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率为$\left(1-\frac{2}{5}\right)\times C_4^1?\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{20}$，

故这 5 名教师中恰有 1 人认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率为$\frac{1}{40}+\frac{3}{20}=\frac{7}{40}$；

【小问 3 详解】

$\mu_0=\frac{7\times0+45\times2+48\times4}{100}=2.82$，$\mu_1=\frac{1\times0+19\times2+35\times4}{55}=\frac{178}{55}$，

$\mu_2=\frac{6\times0+26\times2+13\times4}{45}=\frac{104}{45}$，

因为$\frac{178}{55}>2.82>\frac{104}{45}$，所以$\mu_1>\mu_0>\mu_2$.

19.【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）待定系数法求出椭圆方程，并求出$c=\sqrt{3}$，得到离心率；

（2）先根据$MF\perp ME$得到两三角形相似，得到$OE\cdot OF=1$，从而设直线AE方程为$y=\frac{m}{2}x+m$，直线AF方程为$y=-\frac{1}{2m}x-\frac{1}{m}$，与椭圆方程联立后，表达出$P$，$Q$两点的横纵坐标，得到两点关于原点对称，证明出结论.

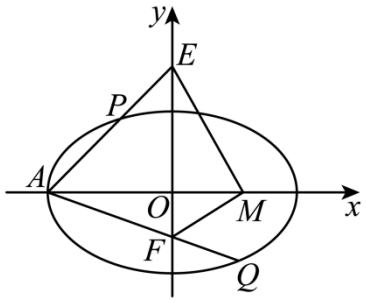
【小问 1 详解】

将 $A(-2,0),B\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 代入椭圆方程，$\begin{cases}\frac{4}{a^2}=1\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}$，故 $c^2=a^2-b^2=4-1=3$，$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

【小问 2 详解】



法 1：设点 $P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)\left(x_1\neq\pm2,x_2\neq\pm2\right)$，

所以直线 PA 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，直线 AQ 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2+2}\left(x+2\right)$，

所以点 $E\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，$F\left(0,\frac{2y_2}{x_2+2}\right)$.

$\overrightarrow{ME}=\left(-1,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，$\overrightarrow{MF}=\left(-1,\frac{2y_2}{x_2+2}\right)$

因为 $ME\perp MF$，所以 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$

即 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=1+\frac{4y_1y_2}{\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)}=0$ ①

当直线 PQ 无斜率时，设 $x=m$，

则 $x_1=x_2=m$，$y_1\cdot y_2=-y_1^2=\frac{m^2}{4}-1$

代入①得：$1+\frac{4\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}{m^2+4m+4}=0$，解得：$m=0$，

所以 P，O，Q 三点共线.

当直线 PQ 有斜率时，设 $y=kx+n\left(k\neq0\right)$，

由 $\begin{cases}y=kx+n\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得：$\left(1+4k^2\right)x^2+8knx+4n^2-4=0$

所以$\begin{cases}\Delta=64k^2n^2-4\left(1+4k^2\right)\left(4n^2-4\right)>0\\ x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{1+4k^2}\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4n^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$

$y_1\cdot y_2=\left(kx_1+n\right)\left(kx_2+n\right)=k^2x_1x_2+kn\left(x_1+x_2\right)+n^2$

$=\dfrac{k^2\left(4n^2-4\right)}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2n^2}{1+4k^2}+n^2=\dfrac{n^2-4k^2}{1+4k^2}$，

代入（1）得：$\dfrac{4n^2-4}{1+4k^2}-\dfrac{16kn}{1+4k^2}+4+\dfrac{4n^2-16k^2}{1+4k^2}=0$，

解得：$n=0$ 或 $n=2k$.

当 $n=2k$ 时，直线 PQ 的方程：$y=k\left(x+2\right)$，不符合题意.

故 $n=0$，所以 P，O，Q 三点共线.

综上，P，O，Q 三点共线.

法 2：设点 $P\left(x_0,y_0\right)\left(x_0\neq\pm2\right)$，点 $F\left(0,n\right)$，直线 PA 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0+2}\left(x+2\right)$，

所以点 $E\left(0,\dfrac{2y_0}{x_0+2}\right)$.

$\overrightarrow{ME}=\left(-1,\dfrac{2y_0}{x_0+2}\right)$，$\overrightarrow{MF}=\left(-1,n\right)$，

因为 $ME\perp MF$，所以 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$，

所以 $1+\dfrac{2y_0n}{x_0+2}=0$，即 $n=-\dfrac{x_0+2}{2y_0}$，

所以直线 AF 的方程为：$y=-\dfrac{x_0+2}{4y_0}\left(x+2\right)$，

要证 P，O，Q 三点共线，由椭圆的对称性，只需证 $Q\left(-x_0,-y_0\right)$ 在直线 AF 上.

又因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $x_0^2-4=-4y_0^2$，

所以 $-\dfrac{x_0+2}{4y_0}\left(-x_0+2\right)=\dfrac{x_0{}^2-4}{4y_0}=-y_0$，所以 $Q\left(-x_0,-y_0\right)$ 在直线 AF 上，

所以 P，O，Q 三点共线.

法 3：由题意得 $A\left(-2,0\right)$，不妨令 E 点在 x 轴上方，

因为 $MF\perp ME$，所以 $\angle EMO+\angle FMO=90°$，

又因为$\angle EMO+\angle MEO=90°$，所以$\angle FMO=\angle MEO$，

所以$\mathrm{Rt}\triangle EOM\backsim\mathrm{Rt}\triangle MOF$，故$\dfrac{|EO|}{|MO|}=\dfrac{|MO|}{|OF|}$，即$|OE|\cdot|OF|=1$，

设$|OE|=m$，则$|OF|=\dfrac{1}{m}$，

则直线AE方程为$y=\dfrac{m}{2}x+m$，与$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$联立得$\left(1+m^2\right)x^2+4m^2x+4m^2-4=0$，

设$P\left(x_1,y_1\right)$，则$-2x_1=\dfrac{4m^2-4}{1+m^2}$，解得$x_1=\dfrac{2-2m^2}{1+m^2}$，则$y_1=\dfrac{m}{2}\cdot\dfrac{2-2m^2}{1+m^2}+m=\dfrac{2m}{1+m^2}$，

直线AF方程为$y=-\dfrac{1}{2m}x-\dfrac{1}{m}$，与$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$联立得$\left(m^2+1\right)x^2+4x+4-4m^2=0$，

设$Q\left(x_2,y_2\right)$，则$-2x_2=\dfrac{4-4m^2}{m^2+1}$，解得$x_2=\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}$，则$y_2=-\dfrac{1}{2m}\cdot\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{-2m}{m^2+1}$，

故$x_1+x_2=0$，$y_1+y_2=0$，

所以P，Q关于原点对称，P，O，Q三点共线.

【点睛】定值问题常见方法：（1）从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

（2）直接推理计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

20.【答案】（1）$y=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}x-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

（2）$\left[-\sqrt{2},+\infty\right)$

（3）证明过程见解析

【解析】

【分析】（1）求导得到$f'(1)=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$，利用点斜式写出切线方程；

（2）先求定义域，求导后，即$f'(x)\geq0$恒成立，即$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\geq-a$，求出$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$的最小值，从而得到参数的取值范围；

（3）在（2）的基础上得到分$a\geq-\sqrt{2}$与$a<-\sqrt{2}$两种情况，结合函数的单调性，得到极值和最值情况，证明出结论.

【小问1详解】

当$a=0$时，$f(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^x$，$f(1)=\mathrm{e}$，

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\mathrm{e}^x$，故$f'(1)=\left(\dfrac{1}{2}+1\right)\mathrm{e}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-\mathrm{e}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}(x-1)$，即$y=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}x-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$；

【小问 2 详解】

$f(x)=(\sqrt{x}+a)\mathrm{e}^{x}(a\in\mathbf{R})$ 定义域为 $[0,+\infty)$，

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}+a\right)\mathrm{e}^{x}$，

若 $f(x)$ 是增函数，则 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，故 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}+a\geq 0$，

即 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\geq -a$，其中 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}$，即 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，

故 $\sqrt{2}\geq -a$，解得 $a\geq -\sqrt{2}$，

a 的取值范围是 $\left[-\sqrt{2},+\infty\right)$

【小问 3 详解】

$f(x)=(\sqrt{x}+a)\mathrm{e}^{x}(a\in\mathbf{R})$ 定义域为 $[0,+\infty)$，

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}+a\right)\mathrm{e}^{x}=\dfrac{2x+2a\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathrm{e}^{x}$，

结合（1）可知，当 $a\geq -\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 是增函数，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，且最小值小于 $f(1)$，

当 $a<-\sqrt{2}$ 时，令 $f'(x)=0$ 得，$2x+2a\sqrt{x}+1=0$，

该方程有两个正实数根，设为 $x_1,x_2,x_1<x_2$，由韦达定理得 $\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}=\dfrac{1}{2}$，即 $x_1x_2=\dfrac{1}{4}$，

令 $f'(x)>0$ 得，$x<x_1$，或 $x>x_2$，令 $f'(x)<0$ 得，$x_1<x<x_2$，

随着 x 的变化，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(x_2)$，故 $f(x)$ 的最小值为 $\min\{f(0),f(x_2)\}$，记为 $f(x_0)$，

当 $x_2\neq 1$ 时，若 $x_1>1$，则 $x_2>1$，此时与 $x_1x_2=\dfrac{1}{4}$ 矛盾，舍去，

所以 $x_1\in(0,1)$，则 $1\in(x_1,x_2)$ 或 $(x_2,+\infty)$，

故 $f(x_2)<f(1)$，所以 $\min\{f(0),f(x_2)\}$ 肯定小于 $f(1)$，所以 $f(x_0)<f(1)$，

当$x_2=1$时，$f'(1)=0$，所以$a=-\frac{3}{2}$，此时$f(0)=-\frac{3}{2}$，$f(1)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}$，

$f(0)-f(1)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}<0$，即$f(0)<f(1)$，故此时$f(x_0)<f(1)$，

综上，$f(x)$有最小值，且最小值小于$f(1)$

【点睛】方法点睛：分离参数法基本步骤为：

第一步：首先对待含参的不等式问题在能够判断出参数的系数正负的情况下，可以根据不等式的性质将参数分离出来，得到一个一端是参数，另一端是变量表达式的不等式，

第二步：先求出含变量一边的式子的最值，通常使用导函数或基本不等式进行求解.

第三步：由此推出参数的取值范围即可得到结论.

21.【答案】（1）取$\{a_n\}$为$4,6,9$；$\{b_n\}$为$1,3,5,7$.

（2）$p=\sqrt{2}$.

（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）取$\{a_n\}$为$4,6,9$；$\{b_n\}$为$1,3,5,7$，可验证它们符合题设要求.

（2）可证明$d>0$，设$\{c_n\}$的前5项为：$1,p,p^2,p^3,p^4\ (p>1)$，就$c_3=a_2$或$c_3=b_2$分类讨论后可求p的值.

（3）可证$q>1$，利用二项式定理可证明充分性，利用反证法结合等比中项可证明必要性.

【小问1详解】

取$\{a_n\}$为$4,6,9$；$\{b_n\}$为$1,3,5,7$，

则$\{a_n\}$满足：$\frac{6}{4}=\frac{9}{6}$，故$4,6,9$为等比数列.

而$3-1=5-3=7-5=2$，故$1,3,5,7$为等差数列，

故此时$\{a_n\}$，$\{b_n\}$符合题意.

【小问2详解】

因为集合C中的所有元素按从小到大排列构成首项为1的数列$\{c_n\}$，

故$\{c_n\}$中各项均为正数，所以$\{b_n\}$中的各项均为正数，

而$\{b_n\}$为无穷等差数列，故$d>0$.

设$\{c_n\}$的前5项为：$1,p,p^2,p^3,p^4\ (p>1)$，

因为$b_1<a_5$，$a_1=c_1=1$，$A\cap B=\varnothing$，所以$b_1\in\{p,p^2,p^3,p^4\}$，

此时必有$c_2=b_1=p$，事实上，若$c_2=a_2$，则$\{c_n\}$的前5项即是$\{a_n\}$的前5项，

与$b_1 \in \{p, p^2, p^3, p^4\}$矛盾.

所以$c_3 = a_2$或$c_3 = b_2$.

若$c_3 = a_2$，则$p^2 = 2$，所以$p = \sqrt{2}$，此时$\{c_n\}$的前5项为1，$\sqrt{2}$，2，$2\sqrt{2}$，4，

即$b_1 = \sqrt{2}$，$b_2 = 2\sqrt{2}$，所以数列$\{b_n\}$的公差为$d = b_2 - b_1 = \sqrt{2}$，

因为$b_3 = 3\sqrt{2} > a_2$，所以$p = \sqrt{2}$符合题意；

若$c_3 = b_2$，则$c_4 = b_3$或$c_4 = a_3$

①$c_4 = b_3$时，有p，p^2，p^3成等差数列，所以$2p^2 = p + p^3$，解得$p = 1$，与$p > 1$矛盾；

②$c_4 = a_3$时，有$p^3 = 2$，所以$p = \sqrt[3]{2}$，所以$\{c_n\}$的前5项为1，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{4}$，2，$2\sqrt[3]{2}$，

因为$2\sqrt[3]{2} \notin A$，所以$2\sqrt[3]{2} \in B$，即$b_3 = 2\sqrt[3]{2}$，

所以$b_1 + b_3 = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}, 2b_2 = 2\sqrt[3]{4}$，故$b_1 + b_3 \neq 2b_2$，与$\{b_n\}$为等差数列矛盾.

所以$c_3 = b_2$不可能.

综上，p的值为$\sqrt{2}$.

【小问3详解】

因为数列$\{b_n\}$是首项为1的无穷数列，由（2）知，数列$\{b_n\}$是递增的数列；

对于公比不为1的无穷数列$\{a_n\}$，必有$a_1 \geq 1$，$q > 1$.

否则，若q为负，则$\{a_n\}$相邻两项必有一项为负，

这与$\{c_n\}$中的最小项为$c_1 = 1$矛盾；

若$0 < q < 1$，则当$n > 1 - \dfrac{\ln a_1}{\ln q}$时，$a_1 q^{n-1} < a_1 q^{1-\frac{\ln a_1}{\ln q}-1} = 1$，

即$a_n < 1$，这与$\{c_n\}$中的最小项为$c_1 = 1$矛盾.

先证明充分性：

当d是正有理数时，因为数列$\{b_n\}$是递增的等差数列，所以$d > 0$，

设$d = \dfrac{s}{t}$（s，$t \in \mathbf{N}^*$，s，t互质），则$s = td$，

令$a_n = (1+s)^{n-1}$，则$a_1 = 1$，$a_2 = 1 + s = 1 + td = b_{t+1}$，

当$n \geq 3$时，

$$a_n = 1 + C_{n-1}^1 s + C_{n-1}^2 s^2 + \cdots + C_{n-1}^r s^r + \cdots + C_{n-1}^{n-1} s^{n-1}$$

$$= 1 + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 s + \cdots + C_{n-1}^r s^{r-1} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} s^{n-2}\right) td$$

所以数列$\{a_n\}$的第n项是数列$\{b_n\}$的第$\left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 s + \cdots + C_{n-1}^r s^{r-1} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} s^{n-2}\right) t + 1$项，

所以数列$\{a_n\}$中的项都是数列$\{b_n\}$的项，即$A\subseteq B$.

再证明必要性：

假设d是正无理数，因为$A\subseteq B$，即数列$\{a_n\}$中的项都是数列$\{b_n\}$的项，故$b_1=1$.

令$a_1=b_{i+1}$，$a_2=b_{j+1}$，$a_3=b_{k+1}$（i，j，$k\in\mathrm{N}$），则$a_1=1+id$，$a_2=1+jd$，$a_3=1+kd$，

且$i<j<k$，因为$a_2^2=a_1a_3$，即$(1+jd)^2=(1+id)(1+kd)$，

整理得：$2jd+j^2d^2=(i+k)d+ikd^2$，约去d有$2j+j^2d=(i+k)+ikd$，

因为i，j，$k\in\mathbf{N}^*$，且d是无理数，所以$\begin{cases}2j=i+k\\ j^2=ik\end{cases}$，消去$j$并整理得$(i-k)^2=0$，

故$\mathrm{i}=k$，与$\mathrm{i}<j<k$矛盾，所以假设不成立，即d是有理数.

综上所述，“存在数列$\{a_n\}$，使$A\subseteq B$”的充要条件是“d是正有理数”

【点睛】思路点睛：两类数列的交叉问题，往往需要从基本量来处理，注意合理的分类讨论，另外等比数列与等差数列的交叉问题，注意结合二项式定理来沟通两者的关系，而整数性问题注意结合整数的性质来处理.