2022 北京西城高三二模

数　　学

本试卷共 6 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-4<x<2\}$，$B=\{x|x^2\le 9\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-4,3]$　　B. $[-3,2)$

C. $(-4,2)$　　D. $[-3,3]$

2. 已知双曲线的焦点分别为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=4$，双曲线上一点 P 满足 $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2$，则该双曲线的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项 $a_1=2$，公差 $d=3$，若 $a_n+a_{n+2}=28$，则 $n=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 下列函数中，与函数 $y=x^3$ 的奇偶性相同，且在 $(0,+\infty)$ 上有相同单调性的是（　）

A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=\sin x$　　D. $y=x|x|$

5. 已知直线 $y=kx+2$ 与圆 C：$x^2+y^2=2$ 交于 A，B 两点，且 $|AB|=2$，则 k 的值为（　）

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

6. 已知 $\vec{e}$ 是单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\frac{1}{2}\le\vec{a}\cdot\vec{e}\le 1$，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是（　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1]$

C $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，那么“$|\varphi|=\frac{\pi}{6}$”是“$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上是增函数”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 $f(x)=|\lg x-a|$，记关于 x 的方程 $f(x)=1$ 的所有实数根的乘积为 $g(a)$，则 $g(a)$（　）

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

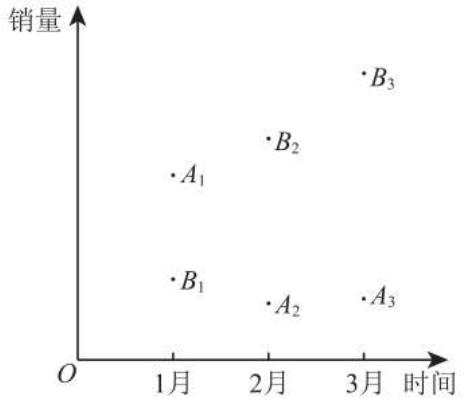
C. 既有最大值，也有最小值　　D. 既无最大值，也无最小值

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+3, x\le 0\\ (x-2)^2, 0<x\le a\end{cases}$ 定义域和值域的交集为空集，则正数 a 的取值范围是（　）

A. $(0,1]$　　B. $(0,1)$

C. $(1,4)$　　D. $(2,4)$

10. 如图为某商铺 A 、 B 两种商品在 2022 年前 3 个月的销售情况统计图，已知 A 商品卖出一件盈利 20 元， B 商品卖出一件盈利 10 元.图中点 A_1、 A_2、 A_3 的纵坐标分别表示 A 商品 2022 年前 3 个月的销售量，点 B_1、 B_2、 B_3 的纵坐标分别表示 B 商品 2022 年前 3 个月的销售量.根据图中信息，下列四个结论中正确的是（　）



①2 月 A 、 B 两种商品的总销售量最多；

②3 月 A 、 B 两种商品的总销售量最多；

③1 月 A 、 B 两种商品的总利润最多；

④2 月 A 、 B 两种商品的总利润最多.

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 二项式 $(1+x)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的展开式中 x^2 的系数为 21，则 $n=$_____.

12. 已知复数 z 在复平面内所对应的点的坐标为 $(-1,2)$，则 $\left|\frac{5}{z}\right|$ 为_____.

13. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，则焦点到准线的距离为_____；直线 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 与抛物线分别交于 P 、 Q 两点（点 P 在 x 轴上方），过点 P 作直线 PQ 的垂线交准线 l 于点 H ，则 $\frac{|PF|}{|PH|}=$_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 16，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列， $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.若集合 $A=\left\{n\in N^*\middle| a_n>b_n\right\}$ 中恰有 3 个元素，则符合题意的 b_1 的一个取值为_____.

15. 已知四棱锥 $P-ABCD$　高为 1， $\triangle PAB$ 和 $\triangle PCD$ 均是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，给出下列四个结论：

①四棱锥 $P-ABCD$ 可能为正四棱锥；

②空间中一定存在到 P，A，B，C，D 距离都相等的点；

③可能有平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

④四棱锥 $P-ABCD$ 的体积的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$2\sqrt{3}\cos^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sqrt{3}$.

（1）求 B 的大小；

（2）若 $\sqrt{3}(a+c)=2b$，证明：$a=c$.

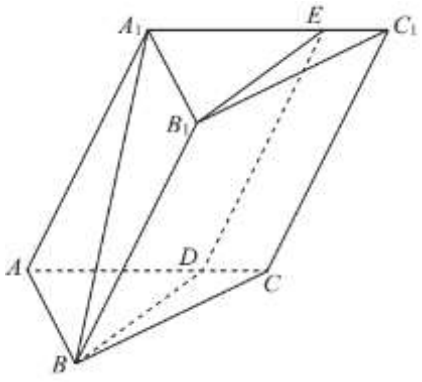
17. 2021 年 12 月 9 日，《北京市义务教育体育与健康考核评价方案》发布.义务教育体育与健康考核评价包括过程性考核与现场考试两部分，总分值 70 分.其中过程性考核 40 分，现场考试 30 分.该评价方案从公布之日施行，分学段过渡、逐步推开.现场考试采取分类限选的方式，把内容划分了四类，必考、选考共设置 22 项考试内容.某区在九年级学生中随机抽取 1100 名男生和 1000 名女生作为样本进行统计调查，其中男生和女生选考乒乓球的比例分别为 10% 和 5%，选考 1 分钟跳绳的比例分别为 40% 和 50%.假设选考项目中所有学生选择每一项相互独立.

（1）从该区所有九年级学生中随机抽取 1 名学生，估计该学生选考乒乓球的概率；

（2）从该区九年级全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人选考 1 分钟跳绳的概率；

（3）已知乒乓球考试满分 8 分.在该区一次九年级模拟考试中，样本中选考乒乓球的男生有 60 人得 8 分，40 人得 7.5 分，其余男生得 7 分；样本中选考乒乓球的女生有 40 人得 8 分，其余女生得 7 分.记这次模拟考试中，选考乒乓球的所有学生的乒乓球平均分的估计值为 μ_1，其中男生的乒乓球平均分的估计值为 μ_2，试比较 μ_1 与 μ_2 的大小.（结论不需要证明）

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 是边长为 4 的菱形，$AB=BC=\sqrt{13}$，点 D 为棱 AC 上动点（不与 A，C 重合），平面 B_1BD 与棱 A_1C_1 交于点 E.



（1）求证：$BB_1//DE$；

（2）若 $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{4}$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个条件作为已知，求直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值.条件①：平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C；条件②：$\angle A_1AC=60°$；条件③：$A_1B=\sqrt{21}$.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+a}{x+1}$.

（1）若 $f'(1)=\dfrac{1}{4}$，求 a 的值；

（2）当 $a>2$ 时，

①求证： $f(x)$ 有唯一的极值点 x_1；

②记 $f(x)$ 的零点为 x_0，是否存在 a 使得 $\dfrac{x_1}{x_0}\le \mathbf{e}^2$？说明理由.

20. 已知椭圆 C： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左顶点为 $A(-2,0)$，圆 O： $x^2+y^2=1$ 经过椭圆 C 的上、下顶点.

（1）求椭圆 C 的方程和焦距；

（2）已知 P， Q 分别是椭圆 C 和圆 O 上的动点（ P， Q 不在坐标轴上），且直线 PQ 与 x 轴平行，线段 AP 的垂直平分线与 y 轴交于点 M，圆 O 在点 Q 处的切线与 y 轴交于点 N .求线段 MN 长度的最小值.

21. 已知数列 A： a_1， a_2，…， a_{2m}，其中 m 是给定的正整数，且 $m\ge 2$.令 $b_i=\min\{a_{2i-1},a_{2i}\}$， $i=1,\cdots,m$，$X(A)=\max\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$， $c_i=\max\{a_{2i-1},a_{2i}\}$， $i=1,\cdots,m$， $Y(A)=\min\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$.这里， $\max\{\ \}$ 表示括号中各数的最大值， $\min\{\ \}$ 表示括号中各数的最小值.

（1）若数列 A：2，0，2，1，-4，2，求 $X(A)$， $Y(A)$ 值；

（2）若数列 A 是首项为 1，公比为 q 的等比数列，且 $X(A)=Y(A)$，求 q 的值；

（3）若数列 A 是公差 $d=1$ 的等差数列，数列 B 是数列 A 中所有项的一个排列，求 $X(B)-Y(B)$ 的所有可能值（用 m 表示）.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-4<x<2\}$，$B=\{x|x^2\le 9\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-4,3]$　　B. $[-3,2)$

C. $(-4,2)$　　D. $[-3,3]$

【答案】A

【解析】

【分析】先求 B，再求并集即可

【详解】易得 $B=\{x|-3\le x\le 3\}$，故 $A\cup B=(-4,3]$

故选：A

2. 已知双曲线的焦点分别为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=4$，双曲线上一点 P 满足 $||PF_1|-|PF_2||=2$，则该双曲线的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】由双曲线的定义和焦距即可求出 a 和 c 的值，进而可求离心率.

【详解】因为 $|F_1F_2|=2c=4$，所以 $c=2$，

又因为 $||PF_1|-|PF_2||=2$，所以由双曲线的定义可知 $2a=2$，解得 $a=1$，

则双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$，

故选：C.

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项 $a_1=2$，公差 $d=3$，若 $a_n+a_{n+2}=28$，则 $n=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】首先求出通项公式，再代入得到方程，解得即可；

【详解】解：因为首项 $a_1=2$，公差 $d=3$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$，

因为 $a_n+a_{n+2}=28$，所以 $(3n-1)+3(n+2)-1=28$，解得 $n=4$

故选：D

4. 下列函数中，与函数 $y=x^3$ 的奇偶性相同，且在 $(0,+\infty)$ 上有相同单调性的是（　）

A. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=\sin x$　　D. $y=x|x|$

【答案】D

【解析】

【分析】根据指对函数的性质判断 A、B，由正弦函数性质判断 C，对于 D 有 $y=f(x)=\begin{cases}-x^2,x\le 0\\x^2,x>0\end{cases}$，即可判断奇偶性和$(0,+\infty)$单调性.

【详解】由 $y=x^3$ 为奇函数且在$(0,+\infty)$上递增，

A、B：$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$、$y=\ln x$ 非奇非偶函数，排除；

C：$y=\sin x$ 为奇函数，但在$(0,+\infty)$上不单调，排除；

D：$y=f(x)=\begin{cases}-x^2,x\le 0\\x^2,x>0\end{cases}$，显然 $f(-x)=-f(x)$ 且定义域关于原点对称，在$(0,+\infty)$上递增，满足.

故选：D

5. 已知直线 $y=kx+2$ 与圆 C：$x^2+y^2=2$ 交于 A，B 两点，且 $|AB|=2$，则 k 的值为（　）

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】利用圆的弦长、弦心距、半径关系，以及点线距离公式列方程求 k 值.

【详解】由题设 $C(0,0)$ 且半径 $r=\sqrt{2}$，弦长 $|AB|=2$，

所以 C 到 $y=kx+2$ 的距离 $d=\sqrt{r^2-(\frac{|AB|}{2})^2}=1$，

即 $\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}=1$，可得 $k=\pm\sqrt{3}$.

故选：B

6. 已知 $\vec{e}$ 是单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\frac{1}{2}\le\vec{a}\cdot\vec{e}\le 1$，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是（　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1]$

C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量数量积的定义即可求解.

【详解】依题意，$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{e}\rangle=|\vec{a}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{e}\rangle$，

$\frac{1}{2}\le\left|\vec{a}\right|\bullet\cos\left\langle\vec{a},\vec{e}\right\rangle\le1$，$\therefore\cos\left\langle\vec{a},\vec{e}\right\rangle>0$，$\frac{1}{2\cos\left\langle\vec{a},\vec{e}\right\rangle}\le\left|\vec{a}\right|\le\frac{1}{\cos\left\langle\vec{a},\vec{e}\right\rangle}$，

又$\because0<\cos\left\langle\vec{a},\vec{e}\right\rangle\le1$，$\therefore\left|\vec{a}\right|\ge\frac{1}{2}$，

故选：C.

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，那么“$|\varphi|=\frac{\pi}{6}$”是“$f(x)$ 在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上是增函数”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】求得当$-\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+k\pi,k\in Z$时，$f(x)$是增函数,进而判断$|\varphi|=\frac{\pi}{6}$时，函数的单调性，即可得出结果.

【详解】当$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x+\varphi\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，$f(x)$单调递增.

则当$-\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}+k\pi,k\in Z$时，$f(x)$是增函数,

当$\varphi=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$在$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$单调递增，可得$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上是增函数；

当$\varphi=-\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$在$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$单调递增，可得$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上是增函数；

反之，当$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上是增函数时，由$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，可知，此时$\varphi=0,k=0$，即$|\varphi|=\frac{\pi}{6}$不成立.

所以“$|\varphi|=\frac{\pi}{6}$”是“$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上是增函数”的充分而不必要条件.

故选：A.

8. 已知 $f(x)=|\lg x-a|$，记关于 x 的方程 $f(x)=1$ 的所有实数根的乘积为 $g(a)$，则 $g(a)$（　）

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

C. 既有最大值，也有最小值　　D. 既无最大值，也无最小值

【答案】D

【解析】

【分析】求出方程 $f(x)=1$ 的实数根，从而可得 $g(a)$，再根据指数函数的性质即可得解.

【详解】解：由 $f(x)=1$，

得 $|\lg x-a|=1$，所以 $x=10^{a+1}$ 或 10^{a-1}，

故 $g(a)=10^{2a}$，

所以函数$g\left(a\right)$既无最大值，也无最小值.

故选：D.

9. 若函数$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x+3,x\le 0\\ \left(x-2\right)^2,0<x\le a\end{cases}$的定义域和值域的交集为空集，则正数$a$的取值范围是（　）

A. $\left(0,1\right]$　　B. $\left(0,1\right)$

C. $\left(1,4\right)$　　D. $\left(2,4\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】首先得到函数的定义域，再分析当$x\le 0$时$f\left(x\right)$的取值，即可得到$a\le 3$，再对$0<x\le a$时分$a\ge 2$和$0<a<2$两种情况讨论，求出此时$f\left(x\right)$的取值，即可得到$f\left(x\right)$的值域，从而得到不等式，解得即可；

【详解】解：因为$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x+3,x\le 0\\ \left(x-2\right)^2,0<x\le a\end{cases}$，所以$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-\infty,a\right]$，$a>0$，

当$x\le 0$时$f\left(x\right)=2^x+3$，则$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right]$上单调递增，所以$f\left(x\right)\in\left(3,4\right]$；

要使定义域和值域的交集为空集，显然$0<a\le 3$，

当$0<x\le a$时$f\left(x\right)=\left(x-2\right)^2$，

若$a\ge 2$则$f\left(2\right)=0$，此时显然不满足定义域和值域的交集为空集，

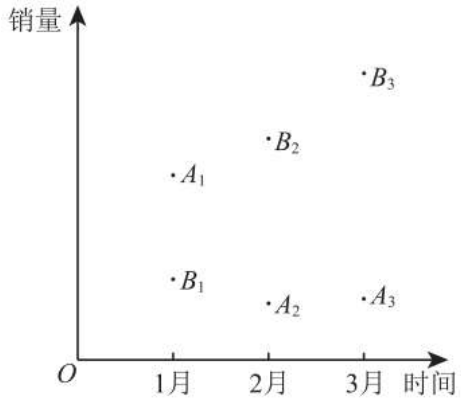
若$0<a<2$时$f\left(x\right)$在$\left(0,a\right]$上单调递减，此时$f\left(x\right)\in\left[\left(a-2\right)^2,4\right)$，

则$f\left(x\right)\in\left[\left(a-2\right)^2,4\right)\cup\left(3,4\right]$，

所以$\begin{cases}a<\left(a-2\right)^2\\ 0<a<2\end{cases}$，解得$0<a<1$，即$a\in\left(0,1\right)$

故选：B

10. 如图为某商铺A、B两种商品在2022年前3个月的销售情况统计图，已知A商品卖出一件盈利20元，B商品卖出一件盈利10元.图中点A_1、A_2、A_3的纵坐标分别表示A商品2022年前3个月的销售量，点B_1、B_2、B_3的纵坐标分别表示B商品2022年前3个月的销售量.根据图中信息，下列四个结论中正确的是（　）



①2 月 A 、 B 两种商品的总销售量最多；

②3 月 A 、 B 两种商品的总销售量最多；

③1 月 A 、 B 两种商品的总利润最多；

④2 月 A 、 B 两种商品的总利润最多.

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

【答案】C

【解析】

【分析】对①②，根据统计图的相关点纵坐标高低判断即可；

对③④，根据 A 利润是 B 的两倍，根据卖得更多的商品判断利润高低即可

【详解】对①②，根据统计图可得， B_3， A_3 的纵坐标之和显然最大，故 3 月 A 、 B 两种商品的总销售量最多；故②正确；

对③④，因为 A 商品卖出一件盈利 20 元， B 商品卖出一件盈利 10 元，根据统计图，若用对应的点表示对应点的纵坐标，则易得 $20A_1+10B_1>20A_3+10B_3>20A_2+10B_2$，故③正确

综上②③正确

故选：C.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 二项式 $\left(1+x\right)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的展开式中 x^2 的系数为 21，则 $n=$_____.

【答案】7

【解析】

【分析】写出二项式展开式通项，根据已知条件有 $\mathrm{C}_n^2=21$，即可求 n 值.

【详解】由题设，展开式通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r x^r$，而 x^2 的系数为 21，

所以 $\mathrm{C}_n^2=21$，即 $\frac{n(n-1)}{2}=21$ 且 $n\in\mathrm{N}^*$，可得 $n=7$.

故答案为：7

12. 已知复数 z 在复平面内所对应的点的坐标为 $\left(-1,2\right)$，则 $\left|\frac{5}{z}\right|$ 为_____.

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据复数的定义以及运算规则即可求解.

【详解】由题意，$z=-1+2\mathrm{i}$，则$\dfrac{5}{z}=\dfrac{5}{-1+2\mathrm{i}}=\dfrac{5(-1-2\mathrm{i})}{5}=-1-2\mathrm{i}$，

$\left|\dfrac{5}{z}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$；

故答案为：$\sqrt{5}$.

13. 已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l，则焦点到准线的距离为_____；直线$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$与抛物线分别交于P、Q两点（点P在x轴上方），过点P作直线PQ的垂线交准线l于点H，则$\dfrac{|PF|}{|PH|}=$_____.

【答案】 ① 2 ②. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】求出焦点及准线方程，从而可得焦点到准线的距离，作$PP'\perp l$交准线l于点P'，易得直线$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$过焦点，则$\dfrac{|PF|}{|PH|}=\dfrac{|PP'|}{|PH|}$从而可得出答案.

【详解】解：抛物线$y^2=4x$的焦点$F(1,0)$，准线l为$x=-1$，，

所以焦点到准线的距离为2，

如图，作$PP'\perp l$交准线l于点P'，

因为直线$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$过焦点F，

则$|PF|=|PP'|$，

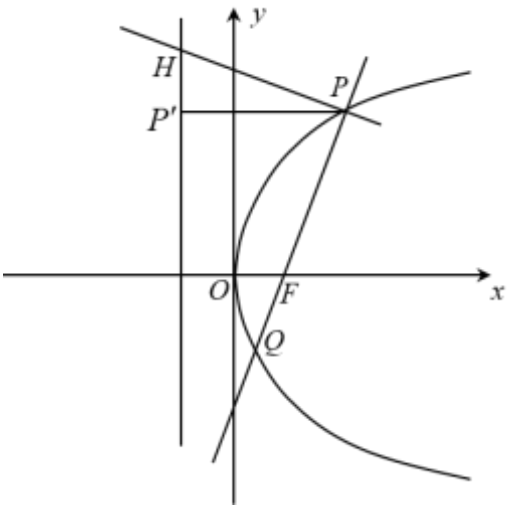
因为$PP'\perp l$，所以$PP'/\!/x$轴，

又直线$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$的倾斜角为$60°$，

所以$\angle FPP'=60°$，所以$\angle HPP'=30°$，

则$\dfrac{|PF|}{|PH|}=\dfrac{|PP'|}{|PH|}=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：2；$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



14. 已知数列$\{a_n\}$是首项为16，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，$\{b_n\}$是公差为2的等差数列.若集合$A=\left\{n\in N^*\middle|a_n>b_n\right\}$中恰有3个元素，则符合题意的$b_1$的一个取值为_____.

【答案】–1（答案不唯一）

【解析】

【分析】易得数列$\{a_n\}$逐项递减，可先确定集合$A=\left\{n\in N^*\middle|a_n>b_n\right\}$中的3项再列式求$b_1$的范围即可

【详解】易得数列$\{a_n\}$逐项递减，$\{b_n\}$逐项递增，故可考虑$a_1>b_1,a_2>b_2,a_3>b_3$，$a_n\le b_n,\left(n\ge 4,n\in N^+\right)$，

此时只需$\begin{cases}a_3>b_3\\a_4\le b_4\end{cases}$即可，即$\begin{cases}16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2>b_1+4\\16\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\le b_1+6\end{cases}$，解得$-4\le b_1<0$，

故符合题意的b_1的一个取值为–1（答案不唯一）

故答案为：–1（答案不唯一）

15. 已知四棱锥$P-ABCD$的高为1，$\triangle PAB$和$\triangle PCD$均是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，给出下列四个结论：

①四棱锥$P-ABCD$可能为正四棱锥；

②空间中一定存在到P，A，B，C，D距离都相等的点；

③可能有平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

④四棱锥$P-ABCD$的体积的取值范围是$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】①②④

【解析】

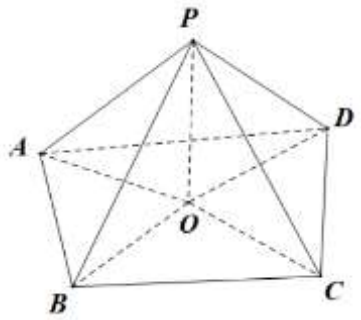
【分析】对①，分析当四棱锥$P-ABCD$为正四棱锥时是否满足条件即可；

对②，设四棱锥$P-ABCD$的高为PO，分析可得点O满足；

对③，假设平面$PAD\perp$平面$ABCD$，再推导得出矛盾即可判断；

对④，设$\angle BOC=\theta$，得出四棱锥$P-ABCD$的体积表达式再求解即可

【详解】根据题意，设$PO\perp ABCD$，则$PO=1$，又因为$\triangle PAB$和$\triangle PCD$均是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，易得$OA=OB=OC=OD=1$，且$\angle AOB=\angle COD=\dfrac{\pi}{2}$



对①，当$AB=BC=CD=AD=\sqrt{2}$时，底面为正方形，且O为底面中心，此时四棱锥$P-ABCD$可能为正四棱锥，故①正确；

对②，$OA=OB=OC=OD=OP=1$，故一定存在到P，A，B，C，D距离都相等的点O，故②正确；

对③，当平面$PAD\perp$平面$ABCD$时，因为$PO\perp ABCD$，故$PO\subset$平面PAD，此时$\angle AOD=\pi$，又因为$\angle AOB=\angle COD=\dfrac{\pi}{2}$，此时$B,C$重合，不满足题意，③错误；

对④，设$\angle BOC=\theta$，则$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot PO$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}OA\cdot OB+\dfrac{1}{2}OC\cdot OD+\dfrac{1}{2}OB\cdot OC\sin\theta+\dfrac{1}{2}OA\cdot OD\sin(\pi-\theta)\right)=\dfrac{1}{3}(1+\sin\theta)$，因为$\theta\in(0,\pi)$，故$\sin\theta\in(0,1]$，所以$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}(1+\sin\theta)\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，故④正确

故答案为：①②④

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，$2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{B}{2}+2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{3}$.

（1）求B的大小；

（2）若$\sqrt{3}(a+c)=2b$，证明：$a=c$.

【答案】（1）$\dfrac{2\pi}{3}$；

（2）证明见解析.

【解析】

分析】(1)利用降幂公式化简已知条件，求出tan$B$即可求出B；

(2)结合余弦定理和已知条件即可证明.

【小问1详解】

在$\triangle ABC$中，$\because 2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{B}{2}+2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{3}$，

$\therefore 2\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos B}{2}+\sin B=\sqrt{3}$，

$\therefore \sqrt{3}\cos B+\sin B=0$，

$\therefore tanB=-\sqrt{3}$，

$\because B\in(0,\pi)$，

$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

$\because B=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \cos B=-\frac{1}{2}$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2+ac$ ①，

$\because \sqrt{3}(a+c)=2b$，$\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+c)$ ②，

将②代入①，得$\frac{3}{4}(a^2+2ac+c^2)=a^2+c^2+ac$，

整理得$(a-c)^2=0$，$\therefore a=c$.

17. 2021 年 12 月 9 日，《北京市义务教育体育与健康考核评价方案》发布.义务教育体育与健康考核评价包括过程性考核与现场考试两部分，总分值 70 分.其中过程性考核 40 分，现场考试 30 分.该评价方案从公布之日施行，分学段过渡、逐步推开.现场考试采取分类限选的方式，把内容划分了四类，必考、选考共设置 22 项考试内容.某区在九年级学生中随机抽取 1100 名男生和 1000 名女生作为样本进行统计调查，其中男生和女生选考乒乓球的比例分别为 10% 和 5%，选考 1 分钟跳绳的比例分别为 40% 和 50%.假设选考项目中所有学生选择每一项相互独立.

（1）从该区所有九年级学生中随机抽取 1 名学生，估计该学生选考乒乓球的概率；

（2）从该区九年级全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人选考 1 分钟跳绳概率；

（3）已知乒乓球考试满分 8 分.在该区一次九年级模拟考试中，样本中选考乒乓球的男生有 60 人得 8 分，40 人得 7.5 分，其余男生得 7 分；样本中选考乒乓球的女生有 40 人得 8 分，其余女生得 7 分.记这次模拟考试中，选考乒乓球的所有学生的乒乓球平均分的估计值为μ_1，其中男生的乒乓球平均分的估计值为μ_2，试比较μ_1与μ_2的大小.（结论不需要证明）

【答案】（1）$\frac{8}{105}$

（2）0.32　（3）$\mu_1>\mu_2$

【解析】

【分析】（1）分别求出样本中男生和女生的人数，再由频率估计概率即可得解；

（2）根据题意易得从该区九年级全体男生中随机抽取 1 人和从该区九年级全体女生中随机抽取 1 人选考跳绳的概率，再分 2 个男生选考跳绳和 1 个男生和 1 个女生选考跳绳结合独立事件的概率公式即可得解；

（3）根据平均数公式分别求出μ_1,μ_2，即可得解.

【小问 1 详解】

解：样本中男生的人数为$1100\times10\%=110$人，

样本中女生的人数为$1000\times5\%=50$人，

设从该区所有九年级学生中随机抽取 1 名学生，该学生选考乒乓球为事件 A ，

则该学生选考乒乓球的概率 $P(A)=\dfrac{110+50}{1100+1000}=\dfrac{8}{105}$；

【小问 2 详解】

解：设从该区九年级全体男生中随机抽取 1 人，选考跳绳为事件 B ，

从该区九年级全体女生中随机抽取 1 人，选考跳绳为事件 C ，

由题意 $P(B)=0.4, P(C)=0.5$ ，

则从该区九年级全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人选考 1 分钟跳绳的概率为 $C_2^1\times0.4\times(1-0.4)\times0.5+C_2^2\times0.4^2\times(1-0.5)=0.32$；

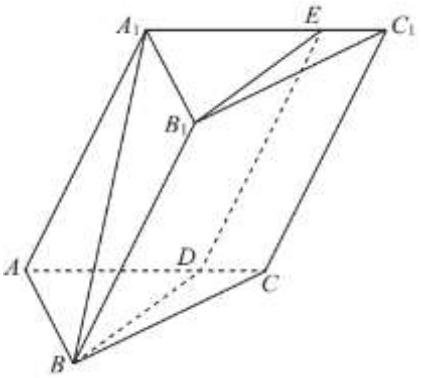
【小问 3 详解】

解：$\mu_1=\dfrac{100\times8+40\times7.5+20\times7}{160}=\dfrac{31}{4}$，

$\mu_2=\dfrac{60\times8+40\times7.5+10\times7}{110}=\dfrac{85}{11}$，

所以 $\mu_1>\mu_2$.

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 是边长为 4 的菱形，$AB=BC=\sqrt{13}$，点 D 为棱 AC 上动点（不与 A ，C 重合），平面 B_1BD 与棱 A_1C_1 交于点 E .



（1）求证：$BB_1//DE$；

（2）若 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3}{4}$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个条件作为已知，求直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值.条件①：平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C；条件②：$\angle A_1AC=60°$；条件③：$A_1B=\sqrt{21}$.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{9}{13}$

【解析】

【分析】（1）由棱柱的性质可得 $AA_1//BB_1$，即可得到 BB_1 // 平面 ACC_1A_1，再根据线面平行的性质证明即可；

（2）选条件①②，连接 A_1C，取 AC 中点 O，连接 A_1O，BO，即可得到 $A_1O\perp AC$，根据面面垂直的性质得到 $A_1O\perp$ 平面 ABC，即可得到 $A_1O\perp OB$，再由 $BO\perp AC$，即可建立空间直角坐标系，利用空间向量法求出线面角的正弦值；

选条件②③，连接 A_1C，取 AC 中点 O，连接 A_1O，BO，依题意可得 $A_1O\perp AC$，再由勾股定理逆定理得到 $A_1O\perp OB$，即可得到 $A_1O\perp$ 平面 ABC，接下来同①②；

选条件①③，取 AC 中点 O，连接 BO，A_1O，即可得到 $BO\perp AC$，由面面垂直的性质得到 $BO\perp$ 平面 ACC_1A_1，从而得到 $BO\perp OA_1$，再由勾股定理逆定理得到 $A_1O\perp AO$ 接下来同①②；

【小问 1 详解】

证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1//BB_1$，又 $BB_1\not\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 BB_1 // 平面 ACC_1A_1，

又因为平面 $B_1BDE\cap$ 平面 $ACC_1A_1=DE$，

所以 BB_1 // DE.

【小问 2 详解】

解：选条件①②.

连接 A_1C，取 AC 中点 O，连接 A_1O，BO.

在菱形 ACC_1A_1 中，$\angle A_1AC=60°$，

所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

又因为 O 为 AC 中点，所以 $A_1O\perp AC$，

又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，

平面 $ABC\bigcap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$，

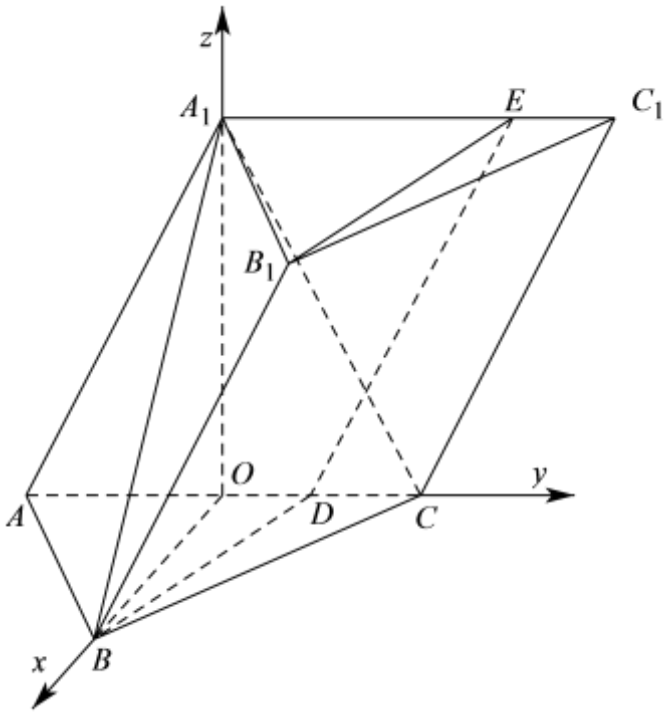
$A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1，且 $A_1O\perp AC$，

所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC，$OB\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1O\perp OB$.

又因为 $AB=BC$，所以 $BO\perp AC$.

以 O 为原点，以 OB、OC、OA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$， $A(0,-2,0)$， $A_1(0,0,2\sqrt{3})$， $B(3,0,0)$， $D(0,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{BD}=(-3,1,0)$， $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AA_1}=(0,2,2\sqrt{3})$.

设平面 B_1BDE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-3x_1+y_1=0\\ 2y_1+2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$

令 $z_1=-\sqrt{3}$，则 $y_1=3$， $x_1=1$，故 $\vec{n}=(1,3,-\sqrt{3})$.

又因为 $\overrightarrow{AB}=(3,2,0)$，

设直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{9}{13}$.

所以直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{9}{13}$.

选条件②③.

连接 A_1C，取 AC 中点 O，连接 A_1O， BO.

在菱形 ACC_1A_1 中，$\angle A_1AC=60°$，

所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

又 O 为 AC 中点，故 $A_1O\perp AC$，且 $A_1O=2\sqrt{3}$.

又因为 $OB=3$， $A_1B=\sqrt{21}$.

所以 $A_1O^2+OB^2=A_1B^2$，

所以 $A_1O \perp OB$.

又因为 $AC \cap OB = O$，所以 $A_1O \perp$ 平面 ABC.

以下同选①②.

选条件①③

取 AC 中点 O，连接 BO，A_1O.

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $BA = BC$，所以 $BO \perp AC$，且 $AO = 2$，$OB = 3$.

又因为平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1，平面 $ABC \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AC$，

所以 $BO \perp$ 平面 ACC_1A_1.

因为 $OA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BO \perp OA_1$.

在 Rt$\triangle BOA_1$ 中，$OA_1 = 2\sqrt{3}$.

又因为 $OA = 2$，$AA_1 = 4$，

所以 $OA_1^2 + OA^2 = AA_1^2$，

所以 $A_1O \perp AO$.

以下同选①②.

19. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x + a}{x+1}$.

（1）若 $f'(1) = \dfrac{1}{4}$，求 a 的值；

（2）当 $a > 2$ 时，

①求证：$f(x)$ 有唯一的极值点 x_1；

②记 $f(x)$ 的零点为 x_0，是否存在 a 使得 $\dfrac{x_1}{x_0} \le \mathbf{e}^2$？说明理由.

【答案】（1）$a = 1$.

（2）①证明见解析，②不存在，详细见解析.

【解析】

【分析】（1）求得导函数，由 $f'(1) = \dfrac{1}{4}$，代入计算即可.

(2) ①求得 $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x} - \ln x - a}{(x+1)^2}$，设 $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \ln x - a$，由函数性质可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.进而由 $g(\mathrm{e}^{-a}) = 1 + \mathrm{e}^a > 0, g(1) = 2 - a < 0$，可得 $f'(x) = 0$ 有 $(0, +\infty)$ 有唯一解，进而利用导数可判断 $f(x)$ 有唯一的极值点 x_1.

②由题意，可得 $x_0=\mathrm{e}^{-a}$,假设存在 a，使 $\frac{x_1}{x_0}\le \mathbf{e}^2$，进而可知 $\mathrm{e}^{-a}<x_1\le \mathrm{e}^{2-a}$,由 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

$g(\mathrm{e}^{-a})>0$，则 $g(\mathrm{e}^{2-a})\le 0$，求得 $a\le 2$，与已知矛盾，则假设错误.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x+1},x>0$，所以 $f'(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x-a}{(x+1)^2}$,

因为 $f'(1)=\frac{2-a}{4}=\frac{1}{4}$，所以 $a=1.$

【小问 2 详解】

① $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,

$$f'(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x-a}{(x+1)^2},$$

令 $f'(x)=0,$，则 $1+\frac{1}{x}-\ln x-a=0$.

设 $g(x)=1+\frac{1}{x}-\ln x-a$,因为 $y=\frac{1}{x},y=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $g(\mathrm{e}^{-a})=1+\mathrm{e}^a>0,g(1)=2-a<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点，|

所以 $f'(x)=0$ 有 $(0,+\infty)$ 有唯一解，不妨设为 $x_1,x_1\in(\mathrm{e}^{-a},1)$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下,

x	$(0,x_1)$	X_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	增	极大值	减

所以 $f(x)$ 有唯一的极值点 x_1.

②由题意，$\ln x_0=-a$，则 $x_0=\mathrm{e}^{-a}$,

若存在 a，使 $\frac{x_1}{x_0}\le \mathbf{e}^2$，则 $x_1\le \mathrm{e}^{2-a}<1$，所以 $\mathrm{e}^{-a}<x_1\le \mathrm{e}^{2-a}$,

因　$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$g(\mathrm{e}^{-a})=1+\mathrm{e}^a>0$，

则需 $g(\mathrm{e}^{2-a})=\mathrm{e}^{a-2}-1\le 0$，即 $a\le 2$，与已知矛盾.

所以，不存在 $a>2$,使得 $\frac{x_1}{x_0}\le \mathbf{e}^2$.

20. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A(-2,0)$，圆$O$：$x^2+y^2=1$经过椭圆$C$的上、下顶点.

（1）求椭圆C的方程和焦距；

（2）已知P，Q分别是椭圆C和圆O上的动点（P，Q不在坐标轴上），且直线PQ与x轴平行，线段AP的垂直平分线与y轴交于点M，圆O在点Q处的切线与y轴交于点N.求线段MN长度的最小值.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$2\sqrt{3}$；

（2）$\sqrt{6}$.

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，求出a,b，写出椭圆C的方程并计算焦距作答.

（2）设出点P，Q坐标，求线段AP中垂线方程得点M，求圆O在点Q处的切线方程得点N，再借助均值不等式求解作答.

【小问1详解】

依题意，$a=2,b=1$，由$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，得$2c=2\sqrt{3}$，

所以椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，焦距为$2\sqrt{3}$.

【小问2详解】

设$P(x_0,y_0)\ (x_0y_0\neq 0)$，则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，依题意，设$Q(x_1,y_0)(x_1\neq 0)$，且$x_1^2+y_0^2=1$，

因$A(-2,0)$，则线段AP的中点为$(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2})$，直线$AP$的斜率$k_{AP}=\frac{y_0}{x_0+2}$，

则线段AP的中垂线方程为：$y-\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0+2}{y_0}(x-\frac{x_0-2}{2})$，

令$x=0$得点M的纵坐标$y_M=\frac{y_0}{2}+\frac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}=\frac{x_0^2+y_0^2-4}{2y_0}$，而$x_0^2-4=-4y_0^2$，则$y_M=-\frac{3y_0}{2}$，即

$M(0,-\frac{3}{2}y_0)$，

直线OQ的斜率$k_{OQ}=\frac{y_0}{x_1}$，因此，圆O在点Q处的切线斜率为$-\frac{x_1}{y_0}$，

切线方程为$y-y_0=-\frac{x_1}{y_0}(x-x_1)$，令$x=0$得点$N$的纵坐标$y_N=y_0+\frac{x_1^2}{y_0}=\frac{x_1^2+y_0^2}{y_0}=\frac{1}{y_0}$，即$N(0,\frac{1}{y_0})$，

则有$|MN|=|y_N-y_M|=|\frac{1}{y_0}+\frac{3}{2}y_0|=\frac{1}{|y_0|}+\frac{3}{2}|y_0|\geq 2\sqrt{\frac{1}{|y_0|}\cdot\frac{3}{2}|y_0|}=\sqrt{6}$，当且仅当$\frac{1}{|y_0|}=\frac{3}{2}|y_0|$，即

$y_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$时取“=”，

所以线段MN长度的最小值为$\sqrt{6}$.

【点睛】思路点睛：圆锥曲线中的最值问题，可以以直线的斜率、横(纵)截距、图形上动点的横(纵)坐标为变量，建立函数关系求解作答.

21. 已知数列A：a_1，a_2，…，a_{2m}，其中m是给定的正整数，且$m\geq 2$.令$b_i=\min\{a_{2i-1},a_{2i}\}$，$i=1,\cdots,m$，$X(A)=\max\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$c_i=\max\{a_{2i-1},a_{2i}\}$，$i=1,\cdots,m$，$Y(A)=\min\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$.这里，$\max\{\ \}$表示括号中各数的最大值，$\min\{\ \}$表示括号中各数的最小值.

（1）若数列A：2，0，2，1，-4，2，求$X(A)$，$Y(A)$的值；

（2）若数列A是首项为1，公比为q　等比数列，且$X(A)=Y(A)$，求q的值；

（3）若数列A是公差$d=1$的等差数列，数列B是数列A中所有项的一个排列，求$X(B)-Y(B)$的所有可能值（用m表示）.

【答案】（1）$X(A)=1$，$Y(A)=2$；

（2）$q=1$；

（3）所有可能值为$-1,1,2,...,2m-3$.

【解析】

【分析】（1）根据函数定义写出$X(A)$，$Y(A)$即可.

（2）讨论数列A的项各不相等或存在相等项，当各项都不相等，根据题设b_i,c_i定义判断$\{b_1,b_2,...,b_m\}\cap\{c_1,c_2,...,c_m\}=\varnothing$，当存在相等项，由等比数列通项公式求$q$，进而确定$q$的值；

（3）利用数列A的单调性结合（2）的结论求$X(B)-Y(B)$的取值范围，估计所有可能取值，再应用分类讨论求证$X(B)-Y(B)$对应所有可能值均可取到，即可得结果.

【小问1详解】

由题设，$b_1=0$，$b_2=1$，$b_3=-4$，则$X(A)=\max\{0,1,-4\}=1$，

$c_1=2$，$c_2=2$，$c_3=2$，则$Y(A)=\min\{2,2,2\}=2$，

所以$X(A)=1$，$Y(A)=2$.

【小问2详解】

若数列A任意两项均不相等，

当$i=1,...,m$时$b_i\neq c_i$；

当$i,j\in\{1,...,m\}$且$i\neq j$时，$\{a_{2i-1},a_{2i}\}\cap\{a_{2j-1},a_{2j}\}=\varnothing$，

又$b_i=\min\{a_{2i-1},a_{2i}\}\in\{a_{2i-1},a_{2i}\}$，$c_j=\max\{a_{2j-1},a_{2j}\}\in\{a_{2j-1},a_{2j}\}$，

此时$b_i\neq c_i$；

综上，$\{b_1,b_2,...,b_m\}\cap\{c_1,c_2,...,c_m\}=\varnothing$，故$X(A)\neq Y(A)$，不合要求；

要使$X(A)=Y(A)$，即存在$i\neq j$且$i,j\in\{1,...,2m\}$使$a_i=a_j$，即$q^{i-1}=q^{j-1}$，

又$q\neq 0$，则$q=\pm 1$，

当$q=-1$，则$X(A)=-1,Y(A)=1$，不合要求；

当 $q=1$，则 $X(A)=Y(A)=1$，满足题设；

综上，$q=1$.

【小问 3 详解】

由题设数列 A 单调递增且 $a_1<a_2=a_1+1<.....<a_{2m}=a_1+2m-1$，

由（2）知：$X(B)\neq Y(B)$，

根据题设定义，存在 $i\neq j$ 且 $i,j\in\{1,...,2m\}$，$X(B)=a_i,Y(B)=a_j$，

则 $X(B)-Y(B)=a_i-a_j=i-j$，

由 $X(B)$ 比数列 A 中 $m-1$ 个项大，$X(B)\geq a_m$，同理 $Y(B)\leq a_{m+1}$，

所以 $X(B)-Y(B)\geq a_m-a_{m+1}=-1$；

又 $X(B)$ 至少比数列 A 中一项小，$X(B)\leq a_{2m-1}$，同理 $Y(B)\geq a_2$，

所以 $X(B)-Y(B)\leq a_{2m-1}-a_2=2m-3$；

综上，$X(B)-Y(B)\in\{-1,1,2,...,2m-3\}$.

令数列 $B:x_1,x_2,...,x_{2m}$，下证 $-1,1,2,...,2m-3$ 各值均可取到，

i、当 $x_{2i-1}=a_i,x_{2i}=a_{m+i},i=1,2,...,m$，而数列 A 递增，

$b_i=\min\{x_{2i-1},x_{2i}\}=\min\{a_i,a_{m+i}\}=a_i$，$c_i=\max\{x_{2i-1},x_{2i}\}=\max\{a_i,a_{m+i}\}=a_{m+i}$ 且 $i=1,...,m$，

此时，$X(B)=\max\{b_1,...,b_m\}=\max\{a_1,...,a_m\}=a_m$，$Y(B)=\min\{c_1,...,c_m\}=\min\{a_{m+1},...,a_{2m}\}=a_{m+1}$，

则 $X(B)-Y(B)=-1$；

ii、当 $k=1,2,...,m-1$ 时，$x_{2k-1}=a_k,x_{2k}=a_m,x_{2m-1}=a_{m+k},x_{2m}=a_{2m}$，则 $b_k=a_k,c_k=a_m,b_m=a_{m+k},c_m=a_{2m}$，

当 $i=1,...,m$ 且 $i\neq k,m$ 时，令 $x_{2i-1}=a_i,x_{2i}=a_{m+i}$，则 $b_i=a_i\leq a_{m-1},c_i=a_{m+i}\geq a_{m+1}$，

所以 $X(B)=\max\{b_1,...,b_m\}=\max\{a_1,...,a_{m-1},a_{m+k}\}=a_{m+k}$，

$Y(B)=\min\{c_1,...,c_m\}=\min\{a_{m+1},...,a_{m+k-1},a_m,a_{m+k+1},...,a_{2m}\}=a_m$，

此时 $X(B)-Y(B)=a_{m+k}-a_m=k\in\{1,2,...,m-1\}$；

iii、给定 $t\in\{1,2,...,m-2\}$，

令 $x_{2i-1}=a_i,x_{2i}=a_{i+1}(i=1,...,t)$ 且 $x_{2i-1}=a_{2i-1},x_{2i}=a_{2i}(i=t+1,...,m)$，

则 $b_i=\min\{x_{2i-1},x_{2i}\}=a_i(i=1,...,t)$，$b_i=\min\{x_{2i-1},x_{2i}\}=a_{2i-1}(i=t+1,...,m)$，

又数列 A 递增，$X(A)=\max\{b_1,...,b_m\}=a_{2m-1}$，

$c_i=\max\{x_{2i-1},x_{2i}\}=a_{t+i}(i=1,...,t)$，$c_i=\max\{x_{2i-1},x_{2i}\}=a_{2i}(i=t+1,...,m)$，

所以 $Y(A)=\min\{c_1,...,c_m\}=a_{t+1}$，

此时 $X(B)-Y(B)=a_{2m-1}-a_{t+1}=2m-2-t$ 且 $t\in\{1,2,...,m-2\}$，

故 $X(B)-Y(B)\in\{m,m+1,...,2m-3\}$，

综上，$X(B)-Y(B)=k\in\{-1,1,2,...,2m-3\}$.

【点睛】关键点点睛：第三问，首先根据数列的单调性和定义求 $X(B)-Y(B)$ 的取值范围，再由定义结合分类讨论求证范围内所有可能值都可取到.