2022 北京昌平高三二模

数　　学

本试卷共 6 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡收回.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}, B=\{x\mid x\geq 1\}$，则 $A\cup B=$（　）

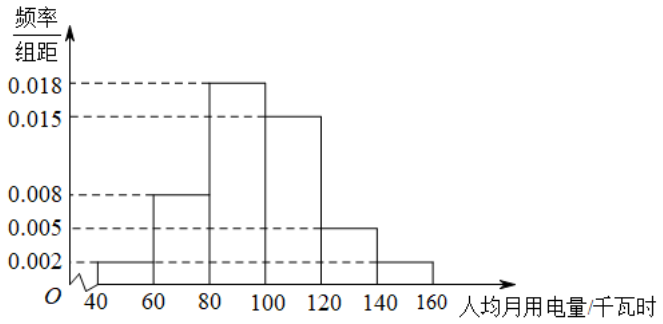
A. $\{x\mid x>0\}$　　B. $\{x\mid 1\leq x<2\}$

C $\{x\mid x\geq 1\}$　　D. $\{x\mid 0<x<2\}$

2. 设复数 z 满足 $(1-i)z=2i$，则 z=（ ）

A. -1+i　　B. -1-i　　C. 1+i　　D. 1-i

3. 为倡导“节能减排，低碳生活”的理念，某社区对家庭的人均月用电量情况进行了调查，通过抽样，获得了某社区 100 个家庭的人均月用电量（单位：千瓦时），将数据按照 $[40,60),[60,80),[80,100),[100,120),[120,140),[140,160]$ 分成 6 组，制成了如图所示的频率分布直方图. 若该社区有 3000 个家庭，估计全社区人均月用电量低于 80 千瓦时的家庭数为（　）



A. 300　　B. 450　　C. 480　　D. 600

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=a_5, a_2-a_1=2$，则 $a_4=$（　）

A. 4　　B. 7　　C. 8　　D. 9

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 4，其右焦点到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则双曲线 C 的渐近线方程为（　）

A. $y=\pm 2x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$

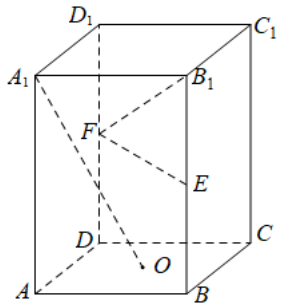
C. $y=\pm\sqrt{2}x$　　D. $y=\pm x$

6. “$\theta=\frac{\pi}{2}$”是“函数 $f(x)=\sin(x+\theta)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，E,F 分别是 BB_1,DD_1 的中点，则下列结论正确的是（　）



A. A_1O // EF

B. $A_1O\perp EF$

C. A_1O //平面 EFB_1

D. $A_1O\perp$ 平面 EFB_1

8. 已知直线 $l:ax-y+1=0$ 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 相交于两点 A,B，当 a 变化时，△ ABC 的面积的最大值为（　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x)=ax^2-4ax+2(a<0)$，则关于 x 的不等式 $f(x)>\log_2 x$ 的解集是（　）

A. $(-\infty,4)$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,4)$　　D. $(4,+\infty)$

10. 在△ ABC 中，$\angle B=45^\circ,c=4,$ 只需添加一个条件，即可使△ ABC 存在且唯一.条件：① $a=3\sqrt{2}$；② $b=2\sqrt{5}$；③ $\cos C=-\frac{4}{5}$ 中，所有可以选择的条件的序号为（　）

A. ①　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②③

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程为_____.

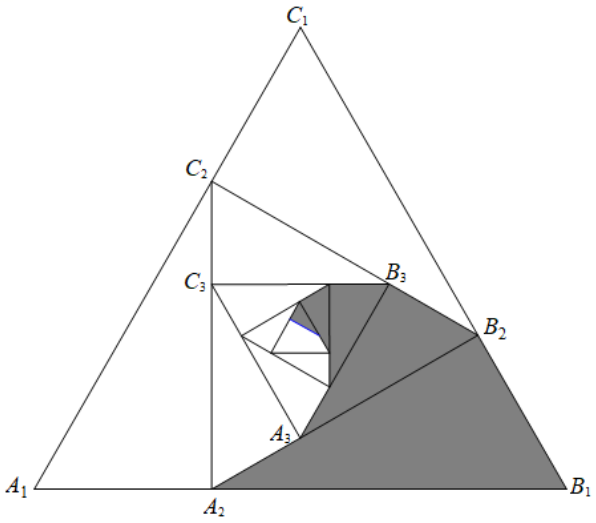
12. $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中常数项为_____（用数字作答）.

13. 已知 D 是△ ABC 的边 AB 的中点，$|\overrightarrow{AB}|=3,|\overrightarrow{AC}|=2,$，$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____；$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=$_____

14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-b,x<0,\\ \sqrt{x},x\geq 0\end{cases}$ 有且仅有两个零点，则实数 b 的一个取值为_____.

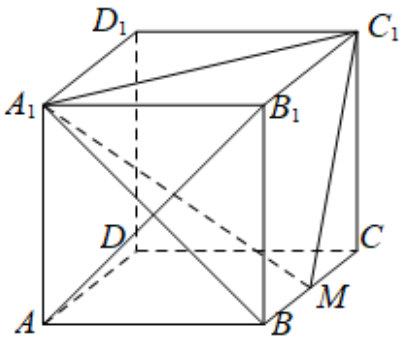
15. 刺绣是中国优秀　民族传统工艺之一，已经有 2000 多年的历史.小王同学在刺绣选修课上，设计了一个螺旋形图案--即图中的阴影部分.它的设计方法是：先画一个边长为 3 的正三角形 $A_1B_1C_1$，取正三角形 $A_1B_1C_1$ 各边的三等分点 A_2,B_2,C_2，得到第一个阴影三角形 $A_2B_1B_2$；在正三角形 $A_2B_2C_2$ 中，再取各边的三等分点 A_3,B_3,C_3，得到第二

个阴影三角形 $A_3B_2B_3$；继续依此方法，直到得到图中的螺旋形图案，则 $A_3B_2=$_____;图中螺旋形图案的面积为_____.



三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是 BC 的中点.



（1）求证：AB_1 ⊥平面 A_1BM ；

（2）求二面角 $B-A_1M-C_1$ 的大小；

（3）求点 A 到平面 A_1MC_1 的距离.

17. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(A>0,\omega>0,|\phi|<\dfrac{\pi}{2})$，且 $f(x)$ 的最小正周期为 π，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）设 $g(x)=f(x)+2\sqrt{2}\cos 2x$，若 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值为 2，求 m 的最小值.

条件①：$f(x)$ 的最小值为 -2；

条件②：$f(x)$ 图象经过点 $(\dfrac{\pi}{2},\sqrt{2})$；

条件③：直线 $x=\dfrac{3\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴.

注：如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 某产业园生产的一种产品的成本为 50 元/件.销售单价依产品的等级来确定，其中优等品、一等品、二等品、普通品的销售单价分别为 80 元、75 元、65 元、60 元.为了解各等级产品的比例，检测员从流水线上随机抽取 200 件产品进行等级检测，检测结果如下表所示.

产品等级	优等品	一等品	二等品	普通品
样本数量（件）	30	50	60	60

（1）若从流水线上随机抽取一件产品，估计该产品为优等品的概率；

（2）从该流水线上随机抽取 3 件产品，记其中单件产品利润大于 20 元的件数为 X ，用频率估计概率，求随机变量 X 的分布列和数学期望;

（3）为拓宽市场，产业园决定对抽取的 200 件样本产品进行让利销售，每件产品的销售价格均降低了 5 元.设降价前后这 200 件样本产品的利润的方差分别为 s_1^2, s_2^2 ，比较 s_1^2, s_2^2 的大小.（请直接写出结论）

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，上下顶点分别为 A, B ，且 $|AB|=4$.过点 $(0,1)$ 的直线与椭圆 C 相交于不同的两点 M ， N （不与点 A, B 重合）.

（1）求椭圆 C 方程；

（2）若直线 AM 与直线 $y=4$ 相交于点 P ，求证： B, P, N 三点共线

20. 已知函数 $f(x)=a\ln x-bx+b$ ， $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-a(x>0)$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，求实数 a, b 的值；

（2）若函数 $g(x)$ 无零点，求实数 a 的取值范围；

（3）当 $a=b$ 时，函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ ，给出两个性质：

①对于任意的 $i\in N^*$ ，存在 $k_i\in R$ ，当 $j>i, j\in \mathbf{N}^*$ 时，都有 $a_j-a_i\geq k_i(j-i)$ 成立；

②对于任意的 $i\in \mathbf{N}^*, i\geq 2$ ，存在 $k_i\in R$ ，当 $j<i, j\in \mathbf{N}^*$ 时，都有 $a_j-a_i\geq k_i(j-i)$ 成立.

（1）已知数列 $\{a_n\}$ 满足性质①，且 $k_i=2\left(i\in N^*\right)$ ， $a_1=1, a_4=7$ ，试写出 a_2, a_3 的值；

（2）已知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3\times 2^{n-1}$ ，证明：数列 $\{b_n\}$ 满足性质①；

（3）若数列 $\{c_n\}$ 满足性质①②，且当 $i\in N^*, i\geq 2$ 时，同时满足性质①②的 k_i 存在且唯一.证明：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,0<x<2\},B=\{x\,|\,x\geq 1\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $\{x\,|\,x>0\}$　　B. $\{x\,|\,1\leq x<2\}$

C. $\{x\,|\,x\geq 1\}$　　D. $\{x\,|\,0<x<2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据并集的定义运算即得.

【详解】$\because A=\{x\,|\,0<x<2\},B=\{x\,|\,x\geq 1\}$，

$\therefore A\cup B=\{x|x>0\}$.

故选：A.

2. 设复数 z 满足 $(1-i)z=2i$，则 z=（ ）

A. -1+i　　B. -1-i　　C. 1+i　　D. 1-i

【答案】A

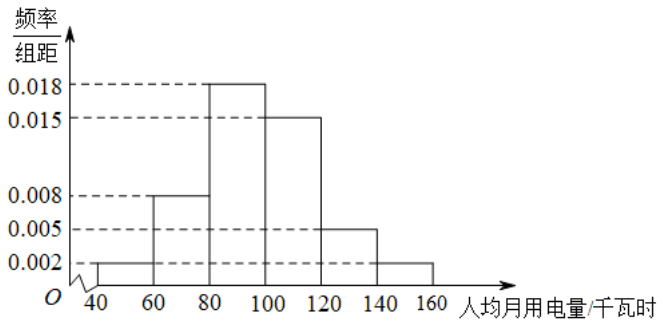
【解析】

【分析】$(1-i)z=2i$

【详解】由 $(1-i)z=2i$ 得 $z=\dfrac{2i}{1-i}=i(1+i)=-1+i$，故选 A.

【考点定位】本小题主要考查复数的四则运算,复数在高考中主要以小题形式出现，属容易题，主要考查复数的概念、几何意义与四则运算是基础内容.

3. 为倡导“节能减排，低碳生活”的理念，某社区对家庭的人均月用电量情况进行了调查，通过抽样，获得了某社区 100 个家庭的人均月用电量（单位：千瓦时），将数据按照 $[40,60),[60,80),[80,100),[100,120),[120,140),[140,160]$ 分成 6 组，制成了如图所示的频率分布直方图. 若该社区有 3000 个家庭，估计全社区人均月用电量低于 80 千瓦时的家庭数为（　）



A. 300　　B. 450　　C. 480　　D. 600

【答案】D

【解析】

【分析】根据频率分布直方图可知样本频率，由样本频率来估计总体的概率，概率乘以总量即为所求.

【详解】由频率分布直方图可知:数据落在$[40,60),[60,80)$的频率为$0.002\times 20+0.008\times 20=0.2$，故该社区有3000个家庭，估计全社区人均月用电量低于80千瓦时的家庭数为$3000\times 0.2=600$

故选:D

4. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_3=a_5, a_2-a_1=2$，则$a_4=$（　）

A. 4　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】利用等差数列的通项公式和前n项和公式的基本运算求解.

【详解】解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$S_3=a_5, a_2-a_1=2$，

所以$3a_1+3d=a_1+4d, a_2-a_1=d=2$，

解得$d=2, a_1=1$，

所以$a_4=a_1+3d=7$，

故选：B

5. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$4$，其右焦点到双曲线$C$的一条渐近线的距离为$\sqrt{2}$，则双曲线$C$的渐近线方程为（　）

A. $y=\pm 2x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$

C. $y=\pm\sqrt{2}x$　　D. $y=\pm x$

【答案】D

【解析】

【分析】由焦距可得$c=2$，写出右焦点坐标，结合点线距离公式列方程求a、b关系，即可得渐近线方程.

【详解】由题设$2c=4$则$c=2$，可知：右焦点为$(2,0)$，

又双曲线C的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$，由题意$\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$，整理得$a=b$，

所以双曲线C的渐近线方程为$y=\pm x$.

故选：D

6. “$\theta=\frac{\pi}{2}$”是“函数$f(x)=\sin(x+\theta)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用充分条件，必要条件的定义及三角函数的性质即得.

【详解】当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$满足在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，即由“$\theta=\frac{\pi}{2}$”可推出“函数$f(x)=\sin(x+\theta)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减”，

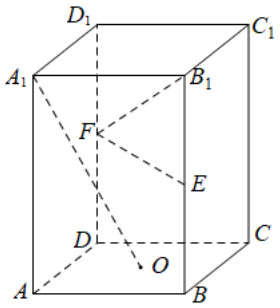
反之由“函数$f(x)=\sin(x+\theta)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减”推不出“$\theta=\frac{\pi}{2}$”，如$\theta=\pi$时，

$f(x)=\sin(x+\pi)=-\sin x$也满足在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，

$\therefore$“$\theta=\frac{\pi}{2}$”是“函数$f(x)=\sin(x+\theta)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减”的充分而不必要条件.

故选：A.

7. 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，O是底面$ABCD$的中心，E,F分别是BB_1,DD_1的中点，则下列结论正确的是（　）



A. $A_1O//EF$

B. $A_1O\perp EF$

C. A_1O//平面EFB_1

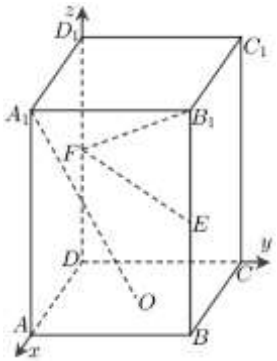
D. $A_1O\perp$平面EFB_1

【答案】B

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间位置关系　向量证明，逐项分析、判断作答.

【详解】在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以点D为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



令$AB=2a,DD_1=2b(a>0,b>0)$，O是底面$ABCD$的中心，E,F分别是BB_1,DD_1的中点，

则 $O(a,a,0),A_1(2a,0,2b),E(2a,2a,b),B_1(2a,2a,2b),F(0,0,b)$，$\overrightarrow{OA_1}=(a,-a,2b)$，

$\overrightarrow{FE}=(2a,2a,0),\overrightarrow{EB_1}=(0,0,b)$，

对于 A，显然 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{FE}$ 不共线，即 A_1O 与 EF 不平行，A 不正确；

对于 B，因 $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{FE}=a\cdot 2a+(-a)\cdot 2a+0\cdot 2b=0$，则 $\overrightarrow{OA_1}\perp\overrightarrow{FE}$，即 $A_1O\perp EF$，B 正确；

对于 C，设平面 EFB_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=2ax+2ay=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=bz=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-1,0)$，

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{n}=2a>0$，因此 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直，即 A_1O 不平行于平面 EFB_1，C 不正确；

对于 D，由选项 C 知，$\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\vec{n}$ 不共线，即 A_1O 不垂直于平面 EFB_1，D 不正确.

故选：B

8. 已知直线 $l:ax-y+1=0$ 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 相交于两点 A,B，当 a 变化时，△ ABC 的面积的最大值为（　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

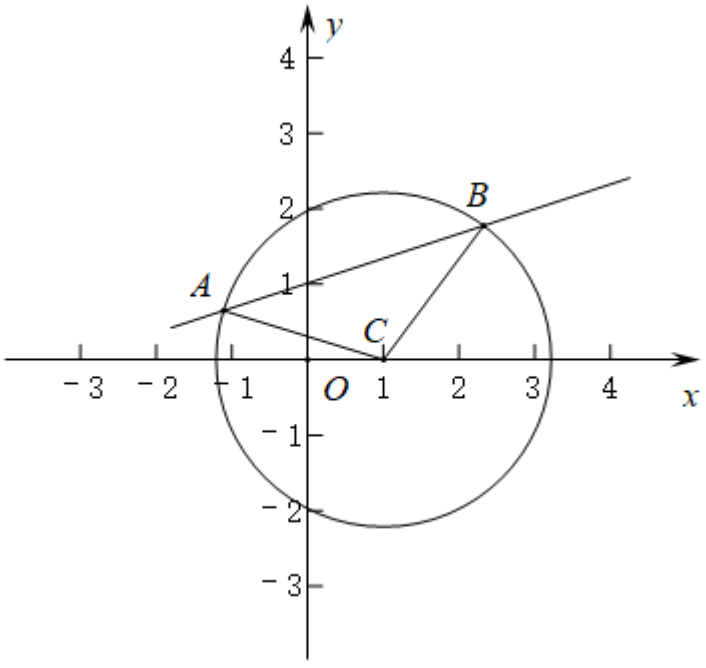
【解析】

【分析】将△ ABC 的面积表示出来即可求出最大值.

【详解】因为直线直线 $l:ax-y+1=0$ 恒过点 $(0,1)$ 在圆内，所以直线与圆相交，

圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 的圆心 $C(1,0),r=2$，所以△ ABC 的面积的最大值为：

$$S=\frac{1}{2}|CA||CB|\sin\angle ACB=\frac{1}{2}r^2\sin\angle ACB\le\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}\times 4=2.$$



故选：C.

9. 已知函数 $f(x)=ax^2-4ax+2(a<0)$，则关于 x 的不等式 $f(x)>\log_2 x$ 的解集是（　）

A. $(-\infty,4)$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,4)$　　D. $(4,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】由二次函数的性质判断 $f(x)$ 区间单调性，根据解析式知 $f(x)$ 恒过 $(4,2)$ 且 $f(0)=2$，进而确定区间值域，再由对数函数性质求 $y=\log_2 x$ 的对应区间值域，即可得不等式解集.

【详解】由题设，$f(x)$ 对称轴为 $x=2$ 且图象开口向下，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，$(2,+\infty)$ 上递减，

由 $f(x)=ax^2-4ax+2=ax(x-4)+2$，即 $f(x)$ 恒过 $(4,2)$ 且 $f(0)=2$，

所以 $(0,4)$ 上 $f(x)>2$，$(4,+\infty)$ 上 $f(x)<2$，

而 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $(0,4)$ 上 $y<2$，$(4,+\infty)$ 上 $y>2$，

所以 $f(x)>\log_2 x$ 的解集为 $(0,4)$.

故选：C

10. 在△ ABC 中，$\angle B=45^{\circ},c=4$, 只需添加一个条件，即可使△ ABC 存在且唯一.条件：①$a=3\sqrt{2}$；②$b=2\sqrt{5}$；③$\cos C=-\frac{4}{5}$ 中，所有可以选择的条件的序号为（　）

A. ①　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②③

【答案】B

【解析】

【分析】根据正弦和余弦定理，以及三角形边与角的性质，直接计算即可判断求解.

【详解】对于①，$c=4,\angle B=45°,a=3\sqrt{2}$，所以，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=10$，得 $b=\sqrt{10}$，所以，此时，△ ABC 存在且唯一，符合题意；

对于②，$c=4,\angle B=45°,b=2\sqrt{5}$，所以，$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，解得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，因为 $c<b$，所以，$\angle C<\angle B$，所以 $\angle C$ 为锐角，此时，△ ABC 存在且唯一，符合题意；

对于③，$c=4,\angle B=45°,\cos C=-\frac{4}{5}$，所以，$\frac{\pi}{2}<C<\pi$，得 $\sin C=\frac{3}{5}$，进而 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，

可得 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$，明显可见，$c=\frac{12}{3}<\frac{10\sqrt{2}}{3}=b$，与 $\angle C>\angle B$ 矛盾，故③不符题意.

故可以选择的条件序号为：①②

故选：B

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程为_____.

【答案】$x=-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】抛物线$y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，由此得到题目所求准线方程.

【详解】抛物线$y^2=2x$的准线方程是$x=-\frac{1}{2}$.

【点睛】本小题主要考查抛物线的准线方程，抛物线$y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，直接利用公式可得到结果.

属于基础题.

12. $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式中常数项为_____（用数字作答）.

【答案】60

【解析】

【分析】写出二项展开式的通项，令x的指数为零，求出参数的值，代入通项即可得解.

【详解】$\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r2^{6-r}C_6^rx^{6-\frac{3r}{2}}$，

令$6-\frac{3r}{2}=0$得$r=4$，

故展开式中的常数项$C_6^4\cdot2^2\cdot(-1)^4=60$.

故答案为：60.

13. 已知D是△ABC的边AB的中点，$|\overrightarrow{AB}|=3,|\overrightarrow{AC}|=2,$，$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____；$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=$_____

【答案】 ①. 3 ②. $-\frac{3}{4}$##-0.75

【解析】

【分析】利用数量积的定义可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，利用向量的线性表示及数量积的运算即得.

【详解】$\because|\overrightarrow{AB}|=3,|\overrightarrow{AC}|=2,$，$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB=3\times2\times\frac{1}{2}=3$，

又D是△ABC的边AB的中点，

$\therefore\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{2}\times3-\frac{1}{4}\times3^2=-\frac{3}{4}$.

故答案为：3；$-\frac{3}{4}$.

14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-b, x<0,\\ \sqrt{x}, x\geq 0\end{cases}$ 有且仅有两个零点，则实数 b 的一个取值为_____.

【答案】$\frac{1}{2}$（答案不唯一）

【解析】

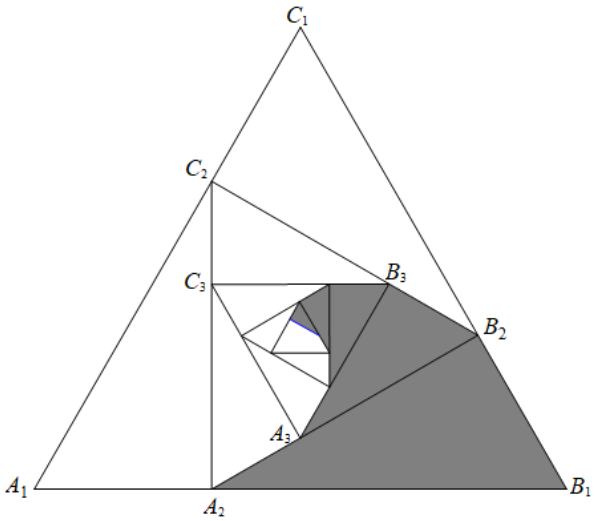
【分析】由零点的概念求解

【详解】令 $f(x)=0$，当 $x\geq 0$ 时，由 $\sqrt{x}=0$ 得 $x=0$，即 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的一个零点，

故当 $x<0$ 时，$2^x-b=0$ 有一解，得 $b\in(0,1)$

故答案为：$\frac{1}{2}$（答案不唯一）

15. 刺绣是中国优秀的民族传统工艺之一，已经有 2000 多年的历史.小王同学在刺绣选修课上，设计了一个螺旋形图案--即图中的阴影部分.它的设计方法是：先画一个边长为 3 的正三角形 $A_1B_1C_1$，取正三角形 $A_1B_1C_1$ 各边的三等分点 $A_{2,},B_2,C_2$，得到第一个阴影三角形 $A_2B_1B_2$；在正三角形 $A_2B_2C_2$ 中，再取各边的三等分点 A_3,B_3,C_3，得到第二个阴影三角形 $A_3B_2B_3$；继续依此方法，直到得到图中的螺旋形图案，则 $A_3B_2=$_____;图中螺旋形图案的面积为_____.



【答案】 ①. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ②. $\frac{121\sqrt{3}}{162}$

【解析】

【分析】根据余弦定理得到等边三角形边长成等比数列，即可得 A_3B_2 的长度，再根据三角形的面积公式，求得各个阴影三角形面积成等比数列，即可求解.

【详解】解：设正三角形 ABC 的边长为 a_1，后续各正三角形的边长依次为 a_2，a_3，……a_n，设第一个阴影三角形面积为 S_1,后续阴影三角形面积为 $S_{2,}S_{3,}\cdots S_{n,}$

由题意知 $a_1=3$，$a_n=\sqrt{(\frac{1}{3}a_{n-1})^2+(\frac{2}{3}a_{n-1})^2-2\times\frac{1}{3}a_{n-1}\times\frac{2}{3}a_{n-1}\cos 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_{n-1}$，$\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\{a_n\}$ 为以 3 为首项，$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为公比的等比数列，

所以 $a_n=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-3}$，

所以 $A_3B_2=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

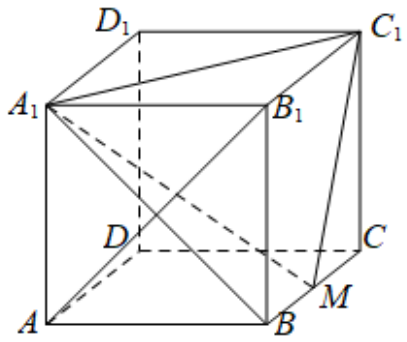
所以 $S_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}a_n)(\frac{2}{3}a_n)\sin 60°=\frac{\sqrt{3}a_n^2}{18}=\frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n-6}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n-3}$；

所以 $\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n-3}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n-5}}=\frac{1}{3}$，又 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\{S_n\}$ 是以 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为首项，为 $\frac{1}{3}$ 公比的等比数列，故图中阴影部分面积为 $=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{3^5}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{121\sqrt{3}}{162}$，

故答案 ：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$；$\frac{121\sqrt{3}}{162}$.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是 BC 的中点.



（1）求证：$AB_1\perp$ 平面 A_1BM；

（2）求二面角 $B-A_1M-C_1$ 的大小；

（3）求点 A 到平面 A_1MC_1 的距离.

【答案】（1）证明见解析

（2）135°

（3）$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）根据线线垂直证明线面垂直.

（2）根据空间向量，求法向量进一步得二面角.

（3）根据空间向量法求点面距.

【小问 1 详解】

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $BC\perp AB_1$，即 $BM\perp AB_1$.

因为四边形 AA_1B_1B 是正方形，

所以 $A_1B\perp AB_1$

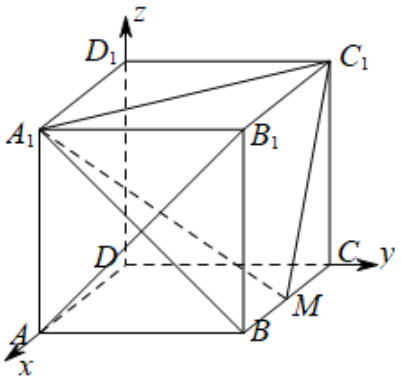
因为 $A_1B\cap BM=B, A_1B,, BM\subset$ 平面 A_1BM，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BM.

【小问 2 详解】

如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $A(2,0,0), B(2,2,0), B_1(2,2,2), A_1(2,0,2)$，

$M(1,2,0), C_1(0,2,2)$. 所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2), \overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0), \overrightarrow{C_1M}=(1,0,-2)$.



由（1）知，平面 A_1BM 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$,

设平面 A_1MC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-2x+2y=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1M}=x-2z=0,\end{cases}$ 所以 $x=y, x=2z$.

令 $x=2$，则 $y=2, z=1$，所以 $\vec{n}=(2,2,1)$.

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{AB_1}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由图可知，二面角 $B-A_1M-C_1$ 为钝角，

所以二面角 $B-A_1M-C_1$ 的大小为 135°.

【小问 3 详解】

设点 A 到平面 A_1MC_1 的距离 d，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2}{3}$.

所以点 A 到平面 A_1MC_1 的距离为 $\dfrac{2}{3}$.

17. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(A>0,\omega>0,|\phi|<\dfrac{\pi}{2})$，且 $f(x)$ 的最小正周期为 π，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）设 $g(x)=f(x)+2\sqrt{2}\cos 2x$，若 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值为 2，求 m 的最小值.

条件①：$f(x)$ 的最小值为 -2；

条件②：$f(x)$ 的图象经过点 $(\dfrac{\pi}{2},\sqrt{2})$；

条件③：直线 $x=\dfrac{3\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴.

注：如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1）$f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$；

（2）$\dfrac{\pi}{8}$.

【解析】

【分析】（1）由最小正周期可得 $\omega=2$，再根据所选条件，结合正弦函数的性质求 A,ϕ，即可得解析式；

（2）由（1）及和差角正弦公式可得 $g(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，根据区间最值及正弦函数性质求参数 m 的范围，即可得结果.

【小问 1 详解】

由题意 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，可得 $\omega=2$，

选①②：由 $f(x)$ 的最小值为 -2，则 $A=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\phi)$.

又 $f(\dfrac{\pi}{2})=2\sin(2\times\dfrac{\pi}{2}+\phi)=\sqrt{2}$，即 $\sin\phi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $|\phi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\phi=-\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$.

选①③：由 $f(x)$ 的最小值为 -2，则 $A=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\phi)$.

因为$x=\frac{3\pi}{8}$是$f(x)$的一条对称轴，则$2\times\frac{3\pi}{8}+\phi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以$\phi=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$且$|\phi|<\frac{\pi}{2}$，则$\phi=-\frac{\pi}{4}$.

所以$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$.

选②③：因为$x=\frac{3\pi}{8}$是$f(x)$的一条对称轴，则$2\times\frac{3\pi}{8}+\phi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以$\phi=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$且$|\phi|<\frac{\pi}{2}$，则$\phi=-\frac{\pi}{4}$.

所以$f(x)=A\sin(2x-\frac{\pi}{4})$.

又$f(\frac{\pi}{2})=A\sin(2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，则$A=2$.

所以$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$.

【小问2详解】

$g(x)=f(x)+2\sqrt{2}\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})+2\sqrt{2}\cos 2x=\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

$[0,m]$上$2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},2m+\frac{\pi}{4}]$，$g(x)$的最大值为2，则$2m+\frac{\pi}{4}\geq\frac{\pi}{2}$，可得$m\geq\frac{\pi}{8}$，

所以m的最小值为$\frac{\pi}{8}$.

18. 某产业园生产的一种产品的成本为50元/件.销售单价依产品的等级来确定，其中优等品、一等品、二等品、普通品的销售单价分别为80元、75元、65元、60元.为了解各等级产品的比例，检测员从流水线上随机抽取200件产品进行等级检测，检测结果如下表所示.

产品等级	优等品	一等品	二等品	普通品
样本数量（件）	30	50	60	60

（1）若从流水线上随机抽取一件产品，估计该产品为优等品的概率；

（2）从该流水线上随机抽取3件产品，记其中单件产品利润大于20元的件数为X，用频率估计概率，求随机变量X的分布列和数学期望;

（3）为拓宽市场，产业园决定对抽取的200件样本产品进行让利销售，每件产品的销售价格均降低了5元.设降价前后这200件样本产品的利润的方差分别为s_1^2,s_2^2，比较s_1^2,s_2^2的大小.（请直接写出结论）

【答案】（1）$\frac{3}{20}$

（2）分布列见解析，$\frac{6}{5}$

（3）$s_1^2=s_2^2$

【解析】

【分析】（1）由数据计算频率后估计概率

（2）由二项分布概念公式求解

（3）由方差计算公式判断

【小问 1 详解】

抽取的 200 件产品中优等品有 30 件，抽取优等品的频率是$\frac{30}{200}=\frac{3}{20}$，

用样本估计总体，从流水线上随机抽取一件产品，估计是优等品的概率为$\frac{3}{20}$.　　.

【小问 2 详解】

从流水线上随机抽取一件产品，估计利润大于 20 元　概率为$\frac{30+50}{200}=\frac{2}{5}$.

X 的可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=\mathrm{C}_3^0(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$，$P(X=1)=\mathrm{C}_3^1(\frac{2}{5})^1(\frac{3}{5})^2=\frac{54}{125}$，

$P(X=2)=\mathrm{C}_3^2(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^1=\frac{36}{125}$，$P(X=3)=\mathrm{C}_3^3(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$

分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

X 的数学期望$E(X)=0+\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}$.　　...

【小问 3 详解】

$s_1^2=s_2^2$

设 200 件样本利润分别为$x_1,x_2,\cdots x_{200}$，平均数为$\overline{x}$，

则降价后 200 件样本利润分别为$x_1-5,x_2-5,\cdots x_{200}-5$，平均数为$\overline{x}-5$，

由方差计算公式可得$s_1^2=s_2^2$

19. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，上下顶点分别为$A,B$，且$|AB|=4$.过点$(0,1)$的直线与椭圆$C$相交于不同的两点$M$，$N$（不与点$A,B$重合）.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若直线AM与直线$y=4$相交于点P，求证：B,P,N三点共线.

【答案】（1）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$和$|AB|=4$，由$\begin{cases}2b=4\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$求解；

（2）设直线MN的方程为$y=kx+1$，与椭圆方程联立，由直线AM的方程为$y-2=\frac{y_1-2}{x_1}x$，令$y=4$，得到$P(\frac{2x_1}{y_1-2},4)$，再结合韦达定理，判断$k_{BN}=k_{BP}$即可.

【小问1详解】

解：根据题意，$\begin{cases}2b=4,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$

解得$a^2=8,b^2=4$.

所以椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.　　...

（2）

【小问2详解】

由（1）知，$A(0,2),B(0,-2)$.

根据题意，直线MN的斜率一定存在，设直线MN的方程为$y=kx+1$.

由$\begin{cases}x^2+2y^2-8=0\\ y=kx+1\end{cases}$，得$(2k^2+1)x^2+4kx-6=0$.

根据题意，$\Delta>0$恒成立，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

则$x_1+x_2=\frac{-4k}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{-6}{2k^2+1}$.

直线AM的方程为$y-2=\frac{y_1-2}{x_1}x$，

令$y=4$，得$x=\frac{2x_1}{y_1-2}$，所以$P(\frac{2x_1}{y_1-2},4)$.

因为$B(0,-2),N(x_2,y_2)$，

则直线BN,BP的斜率分别为$k_{BN}=\frac{y_2+2}{x_2},k_{BP}=\frac{3(y_1-2)}{x_1}$，

$k_{BN}-k_{BP}=\frac{y_2+2}{x_2}-\frac{3(y_1-2)}{x_1}=\frac{x_1(y_2+2)-3x_2(y_1-2)}{x_1x_2}$.

又 $x_1(y_2+2)-3x_2(y_1-2)=x_1(kx_2+3)-3x_2(kx_1-1)$，

$=-2kx_1x_2+3(x_1+x_2)$，

$=-2k\dfrac{-6}{2k^2+1}+3\times\dfrac{-4k}{2k^2+1}$，

$=0$.

所以 $k_{BN}=k_{BP}$，

所以 B,P,N 三点共线.

20. 已知函数 $f(x)=a\ln x-bx+b$， $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a(x>0)$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，求实数 a,b 的值；

（2）若函数 $g(x)$ 无零点，求实数 a 的取值范围；

（3）当 $a=b$ 时，函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$a=\mathrm{e},b=\mathrm{e}$

（2）$(-\infty,\mathrm{e})$

（3）$(-\infty,\mathrm{e}]$

【解析】

【分析】（1）求出两个函数的导数，由题可知 $f'(1)=g'(1),f(1)=g(1)$，求出即可；

（2）设 $h(x)=\mathrm{e}^x-ax(x>0)$，求出导数，讨论 a 的范围根据单调性可得出；

（3）求出 $F\left(x\right)$ 的导数，讨论 a 的范围，根据单调性即可得出.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x)=a\ln x-bx+b$， $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a(x>0)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-b$， $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

因为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，

所以 $f'(1)=g'(1),f(1)=g(1)$.

则 $a-b=0,\mathrm{e}-a=0$，解得 $a=\mathrm{e},b=\mathrm{e}$.

【小问 2 详解】

由题意， $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a=\dfrac{\mathrm{e}^x-ax}{x}$，

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-ax(x>0),h'(x)=\mathrm{e}^x-a$

①当 $a\le 0$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(x)>h(0)=1$，

所以 $g(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点.

②当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=\mathrm{e}^x-a=0$，得 $x=\ln a$.

当$0<a\le 1$，即$\ln a\le 0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$h(x)>h(0)=1$，

所以$g(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上无零点.

当$a>1$时，$\ln a>0$，

$h(x),h'(x)$符号变化如下，

x	$(0,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以$h(x)_{\min}=h(\ln a)=a(1-\ln a)$.

当$1-\ln a>0$，即$1<a<\mathrm{e}$时，$h(x)>0$，

所以$g(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上无零点.

当$1-\ln a\le 0$，即$a\ge \mathrm{e}$时，由$h(0)=1>0$，$h(\ln a)\le 0$，所以$h(x)$至少存在一个零点$x_0\in(0,\ln a]$，所以$g(x)$至少存在一个零点.

综上，若$g(x)$无零点，实数a的取值范围为$(-\infty,\mathrm{e})$.

【小问3详解】

当$a=b$时，$F(x)=f(x)+g(x)=a\ln x-ax+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，定义域为$(0,+\infty)$.

则$F'(x)=\dfrac{a}{x}-a+\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)\left(\mathrm{e}^x-ax\right)}{x^2}$.

由（2）可知，当$a\le 1$时，$h(x)=\mathrm{e}^x-ax>1$，

当$1<a\le \mathrm{e}$时，$h(x)_{\min}=a(1-\ln a)\ge 0$，

所以当$a\le \mathrm{e}$时，$h(x)=\mathrm{e}^x-ax\ge 0$在$(0,+\infty)$上恒成立.

此时，当$0<x<1$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；

当$x>1$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增.

所以$F(x)$在$x=1$处取得极小值.

当$a>\mathrm{e}$时，$\ln a>1$，

当$1<x<\ln a$时，$x-1>0$，$h(x)<h(1)=\mathrm{e}-a<0$，

所以$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减.

此时$x=1$不是极小值点．即$a>\mathrm{e}$时，不合题意.

综上，满足条件的a的取值范围为$(-\infty,\mathrm{e}]$.

21. 已知数列$\{a_n\}$，给出两个性质：

①对于任意的$i\in N^*$，存在$k_i\in R$，当$j>i,j\in \mathbf{N}^*$时，都有$a_j-a_i\ge k_i(j-i)$成立；

②对于任意的$i\in\mathbf{N}^*,i\geq 2$，存在$k_i\in R$，当$j<i,j\in\mathbf{N}^*$时，都有$a_j-a_i\geq k_i(j-i)$成立.

（1）已知数列$\{a_n\}$满足性质①，且$k_i=2\left(i\in N^*\right)$，$a_1=1,a_4=7$，试写出$a_2,a_3$的值；

（2）已知数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times 2^{n-1}$，证明：数列$\{b_n\}$满足性质①；

（3）若数列$\{c_n\}$满足性质①②，且当$i\in N^*,i\geq 2$时，同时满足性质①②的k_i存在且唯一.证明：数列$\{c_n\}$是等差数列.

【答案】（1）$a_2=3,a_3=5$

（2）证明见解析　（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由性质①，可求出$a_2\geq 3$且$a_2\leq 3$，所以a_2=3，同理可求得a_3的值；

（2）由$b_n=3\times 2^{n-1}$，验证性质①，即可证明；

（3）数列$\{c_n\}$满足性质①②，带入验证，即可得：当$i\geq 2$时，$c_{i+1}-c_i=c_i-c_{i-1}$，即可证明满足条件的数列$\{c_n\}$是等差数列.

【小问 1 详解】

因为数列$\{a_n\}$满足性质①，且$a_1=1,a_4=7$，所以$a_2-a_1\geq k_1$=2，所以$a_2\geq 3$，又因为$a_4-a_2\geq 4$，即$7-a_2\geq 4\Rightarrow a_2\leq 3$，所以$a_2$=3，同理可得：$a_3$=5.

【小问 2 详解】

因为数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times 2^{n-1}$，

所以，对于任意的$j>i,i,j\in N^*$，令$m=j-i$，则$m\in N^*$，

$$\frac{b_j-b_i}{j-i}=\frac{b_{i+m}-b_i}{m}=\frac{3\times 2^{i+m-1}-3\times 2^{i-1}}{m}=3\times 2^{i-1}\times\frac{2^m-1}{m}.$$

又$2^m-1=\frac{2^m-1}{2-1}=1+2+\cdots+2^{m-1}$，则$2^m-1\geq m$，即$\frac{2^m-1}{m}\geq 1$.

又$2^{i-1}\geq 1$，所以$3\times 2^{i-1}\times\frac{2^m-1}{m}\geq 3$，

即对于任意的$j>i,\frac{b_j-b_i}{j-i}\geq 3.$

所以，对于任意的$i\in N^*$，令$k_i,=3$，则当$j>i$时，都有$b_j-b_i\geq k_i(j-i)$成立，

所以，数列$\{b_n\}$满足性质①.

【小问 3 详解】

由题意，数列$\{c_n\}$满足性质①②，且当$i\in N^*,i\geq 2$时，同时满足性质①②的k_i存在，

即对于任意的$i\geq 2$，存在$k_i\in R$，当$j\neq i$时，都有$c_j-c_i\geq k_i(j-i)$成立，

所以，当$i\geq 2$时，$c_{i+1}-c_i\geq k_i,c_{i-1}-c_i\geq -k_i$，

即 $c_{i+1}-c_i \geq k_i \geq c_i - c_{i-1}$.

对于任意的 $j>i$,有 $\frac{c_j-c_i}{j-i}=\frac{(c_j-c_{j-1})+(c_{j-1}-c_{j-2})+\cdots+(c_{i+1}-c_i)}{j-i} \geq c_{i+1}-c_i$，

对于任意的 $j<i$,有 $\frac{c_i-c_j}{i-j} \leq k_i$，

$\frac{c_i-c_j}{i-j}=\frac{(c_i-c_{i-1})+(c_{i-1}-c_{i-2})+\cdots+(c_{j+1}-c_j)}{i-j} \leq c_i-c_{i\text{-}1}$，

又当 $i \geq 2$ 时，同时满足性质①②的 k_i 存在且唯一,

所以，当 $i \geq 2$ 时，$c_{i+1}-c_i=c_i-c_{i-1}$，

所以，满足条件的数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

【点睛】与数列的新定义有关的问题的求解策略：

1、通过给出一个新的数列的定义，或约定一种新的运算，或给出几个新模型来创设新问题的情景，要求在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实心信息的迁移，达到灵活解题的目的；

2、遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、运算、验证，使得问题得以解决.