2022 北京海淀高三二模

数　　学

2022．05

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x<0或x>1\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$（　）

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0\le x<1\}$

C. $\{x|0<x\le 1\}$　　D. $\{x|0\le x\le 1\}$

2. 在 $(1-2x)^3$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A. -2　　B. 2　　C. -6　　D. 6

3. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线经过点 $(1,2)$，则双曲线的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

4. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x+y>0$，则（　）

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>0$　　B. $x^3+y^3>0$

C. $\lg(x+y)>0$　　D. $\sin(x+y)>0$

5. 若 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x<0\\ bx-1, & x>0\end{cases}$ 是奇函数，则（　）

A. $a=1,b=-1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=1$　　D. $a=-1,b=-1$

6. 已知 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，点 $P_n(x_n,y_n)(n=1,2,3,\cdots)$ 在抛物线上.若 $|P_{n+1}F|-|P_nF|=1$，则（　）

A. $\{x_n\}$ 等差数列　　B. $\{x_n\}$ 是等比数列

C. $\{y_n\}$ 是等差数列　　D. $\{y_n\}$ 是等比数列

7. 已知向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$.若 $\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{b}\rangle$，则 $\vec{c}$ 可能是（　）

A. $2\vec{a}-\vec{b}$　　B. $\vec{a}+\vec{b}$

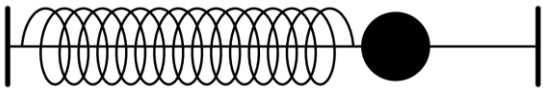
C. $2\vec{a}+\vec{b}$　　D. $\sqrt{3}\vec{a}+\vec{b}$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则“$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数”是“任意 $a>0$，$y=f(x+a)-f(x)$ 无零点”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

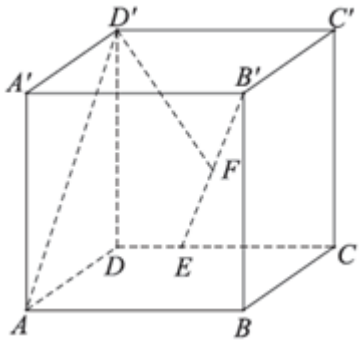
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 从物理学知识可知，图中弹簧振子中　小球相对平衡位置的位移 y 与时间 t（单位：s）的关系符合函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)(|\omega|<100)$.从某一时刻开始，用相机的连拍功能给弹簧振子连拍了 20 张照片.已知连拍的间隔为 0.01s，将照片按拍照的时间先后顺序编号，发现仅有第 5 张、第 13 张、第 17 张照片与第 1 张照片是完全一样的，请写出小球正好处于平衡位置的所有照片的编号为（　）



A. 9、15　　B. 6、18　　C. 4、11、18　　D. 6、12、18

10. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E 为棱 DC 上的动点，F 为线段 $B'E$ 的中点.给出下列四个



① $B'E\perp AD'$；

②直线 $D'F$ 与平面 $ABB'A'$ 所成角不变；

③点 F 到直线 AB 的距离不变；

④点 F 到 A,D,D',A' 四点的距离相等.

其中，所有正确结论的序号为（　）

A. ②③　　B. ③④

C. ①③④　　D. ①②④

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知 a,b 均为实数.若 $b+\text{i}=\text{i}(a+\text{i})$，则 $a+b=$_____.

12. 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>1$ 的解集为_____.

13. 已知圆 $C:x^2+y^2+2x=0$，则圆 C 的半径为_____；若直线 $y=kx$ 被圆 C 截得的弦长为 1，则 $k=$_____.

14. 已知 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的图象向右平移 $a(a>0)$ 个单位后得到 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的最大值为_____；若 $f(x)+g(x)$ 的值域为 $\{0\}$，则 a 的最小值为_____.

15. 在现实世界，很多信息的传播演化是相互影响的.选用正实数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别表示两组信息的传输链上每个节点处的信息强度，数列模型：$a_{n+1}=2a_n+b_n, b_{n+1}=a_n+2b_n(n=1,2\cdots)$，描述了这两组信息在互相影响之下的传播演化过程.若两组信息的初始信息强度满足$a_1>b_1$，则在该模型中，关于两组信息，给出如下结论：

①$\forall n\in\mathbf{N}^*, a_n>b_n$；

②$\forall n\in\mathbf{N}^*, a_{n+1}>a_n, b_{n+1}>b_n$；

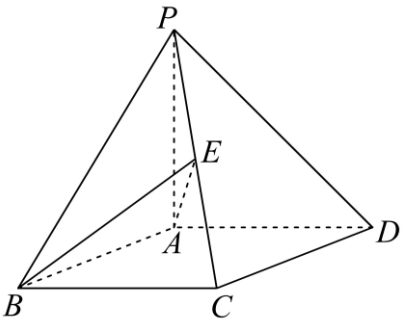
③$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得当$n>k$时，总有$\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|<10^{-10}$

④$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得当$n>k$时，总有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-2\right|<10^{-10}$.

其中，所有正确结论的序号是_____

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 如图，已知四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=2$，点E是PC的中点.



（1）求证：$DC//$面ABE；

（2）求DC到平面ABE　距离.

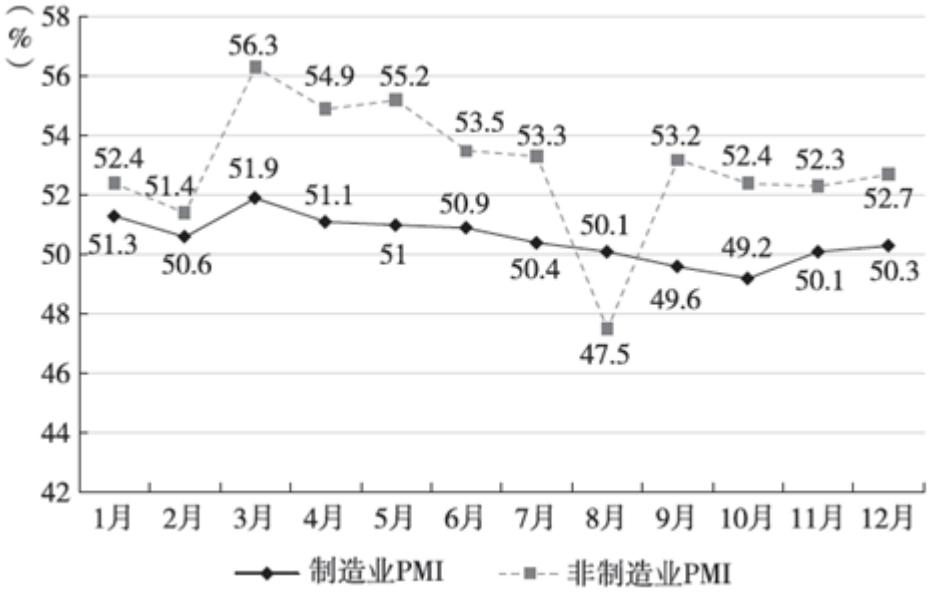
17. 在$\triangle ABC$中，$7a=6b\cos B$.

（1）若$\sin A=\frac{3}{7}$，求$\angle B$；

（2）若$c=8$，从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在.求$\triangle ABC$的面积

条件①：$\sin A=\frac{4}{7}$；　条件②：$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. PMI 值是国际上通行的宏观经济监测指标之一，能够反映经济的变化趋势.下图是国家统计局发布的某年 12 个月的制造业和非制造业 PMI 值趋势图.将每连续 3 个月的 PMI 值做为一个观测组，对国家经济活动进行监测和预测



（1）现从制造业的 10 个观测组中任取一组，

（i）求组内三个 PMI 值至少有一个低于 50．0 的概率；

（ii）若当月的 PMI 值大于上一个月的 PMI 值，则称该月的经济向好.设 X 表示抽取的观测组中经济向好的月份的个数（由已有数据知 1 月份的 PMI 值低于去年 12 月份的 PMI 值），求 X 的分布列与数学期望；

（2）用 $b_j(j=1,2,\cdots,12)$ 表示第 j 月非制造业所对应的 PMI 值，$\overline{b}$ 表示非制造业 12 个月 PMI 值的平均数，请直接写出 $\left|b_j-\overline{b}\right|$ 取得最大值所对应的月份.

19. 椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A(-2,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）已知经过点 $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的直线 l 交椭圆 M 于 B,C 两点，D 是直线 $x=-4$ 上一点.若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，求直线 l 的方程.

20. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{a}{x}$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（2）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（3）当 $x<0$ 时，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$ 恒成立，求 a 取值范围.

21. 已知有限数列 $\{a_n\}$ 共 M 项 $(M\geq 4)$，其任意连续三项均为某等腰三角形的三边长，且这些等腰三角形两两均不全等.将数列 $\{a_n\}$ 的各项和记为 S .

（1）若 $a_n\in\{1,2\}(n=1,2,\cdots,M)$，直接写出 M,S 的值；

（2）若 $a_n\in\{1,2,3\}(n=1,2,\cdots,M)$，求 M 的最大值；

（3）若 $a_n \in \mathbf{N}^*(n=1,2,\cdots,M), M=16$，求 S 的最小值

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x\left\langle 0\text{或}x\right\rangle 1\right\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$（　）

A. $\left\{x\middle|0<x<1\right\}$　　B. $\left\{x\middle|0\le x<1\right\}$

C. $\left\{x\middle|0<x\le 1\right\}$　　D. $\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】直接由补集的概念求解即可.

详解】由题意知：$\complement_{\mathbf{R}}A=\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}$.

故选：D.

2. 在 $\left(1-2x\right)^3$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A. -2　　B. 2　　C. -6　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】直接由二项展开式求含 x 的项即可求解.

【详解】由题意知：含 x 的项为 $\mathrm{C}_3^1\cdot\left(-2x\right)=-6x$，故 x 的系数为 -6.

故选：C.

3. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线经过点 $\left(1,2\right)$，则双曲线的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出渐近线的方程，由点 $\left(1,2\right)$ 得 $\dfrac{b}{a}=2$，又 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$ 即可求解.

【详解】易知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，由渐近线经过点 $\left(1,2\right)$，可得 $\dfrac{b}{a}=2$，

故离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.

故选：D.

4. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x+y>0$，则（　）

A. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>0$　　B. $x^3+y^3>0$

C. $\lg(x+y)>0$　　D. $\sin(x+y)>0$

【答案】B

【解析】

【分析】取特殊值即可判断 A、C、D 选项，因式分解即可判断 B 选项.

【详解】对于 A，令 $x=1,y=-\frac{1}{2}$，显然 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1-2<0$，错误；

对于 B，$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=(x+y)\left[\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]\geq 0$，

又 $x=\frac{1}{2}y,y=0$ 不能同时成立，故 $(x+y)\left[\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]>0$，正确；

对于 C，取 $x=1,y=0$，则 $\lg(x+y)=0$，错误；

对于 D，取 $x=1,y=3$，则 $\sin(x+y)=\sin 4<0$，错误.

故选：B.

5. 若 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x<0\\ bx-1, & x>0\end{cases}$ 是奇函数，则（　）

A. $a=1,b=-1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=1$　　D. $a=-1,b=-1$

【答案】C

【解析】

【分析】由 $f(x)$ 为奇函数可得 $\begin{cases}f(-1)=-f(1)\\ f(-2)=-f(2)\end{cases}$，代入相应解析式解方程即可.

【详解】易知定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，由 $f(x)$ 为奇函数可得 $\begin{cases}f(-1)=-f(1)\\ f(-2)=-f(2)\end{cases}$，即 $\begin{cases}-1+a=-(b-1)\\ -2+a=-(2b-1)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$.

故选：C.

6. 已知 F 为抛物线 $y^2=4x$　焦点，点 $P_n(x_n,y_n)(n=1,2,3,\cdots)$ 在抛物线上.若 $|P_{n+1}F|-|P_nF|=1$，则（　）

A. $\{x_n\}$ 是等差数列　　B. $\{x_n\}$ 是等比数列

C. $\{y_n\}$ 是等差数列　　D. $\{y_n\}$ 是等比数列

【答案】A

【解析】

【分析】根据抛物线的定义：抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，即可求解.

【详解】由题可知，抛物线的焦点为 $F(1,0)$，准线为 $x=-1$，

点 $P_n(x_n,y_n)(n=1,2,3,\cdots)$ 在抛物线上，由抛物线的定义可知，

点 $P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$ 到焦点 F 的距离，即为点 $P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$ 到准线的距离，故 $|P_{n+1}F|=x_{n+1}+1$，同理

$|P_nF|=x_n+1$；

所以 $|P_{n+1}F|-|P_nF|=(x_{n+1}+1)-(x_n+1)=1$，解得 $x_{n+1}-x_n=1(n=1,2,3,\cdots)$.

故数列$\{x_n\}$是等差数列.

故选：A.

7. 已知向量$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$.若$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{b}\rangle$，则$\vec{c}$可能是（　）

A. $2\vec{a}-\vec{b}$　　B. $\vec{a}+\vec{b}$

C. $2\vec{a}+\vec{b}$　　D. $\sqrt{3}\vec{a}+\vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知$\vec{a}$，$\vec{b}$以及$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{b}\rangle$，可确定$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=120^{\circ}$，进而确定$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle$夹角，依次判断选项即可得解.

【详解】解：$\because\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$，$\therefore\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=120^{\circ}$，又$\because\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{b}\rangle$，

$\therefore\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{b}\rangle=60^{\circ}$或$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\langle\vec{c},\vec{b}\rangle=120^{\circ}$，

对选项A，若$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}=\left(3,-\sqrt{3}\right)$，$\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=30^{\circ}$，此时不成立；

对选项B，若$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\left(0,\sqrt{3}\right)$，$\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=0$，

解得$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=90^{\circ}$，此时不成立；

对选项C，若$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\dfrac{1}{2}$，

解得$\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=60^{\circ}$，此时成立；

对选项D，若$\vec{c}=\sqrt{3}\vec{a}+\vec{b}=\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}\right)$，$\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}\neq\dfrac{1}{2}$，且$\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}\neq-\dfrac{1}{2}$

，此时不成立.

故选：C

8. 设函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，则“$f\left(x\right)$是$\mathbf{R}$上的增函数”是“任意$a>0$，$y=f\left(x+a\right)-f\left(x\right)$无零点”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数得 $f(x+a)>f(x)$，即 $y=f(x+a)-f(x)>0$ 无零点，满足充分性；反之若对任意 $a>0$，$f(x+a)<f(x)$，满足 $y=f(x+a)-f(x)$ 无零点，但不满足 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，不满足必要性，即可判断.

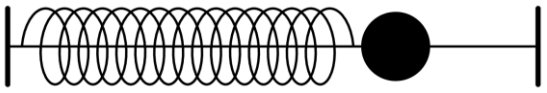
【详解】若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则对任意 $a>0$，显然 $x+a>x$，故 $f(x+a)>f(x)$，即 $y=f(x+a)-f(x)>0$ 无零点，满足充分性；

反之，若对任意 $a>0$，$f(x+a)<f(x)$，即 $f(x+a)-f(x)<0$，满足 $y=f(x+a)-f(x)$ 无零点，但 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，不满足必要性，

故“ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上　增函数”是“任意 $a>0$，$y=f(x+a)-f(x)$ 无零点”的充分而不必要条件.

故选：A.

9. 从物理学知识可知，图中弹簧振子中的小球相对平衡位置的位移 y 与时间 t（单位：s）的关系符合函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)(|\omega|<100)$.从某一时刻开始，用相机的连拍功能给弹簧振子连拍了 20 张照片.已知连拍的间隔为 0.01s，将照片按拍照的时间先后顺序编号，发现仅有第 5 张、第 13 张、第 17 张照片与第 1 张照片是完全一样的，请写出小球正好处于平衡位置的所有照片的编号为（　）



A. 9、15　　B. 6、18　　C. 4、11、18　　D. 6、12、18

【答案】D

【解析】

【分析】分析可知弹簧振子运动时的最小正周期为 $T=\frac{3}{25}\text{s}$，求出 ω 的值，然后结合已知条件求出 φ 的值，令 $y=0$ 可求得 t 的表达式，结合 $0<t\le\frac{1}{5}$ 可求得结果.

【详解】因为仅有第 5 张、第 13 张、第 17 张照片与第 1 张照片是完全一样的，

则弹簧振子运动时的最小正周期为 $T=12\times0.01=0.12=\frac{3}{25}\text{s}$，则 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{3}{25}}=\frac{50\pi}{3}$，

所以，$y=A\sin\left(\frac{50\pi t}{3}+\varphi\right)$，

由题意可得 $A\sin\left(\frac{50\pi}{3}\times\frac{1}{100}+\varphi\right)=A\sin\left(\frac{50\pi}{3}\times\frac{5}{100}+\varphi\right)$，

所以，$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)$，即 $\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi=\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$，

所以，$\sin\varphi=0$，则 $\varphi=m\pi(m\in\text{Z})$，则 $y=A\sin\left(\frac{50\pi t}{3}+m\pi\right)$，

令 $y=0$ 可得 $\frac{50\pi t}{3}+m\pi=n\pi\left(m,n\in \mathrm{Z}\right)$，所以，$t=\frac{3}{50}\left(n-m\right)$，

令 $k=n-m\in \mathrm{Z}$，则 $t=\frac{3}{50}k\left(k\in \mathrm{Z}\right)$，由 $0<\frac{3k}{50}\le \frac{1}{5}$ 可得 $0<k\le \frac{10}{3}$，

因为 $k\in \mathrm{Z}$，则 $k\in\left\{1,2,3\right\}$，

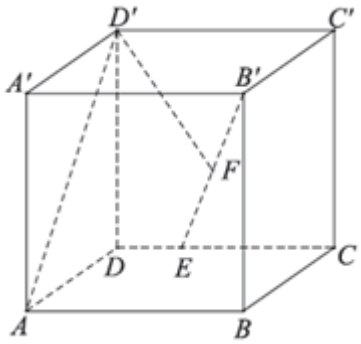
当 $k=1$ 时，$t=\frac{3}{50}=0.06\mathrm{s}$，对应第 6 张照片，

当 $k=2$ 时，$t=\frac{6}{50}=0.12\mathrm{s}$，对应第 12 张照片，

当 $k=3$ 时，$t=\frac{9}{50}=0.18\mathrm{s}$，对应第 18 张照片.

故选：D.

10. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E 为棱 DC 上的动点，F 为线段 $B'E$ 的中点.给出下列四个



① $B'E\perp AD'$；

②直线 $D'F$ 与平面 $ABB'A'$ 所成角不变；

③点 F 到直线 AB 的距离不变；

④点 F 到 A,D,D',A' 四点的距离相等.

其中，所有正确结论的序号为（　）

A. ②③　　B. ③④

C. ①③④　　D. ①②④

【答案】C

【解析】

【分析】根据 $B'E$ 的变化情况并找出 F 的轨迹就可判定①③④是否正确，作出直线 $D'F$ 与平面 $ABB'A'$ 所成的角，就可判定②是否正确.

【详解】如下图，当 E 在棱 DC 上运动时，$B'E$ 始终在平面 $A'B'CD$ 中，由 $AD'\perp A'D,AD'\perp CD$，

$A'D\cap CD=D$ 可得 $AD'\perp$ 平面 $A'B'CD$，所以 $B'E\perp AD'$，故①正确，

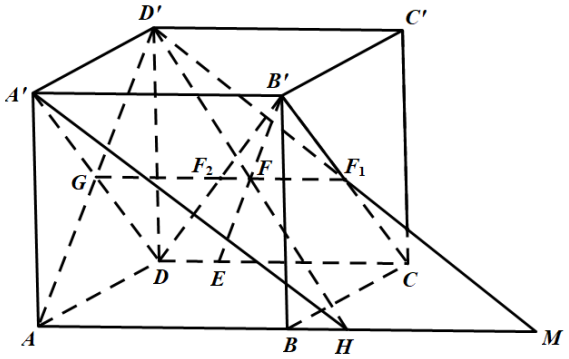
此时点 F 的轨迹为线段 F_1F_2，如下图可知，$F_1F_2//AB$，F_1F_2 过正方形 $ADD'A'$ 中心 G 且 $F_1F_2\perp$ 平面 $ADD'A'$，故③④正确，

如下图，延长 $D'F$ 与 AB 的延长线交于 H，连接 $A'H$，则 $\angle A'HD'$ 即为直线 $D'F$ 与平面 $ABB'A'$ 所成角，

当点 H 在 BM 上运动时， $A'D'$ 不变而 HD' 在变，所以 $\sin\angle A'HD'=\dfrac{A'D'}{HD'}$ 不是定值，

故②错误.

故选：C.



【点睛】(1)判定和动点相关的问题时，只要找出动点的轨迹，就可以根据轨迹的特点进行判断；

(2)判定与动直线相关的位置关系问题时，可找出动直线所在的平面进行判定；

(3)根据定义作出线面角可用来解决运动型的问题.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知 a,b 均为实数.若 $b+\mathrm{i}=\mathrm{i}(a+\mathrm{i})$，则 $a+b=$_____.

【答案】0

【解析】

【分析】直接由复数的乘法及复数相等求解即可.

【详解】$b+\mathrm{i}=\mathrm{i}(a+\mathrm{i})=a\mathrm{i}-1$，故 $a=1,b=-1$， $a+b=0$.

故答案为：0.

12. 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}>1$ 的解集为_____.

【答案】$(-\infty,0)$

【解析】

【分析】直接由指数函数的单调性解不等式即可.

【详解】由 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}>1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}$，可得 $x<0$，故解集为 $(-\infty,0)$.

故答案为：$(-\infty,0)$.

13. 已知圆 $C:x^2+y^2+2x=0$，则圆 C 的半径为_____；若直线 $y=kx$ 被圆 C 截得的弦长为 1，则 $k=$_____.

【答案】 ①. 1； ②. $\pm\sqrt{3}$

【解析】

【分析】第一空：将一般方程化为标准方程即可求解；第二空：先求圆心到直线的距离，再由圆的弦长公式即可解出 k 的值.

【详解】第一空：将 $x^2+y^2+2x=0$ 化为标准式得 $(x+1)^2+y^2=1$，故半径为 1；

第二空：圆心 $(-1,0)$ 到直线 $y=kx$ 的距离为 $\frac{|-k|}{\sqrt{k^2+1}}$，由弦长为 1 可得 $2\sqrt{1-\left(\frac{|-k|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}=1$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

故答案为：1；$\pm\sqrt{3}$.

14. 已知 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的图象向右平移 $a(a>0)$ 个单位后得到 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的最大值为_____；若 $f(x)+g(x)$ 的值域为 $\{0\}$，则 a 的最小值为_____.

【答案】 ①. $\sqrt{2}$； ②. π

【解析】

【分析】第一空：先由辅助角公式写出 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，再结合平移变换写出 $g(x)$，即可求得最大值；第二空：由值域为 $\{0\}$ 得 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\sin(x-a+\frac{\pi}{4})$ 恒成立，结合诱导公式可得 $x-a+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{4}+\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，结合 $a>0$ 求出 a 的最小值即可.

【详解】第一空：由 $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 可得 $g(x)=\sqrt{2}\sin(x-a+\frac{\pi}{4})$，易得 $g(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$；

第二空：若 $f(x)+g(x)$ 的值域为 $\{0\}$，则 $f(x)+g(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\sin(x-a+\frac{\pi}{4})=0$ 恒成立，

即 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\sin(x-a+\frac{\pi}{4})$，又 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\pi+2k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$，故

$x-a+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{4}+\pi+2k\pi$，

解得 $a=-\pi-2k\pi$，又 $a>0$，故当 $k=-1$ 时，a 的最小值为 π.

故答案为：$\sqrt{2}$；π.

15. 在现实世界，很多信息的传播演化是相互影响的.选用正实数数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别表示两组信息的传输链上每个节点处的信息强度，数列模型：$a_{n+1}=2a_n+b_n, b_{n+1}=a_n+2b_n (n=1,2\cdots)$，描述了这两组信息在互相影响之下的传播演化过程.若两组信息的初始信息强度满足 $a_1>b_1$，则在该模型中，关于两组信息，给出如下结论：

① $\forall n\in\mathbf{N}^*, a_n>b_n$；

② $\forall n\in\mathbf{N}^*, a_{n+1}>a_n, b_{n+1}>b_n$；

③ $\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n>k$ 时，总有 $\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|<10^{-10}$

④$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得当$n>k$时，总有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-2\right|<10^{-10}$.

其中，所有正确结论的序号是_____

【答案】①②③

【解析】

【分析】由$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$得$a_n-b_n=a_1-b_1>0$即可判断①正确；由$a_{n+1}-a_n=a_n+b_n, b_{n+1}-b_n=a_n+b_n$，$a_n+b_n>0$即可判断②正确；由$\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|=\frac{a_1-b_1}{b_n}$，当$n\to+\infty$时，$\frac{a_1-b_1}{b_n}\to 0$，即可判断③正确；由$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-2\right|=\left|1-\frac{a_1-b_1}{a_n}\right|$，当$n\to+\infty$时，$1-\frac{a_1-b_1}{a_n}\to 1$，即可判断④错误.

【详解】因为$a_{n+1}=2a_n+b_n, b_{n+1}=a_n+2b_n(n=1,2\cdots)$，两式作差得$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$，故$\{a_n-b_n\}$为常数列，

即$a_n-b_n=a_1-b_1>0$，故$a_n>b_n$，①正确；

因为$a_{n+1}-a_n=a_n+b_n, b_{n+1}-b_n=a_n+b_n$，又$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为正实数数列，故$a_n+b_n>0$，故$a_{n+1}>a_n, b_{n+1}>b_n$，②正确；

由上知，$\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|=\left|\frac{a_n-b_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_n-b_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_1-b_1}{b_n}\right|$，因为$a_1-b_1$为常数，$\{b_n\}$为单增数列，故当$n\to+\infty$时，$\frac{a_1-b_1}{b_n}\to 0$，

又$10^{-10}>0$，故$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得当$n>k$时，总有$\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|<10^{-10}$，③正确；

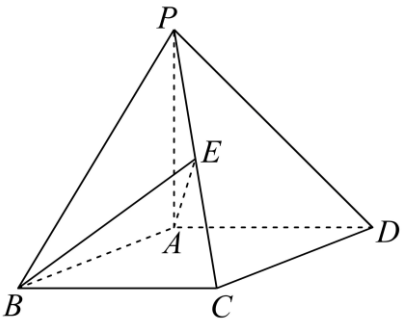
$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-2\right|=\left|\frac{a_{n+1}-2a_n}{a_n}\right|=\left|\frac{b_n}{a_n}\right|$，又$a_n-b_n=a_1-b_1$，故$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-2\right|=\left|\frac{b_n}{a_n}\right|=\left|\frac{a_n-(a_1-b_1)}{a_n}\right|=\left|1-\frac{a_1-b_1}{a_n}\right|$，因为$a_1-b_1$为常数，

$\{a_n\}$为单增数列，故当$n\to+\infty$时，$\frac{a_1-b_1}{a_n}\to 0$，$1-\frac{a_1-b_1}{a_n}\to 1$，故④错误.

故答案为：①②③.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 如图，已知四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=2$，点E是PC的中点.



（1）求证：DC// 面 ABE；

（2）求 DC 到平面 ABE 的距离.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{2\sqrt{21}}{7}$

【解析】

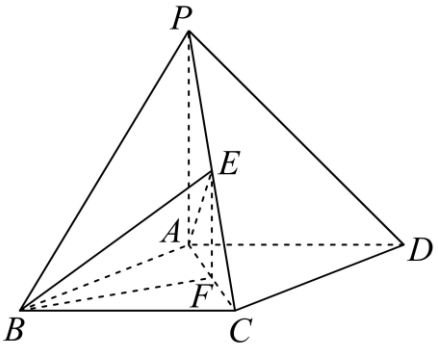
【分析】（1）直接由 $CD\parallel AB$ 证得 DC// 面 ABE 即可；

（2）将 DC 到平面 ABE 的距离转化为点 C 到平面 ABE 的距离，求出 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle ABE}$，由等体积法即可求得 DC 到平面 ABE 的距离.

【小问 1 详解】

由底面 $ABCD$ 是菱形，可得 $CD\parallel AB$，又 $AB\subset$ 面 ABE，$DC\not\subset$ 面 ABE，故 DC// 面 ABE；

【小问 2 详解】



由（1）知 DC// 面 ABE，故 DC 到平面 ABE 的距离即点 C 到平面 ABE 的距离，设为 d，连接 AE,AC，取 AC 中点 F，连接 BF,EF，

易得 $EF\parallel PA$ 且 $EF=\frac{1}{2}PA=1$，则 $EF\perp$ 底面 $ABCD$，又 $\angle ABC=60°$，则 $AC=2,BD=2\sqrt{3}$，故

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

又 $BF=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3},AF=\frac{1}{2}AC=1$，故 $BE=\sqrt{BF^2+EF^2}=2,AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{2}$，

又$\cos\angle BEA=\dfrac{BE^2+AE^2-AB^2}{2BE\cdot AE}=\dfrac{4+2-4}{2\times2\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故$\sin\angle BEA=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

$S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

又因为$V_{E-ABC}=V_{C-ABE}$，即$\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times EF=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABE}\times d$，解得$d=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，即$DC$到平面$ABE$的距离为$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

17. 在$\triangle ABC$中，$7a=6b\cos B$.

（1）若$\sin A=\dfrac{3}{7}$，求$\angle B$；

（2）若$c=8$，从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在.求$\triangle ABC$的面积

条件①：$\sin A=\dfrac{4}{7}$；　条件②：$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{4}$；

（2）$6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）直接由正弦定理边化角，结合倍角公式即可求解；

（2）若选①：由正弦定理及倍角公式得$\sin 2B=\dfrac{4}{3}$，$\triangle ABC$不存在；若选②：先判断$\cos B>0$，再由$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$求出$\cos B$，由$7a=3b$及余弦定理求得$a$，再计算面积即可.

【小问1详解】

由正弦定理得：$7\sin A=6\sin B\cos B=3\sin 2B$，又$\sin A=\dfrac{3}{7}$，故$\sin 2B=1$，又$B\in(0,\pi)$，故$2B=\dfrac{\pi}{2}$，

$B=\dfrac{\pi}{4}$；

【小问2详解】

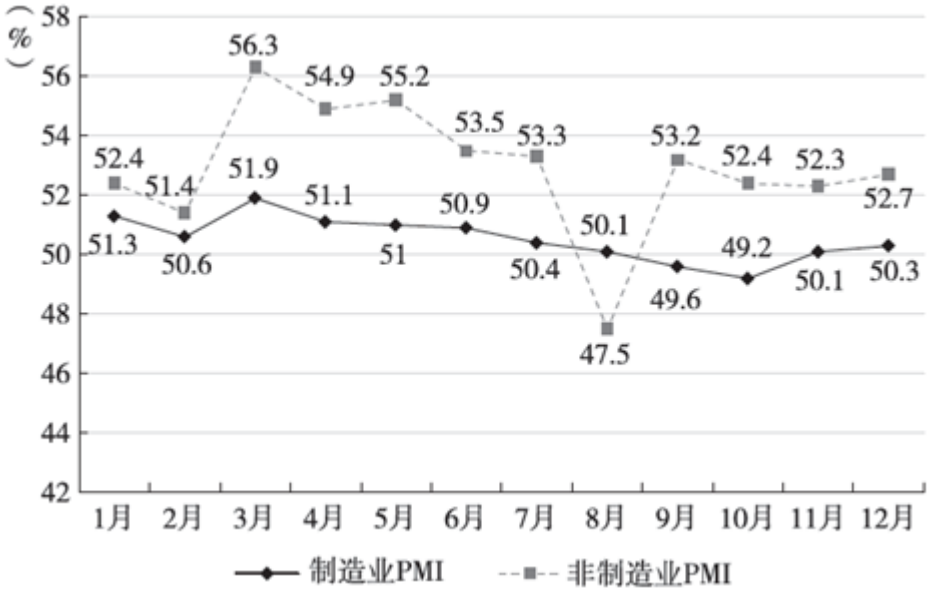
若选①：由正弦定理得：$7\sin A=6\sin B\cos B=3\sin 2B$，又$\sin A=\dfrac{4}{7}$，故$\sin 2B=\dfrac{4}{3}$，此时$\triangle ABC$不存在；

若选②：由$\cos B=\dfrac{7a}{6b}>0$，又$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\cos B=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{2}$，$7a=3b$，由余弦定理得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即$\left(\dfrac{7a}{3}\right)^2=a^2+64-8a$，解得$a=3$或$a=-\dfrac{24}{5}$（舍去），故$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{3}$.

18. PMI值是国际上通行的宏观经济监测指标之一，能够反映经济的变化趋势.下图是国家统计局发布的某年12个月的制造业和非制造业PMI值趋势图.将每连续3个月的PMI值做为一个观测组，对国家经济活动进行监测和预测



（1）现从制造业的 10 个观测组中任取一组，

（i）求组内三个 PMI 值至少有一个低于 50．0 的概率；

（ii）若当月的 PMI 值大于上一个月的 PMI 值，则称该月的经济向好.设 X 表示抽取的观测组中经济向好的月份的个数（由已有数据知 1 月份的 PMI 值低于去年 12 月份的 PMI 值），求 X 的分布列与数学期望；

（2）用 $b_j(j=1,2,\cdots,12)$ 表示第 j 月非制造业所对应的 PMI 值，$\overline{b}$ 表示非制造业 12 个月 PMI 值的平均数，请直接写出 $\left|b_j-\overline{b}\right|$ 取得最大值所对应的月份.

【答案】（1）（i）$\frac{2}{5}$；（ii）分布列见解析，$E\left(X\right)=\frac{1}{2}$；

（2）8 月份.

【解析】

【分析】（1）（i）根据已知条件写出基本事件的个数，再利用古典概型的计算公式即可求解；

（ii）根据已知条件写出随机变量 X 的取值求出对应的概率，进而得出分布列，根据分布列及数学期望的公式即可求解；

（2）根据已知条件求出 $\overline{b}$，结合某年 12 个月的非制造业 PMI 值趋势图即可求解.

【小问 1 详解】

（i）从制造业的 10 个观测组中任取一组的基本事件有

$(51.3,50.6,51.9),(50.6,51.9,51.1),(51.9,51.1,51),(51.1,51,50.9),(51,50.9,50.4),$

$(50.9,50.4,50.1),(50.4,50.1,49.6),(50.1,49.6,49.2),(49.6,49.2,50.1),(49.2,50.1,50.3)$，共有 10 个，

设“组内三个 PMI 值至少有一个低于 50．0”为事件 A，则事件 A 包含的结果有

$(50.4,50.1,49.6),(50.1,49.6,49.2),(49.6,49.2,50.1),(49.2,50.1,50.3)$共 4 个，

由古典概型的计算公式，得 $P\left(A\right)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

（ii）X 的可能取值为 $0,1,2$，

$P(x=0)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$P(x=1)=\frac{3}{10}$，$P(x=2)=\frac{1}{10}$.

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

所以随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{3}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$.

小问 2 详解】

8 月份，理由如下

由某年 12 个月的非制造业 PMI 值趋势图中的数据，得

$\overline{b}=\frac{52.4+51.4+56.3+54.9+55.2+53.5+53.3+47.5+53.2+52.4+52.3+52.7}{12}\approx 52.9$ 根据某年 12 个月的非制造业 PMI 值趋势图，可知

当 $j=8$ 时，$\left|b_j-\overline{b}\right|$ 取得最大值为 $\left|b_8-\overline{b}\right|=|47.5-52.9|=5.4$.

19. 椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A(-2,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）已知经过点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的直线 l 交椭圆 M 于 B,C 两点，D 是直线 $x=-4$ 上一点.若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，求直线 l 的方程.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

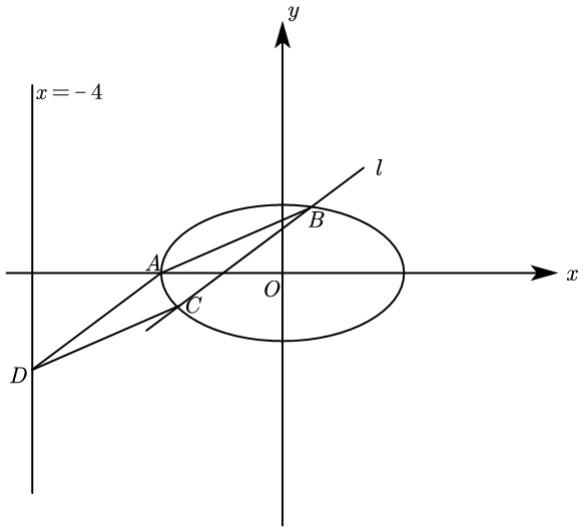
【分析】（1）直接由顶点和离心率求出椭圆方程即可；

（2）设 $D(-4,t)$，由 $k_{AD}=k_{BC}$ 表示出直线 l 的斜率，进而写出直线 l 的方程，联立椭圆求出弦长 $|BC|$，由 $|BC|=|AD|$ 求出 t，即可求得直线 l 的方程.

【小问 1 详解】

由题意知：$a=2,\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $b^2=a^2-c^2=1$，故椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】



设$D(-4,t),B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，又$A(-2,0)$，故$k_{AD}=-\frac{t}{2}=k_{BC}$，又直线$l$经过点$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故$l$的方程为

$y=-\frac{t}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

联立椭圆方程$\begin{cases}y=-\frac{t}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$可得$\left(1+t^2\right)x^2-2\sqrt{3}tx-1=0$，显然$\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2},x_1x_2=-\frac{1}{1+t^2}$，

则$\left|BC\right|=\sqrt{1+\left(-\frac{t}{2}\right)^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2}\right)^2+\frac{4}{1+t^2}}=\frac{\sqrt{\left(4+t^2\right)+\left(4t^2+1\right)}}{1+t^2}$，

又$\left|AD\right|=\sqrt{4+t^2}$，由$\left|BC\right|=\left|AD\right|$，可得$\frac{\sqrt{\left(4+t^2\right)\left(4t^2+1\right)}}{1+t^2}=\sqrt{4+t^2}$，解得$t=\pm\sqrt{2}$，故直线$l$的方程为

$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 已知函数$f(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{a}{x}$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程；

（2）当$a=-\frac{1}{2}$时，求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（3）当$x<0$时，$f\left(x\right)\geqslant\frac{1}{2}$恒成立，求$a$的取值范围.

【答案】（1）$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$；

（2）$f\left(x\right)$的单增区间为$\left(-1,0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单减区间为$\left(-\infty,-1\right),\left(\frac{1}{2},1\right)$；

（3）$a\le -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）直接计算 $f(-1)$，求导计算 $f'(-1)$，写出切线方程即可；

（2）直接求导确定导数的正负，写出单调区间即可；

（3）先根据必要性得到 $f(-1)=-a\ge \frac{1}{2}$，再证明当 $a\le -\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{a}{x}\ge \ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{2x}$，结合（2）中单调性证得 $f(x)\ge\frac{1}{2}$，即满足充分性，即可求解.

【小问 1 详解】

$f'(x)=\frac{2}{1-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{a}{x^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2}$，当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x-1}$，$f'(-1)=-\frac{1}{2}$，$f(x)=\ln\frac{1-x}{2}$，

$f(-1)=0$，

故曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)$，即 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

易得定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)$，当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x^2}=\frac{-\left(2x-1\right)\left(x+1\right)}{2x^2\left(1-x\right)}$，令 $f'(x)=0$，$x=\frac{1}{2}$ 或 -1，

当 $x<-1$ 或 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减；当 $-1<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增；

故 $f\left(x\right)$ 的单增区间为 $\left(-1,0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单减区间为 $\left(-\infty,-1\right),\left(\frac{1}{2},1\right)$；

【小问 3 详解】

“$f(-1)=-a\ge\frac{1}{2}$，即 $a\le-\frac{1}{2}$”是“当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立”的必要条件.

当 $a\le-\frac{1}{2}$，$x<0$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{a}{x}\ge\ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{2x}$，令 $g(x)=\ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{2x}$，

由（2）知，$g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$ 单调递减，在 $\left(-1,0\right)$ 单调递增，故 $g\left(x\right)\ge g\left(-1\right)=\frac{1}{2}$，

即 $f(x)\ge g(x)\ge\frac{1}{2}$，所以 a 的取值范围是 $a\le-\frac{1}{2}$.

21. 已知有限数列 $\left\{a_n\right\}$ 共 M 项 $(M\ge4)$，其任意连续三项均为某等腰三角形的三边长，且这些等腰三角形两两均不全等.将数列 $\left\{a_n\right\}$ 的各项和记为 S.

（1）若 $a_n\in\{1,2\}(n=1,2,\cdots,M)$，直接写出 M,S 的值；

（2）若 $a_n\in\left\{1,2,3\right\}(n=1,2,\cdots,M)$，求 M 的最大值；

（3）若 $a_n \in \mathbf{N}^*(n=1,2,\cdots,M), M=16$，求 S 的最小值

【答案】（1）$M=4, S=7$；

（2）8；　（3）50

【解析】

【分析】（1）直接列举出数列 $\{a_n\}$，即可求得 M, S；

（2）先构造数列使 $M=8$，再说明不同的等腰三角形只有 6 个，故 $M \le 6+2=8$，即可求得 M 的最大值；

（3）先构造数列使 $S=50$，再设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，得 $3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$，列举出不同的等腰三角形，使 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，进而得到 $S \ge 50$，即可求解.

【小问 1 详解】

边长为 1 或 2 的等腰三角形只有 1，1，1；1，2，2；2，2，2；若前三项为 1，1，1，则该数列只有 3 项，不合题意；

若前三项为 1，2，2，该数列只有 4 项，该数列只能为 1，2，2，2；若前三项为 2，2，2，该数列只有 4 项，该数列只能为 2，2，2，1；

综上：$M=4, S=7$；

【小问 2 详解】

①构造数列：1，2，2，2，3，3，3，1，此时 $M=8$.

②当存在连续三项为 1，1，1 时，本题中有两条边为 1，1 的等腰三角形仅有 1，1，1，即数列只有 3 项，与 $M \ge 4$ 矛盾，舍去.

③当不存在连续三项为 1，1，1 时，连续三项（不考虑这三项的顺序）共以下 6 种可能：

1，2，2；1，3，3；2，2，2；2，2，3；2，3，3；3，3，3.

又相邻的 4 项组成的 2 个等腰三角形中间 2 项是共用的，则总的项数为不同的等腰三角形的个数加上首尾 2 项，所以 $M \le 6+2=8$.

④由①②③，M　最大值为 8.

【小问 3 详解】

①构造数列：1，2，2，2，3，3，3，4，4，4，5，5，5，3，3，1，此时 $S=50$.

②设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，则

$$T=(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_{13}+a_{14}+a_{15})+(a_{14}+a_{15}+a_{16})$$

$$=3(a_1+a_2+\cdots+a_{15}+a_{16})-2a_1-a_2-a_{15}-2a_{16}$$，即 $3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$.

③连续三项（不考虑这三项的顺序）及这三项的和（标注在下面的括号内）有以下可能：

$\underline{2,2,1(5)};2,2,2(6);2,2,3(7);$

$\underline{3,3,1(7)};3,3,2(8);3,3,3(9);\cdots;3,3,5(11);$

$\underline{4,4,1(9)};\underline{4,4,2(10)};4,4,3(11);\cdots;4,4,7(15);$

$\underline{5,5,1(11)};\underline{5,5,2(12)};5,5,3(13);\cdots;5,5,9(19);$

$\underline{6,6,1(13)};\underline{6,6,2(14)};\underline{6,6,3(15)};\cdots;6,6,11(23);$

其中画横线的连续三项不能同时满足和前一项、后一项构成 3 个等腰三角形，故必为数列的首三项或尾三项，故其对应的三角形在 14 个三角形中至多出现两个.

④由③，要使 S 最小，则使 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，在画横线的连续三项中取和最小的 2 组，

在没画横线的连续三项中取合最小的 12 组，同时令 $a_1=1,a_{16}=1,a_2=2,a_{15}=3$，

则 $T\geq(5+7)+(6+7+8+9+10+11+11+12+13+13+14+14)=140$，

$2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}\geq 2\times 1+2\times 1+2+3=9$，又由②，$3S\geq 140+9=149$，

所以 $S\geq 50$.

⑤由①④，S 的最小值为 50.

【点睛】本题关键点在于设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，得 $3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$，将 S 最小，转化为 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，列举出不同的等腰三角形，使 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，进而得到 $S\geq 50$，再构造数列使 $S=50$ 即可求解.