2022 北京房山高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\left|-1<x<3\right.\}$，集合 $B=\left\{x\left|\left|x\right|\le 2\right.\right\}$，则（　）

A. $A\cap B=\{x\left|-2\le x<3\right.\}$　　B. $A\cup B=\{x\left|-2\le x<3\right.\}$

C. $A\cap B=\{x\left|-1<x<2\right.\}$　　D. $A\cap B=\{x\left|x<3\right.\}$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦点坐标为（　）

A $(\pm 1,0)$　　B. $(\pm\sqrt{2},0)$　　C. $(\pm\sqrt{3},0)$　　D. $(\pm\sqrt{5},0)$

3. 已知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.2},b=\log_4 0.2,c=\log_2 3$，则（　）

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $a>b>c$　　D. $b>c>a$

4. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5},\alpha$ 是第一象限角，且角 α,β 的终边关于 y 轴对称，则 $\tan\beta=$(　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

5. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right),S_n$ 为其前 n 项和.若 $a_2=2$，则 $S_5=$（　）

A. 20　　B. 30　　C. 31　　D. 62

6. 已知函数 $f(x)=\left|\log_2 x\right|$，则不等式 $f(x)<2$ 的解集为(　)

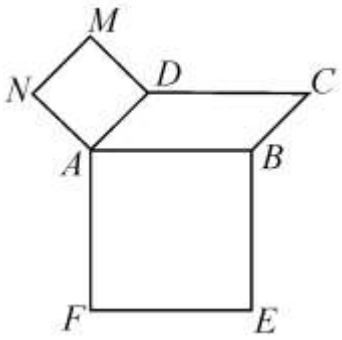
A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(0,4)$

C. $\left(\frac{1}{4},4\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

7. 已知 α,β 是两个不同的平面，直线 $l\subset\alpha$，且 $\alpha\perp\beta$，那么“$l//\alpha$”是“$l\perp\beta$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 如图，在同一平面内沿平行四边形 $ABCD$ 两边 AB、AD 向外分别作正方形 $ABEF$、$ADMN$，其中 $AB=2$，$AD=1$，$\angle BAD=\frac{\pi}{4}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=$(　)



A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 0　　D. -1

9. 已知数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，且各项均为正整数，如果$a_1=3, a_n=45$，那么$n+d$的最小值为（　）

A. 13　　B. 14　　C. 17　　D. 18

10. 下表　某生活超市2021年第四季度各区域营业收入占比和净利润占比统计表：

	生鲜区	熟食区	乳制品区	日用品区	其它区
营业收入占比	48.6%	15.8%	20.1%	10.8%	4.7%
净利润占比	65.8%	–4.3%	16.5%	20.2%	1.8%

该生活超市本季度　总营业利润率为32.5%（营业利润率是净利润占营业收入的百分比），给出下列四个结论：

①本季度此生活超市营业收入最低的是熟食区；

②本季度此生活超市的营业净利润超过一半来自生鲜区；

③本季度此生活超市营业利润率最高的是日用品区；

④本季度此生活超市生鲜区的营业利润率超过40%.

其中正确结论的序号是（　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ②③　　D. ②③④

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 抛物线$y^2=2x$　准线方程为_____.

12. 复数z满足$(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则$|z|=$_____.

13. 已知圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$和直线$l:y=k(x+1)$，则圆心坐标为_____；若点P在圆C上运动，P到直线l的距离记为$d(k)$，则$d(k)$的最大值为_____.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x, x\le a,\\ x^3, x>a.\end{cases}$若函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上不是增函数，则$a$的一个取值为_____.

15. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波，其中包含着正弦函数.纯音的数学模型是函数$y=A\sin\varpi t$.我们听到的声音是由纯音合成的，称为复合音.已知一个复合音的数学模型是函数$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.给出下列四个结论：

① $f(x)$的最小正周期是π；

② $f(x)$在$[0,2\pi]$上有3个零点；

③ $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数；

④ $f(x)$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，$a\cos B+\frac{1}{2}b=c,b=2$.

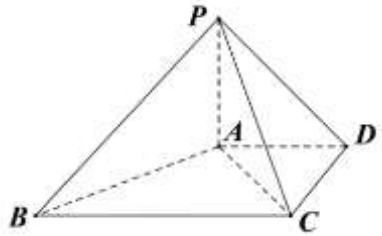
（1）求$\angle A$；

（2）再从下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求BC边上的高.

条件①：$\cos B=-\frac{2}{3}$；条件②：$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$；条件③：$\triangle ABC$的面积为$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$.在底面$ABCD$中，$BC//AD$，$CD\perp AD$，$AD=CD=1$，$BC=2$.



（1）求证：$AC\perp$平面PAB；

（2）若平面PAB与平面PCD的夹角等于$\frac{\pi}{3}$，求点B到平面PCD的距离.

18. 北京2022年冬奥会，向全世界传递了挑战自我、积极向上的体育精神，引导了健康、文明、快乐的生活方式.为了激发学生的体育运动兴趣，助力全面健康成长，某中学组织全体学生开展以“筑梦奥运，一起向未来”为主题的体育实践活动.为了解该校学生参与活动的情况，随机抽取100名学生作为样本，统计他们参加体育实践活动时间（单位：分钟），得到下表：

时间 人数 类别		$[0,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中					10	
	高中	m	13	12	7	5	4

（1）从该校随机抽取1名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育实践活动时间在$[50,60)$的概率；

（2）从参加体育实践活动时间在$[80,90)$和$[90,100)$的学生中各随机抽取1人，其中初中学生的人数记为X，求随机变量X的分布列和数学期望；

（3）假设同组中每个数据用该组区间中点值代替，样本中的 100 名学生参加体育实践活动时间的平均数记为 μ_0，初中、高中学生参加体育实践活动时间的平均数分别记为 μ_1,μ_2，当 m 满足什么条件时，$\mu_0 \geq \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$.（结论不要求证明）

19. 已知函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}ax^2(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值.

20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $(0,-1)$，一个焦点为 $(1,0)$.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率；

（2）已知点 $P(0,2)$，过原点 O 的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，直线 PM 与椭圆 C 的另一个交点为 Q.若 $\triangle MNQ$ 的面积等于 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$，求直线 PM 的斜率.

21. 已知数集 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}(1=a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geq 2)$ 具有性质 P：对任意的 $k(2\leq k\leq n),\exists i,j(1\leq i\leq j\leq n)$，使得 $a_k=a_i+a_j$ 成立.

（1）分别判断数集 $\{1,3,5\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（2）已知 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，求证：$2a_n-1\leq S_n$；

（3）若 $a_n=36$，求数集 A 中所有元素　和的最小值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，集合 $B=\{x||x|\le 2\}$，则（　）

A. $A\cap B=\{x|-2\le x<3\}$　　B. $A\cup B=\{x|-2\le x<3\}$

C. $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$　　D. $A\cap B=\{x|x<3\}$

【答案】B

【解析】

【分析】求解 $B=\{x|-2\le x\le 2\}$，再求 A,B 的交集和补集判断即可

【详解】由题，$B=\{x|-2\le x\le 2\}$，故 $A\cap B=\{x|-1<x\le 2\}$ $A\cup B=\{x|-2\le x<3\}$

故选：B

2. 双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦点坐标为（　）

A $(\pm 1,0)$　　B. $(\pm\sqrt{2},0)$　　C. $(\pm\sqrt{3},0)$　　D. $(\pm\sqrt{5},0)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据双曲线焦点坐标公式求解即可

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦点在 x 轴上，坐标为 $(\pm\sqrt{2+1},0)$，即 $(\pm\sqrt{3},0)$

故选：C

3. 已知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}, b=\log_4 0.2, c=\log_2 3$，则（　）

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $a>b>c$　　D. $b>c>a$

【答案】A

【解析】

【分析】a,b,c 分别和特殊值 0，1 比较大小，即可判断.

【详解】$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}\in(0,1)$，$b=\log_4 0.2<0$，$c=\log_2 3>\log_2 2=1$，

所以 $c>a>b$.

故选：A

4. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，α 是第一象限角，且角 α,β 的终边关于 y 轴对称，则 $\tan\beta=$(　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据 cosα 求出 tanα，根据角 α,β 的终边关于 y 轴对称可知 $\tan\beta=-\tan\alpha$.

【详解】$\because \cos\alpha=\frac{3}{5},\alpha$ 是第一象限角，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$，

$\because$ 角 α,β 的终边关于 y 轴对称，$\therefore \tan\beta=-\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

故选：D.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right),S_n$ 为其前 n 项和.若 $a_2=2$，则 $S_5=$（　）

A. 20　　B. 30　　C. 31　　D. 62

【答案】C

【解析】

【分析】先利用等比数列的定义、通项公式得到公比和首项，再利用等比数列的求和公式进行求解.

【详解】因为 $a_{n+1}=2a_n$，所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $q=2$，

又 $a_2=2$，所以 $a_1=1$，则 $S_5=\frac{1-2^5}{1-2}=31$.

故选：C.

6. 已知函数 $f(x)=\left|\log_2 x\right|$，则不等式 $f(x)<2$ 的解集为(　)

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(0,4)$

C. $\left(\frac{1}{4},4\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据绝对值的定义和对数函数的单调性即可求解.

【详解】$f(x)=\left|\log_2 x\right|<2\Rightarrow -2<\log_2 x<2\Rightarrow 2^{-2}<x<2^2\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{4},4\right)$.

故选：C .

7. 已知 α,β 是两个不同　平面，直线 $l\subset\alpha$，且 $\alpha\perp\beta$，那么“$l//\alpha$”是“$l\perp\beta$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间线面位置关系，结合必要不充分条件的概念判断即可.

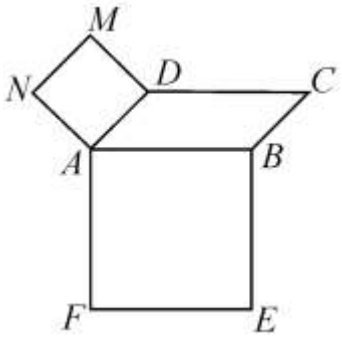
【详解】解：当直线 $l\subset\alpha$，且 $\alpha\perp\beta$，$l//\alpha$，则 $l\subset\beta$，或 $l//\beta$，l 与 β 相交，故充分性不成立，

当直线 $l\subset\alpha$，且 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\beta$ 时，$l//\alpha$，故必要性成立，

所以，“$l//\alpha$”是“$l\perp\beta$”的必要而不充分条件.

故选：B

8. 如图，在同一平面内沿平行四边形 *ABCD* 两边 *AB*、*AD* 向外分别作正方形 *ABEF*、*ADMN*，其中 $AB=2$，$AD=1$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=$（　）



A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 0　　D. -1

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量加法法则，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}\right)$，再利用数量积的运算法则计算即可.

【详解】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN}$

$=0+\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{FA}\right|\cos\dfrac{\pi}{4}+\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AN}\right|\cos\dfrac{3\pi}{4}+0=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$.

故选：C.

9. 已知数列$\left\{a_n\right\}$是公差为 *d*　等差数列，且各项均为正整数，如果$a_1=3,a_n=45$，那么 $n+d$ 的最小值为（　）

A. 13　　B. 14　　C. 17　　D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得$d\left(n-1\right)=42$，再结合$n-1$为整数可求得n,d，即可得解.

【详解】解：在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，因为$a_1=3,a_n=45$，

则$3+d\left(n-1\right)=45$，即$d\left(n-1\right)=42=1\times42=2\times21=3\times14=6\times7$，

故$d=1,n=43$或$d=2,n=22$或$d=3,n=15$或$d=6,n=8$或$d=7,n=7$

或$d=14,n=4$或$d=21,n=3$或$d=42,n=2$，

所以 $n+d$ 的最小值为 14.

故选：B.

10. 下表是某生活超市 2021 年第四季度各区域营业收入占比和净利润占比统计表：

	生鲜区	熟食区	乳制品区	日用品区	其它区
营业收入占比	48.6%	15.8%	20.1%	10.8%	4.7%
净利润占比	65.8%	−4.3%	16.5%	20.2%	1.8%

该生活超市本季度的总营业利润率为32.5%（营业利润率是净利润占营业收入的百分比），给出下列四个结论：

①本季度此生活超市营业收入最低的是熟食区；

②本季度此生活超市的营业净利润超过一半来自生鲜区；

③本季度此生活超市营业利润率最高的是日用品区；

④本季度此生活超市生鲜区的营业利润率超过40%.

其中正确结论的序号是（　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ②③　　D. ②③④

【答案】D

【解析】

【分析】根据表中数据以及营业利润率的概念逐项进行分析并判断.

【详解】由题中数据知，其它类营业收入占比4.7%，为最低的，故①错；

生鲜区的净利润占比$65.8\%>50\%$，故②正确；

生鲜区的营业利润率为$\frac{65.8\%}{48.6\%}\times 32.5\%=44\%>40\%$，故④正确；

熟食区的营业利润率为$\frac{-4.3\%}{15.8\%}\times 32.5\%<0$；

乳制品区的营业利润率为$\frac{16.5\%}{20.1\%}\times 32.5\%=26.68\%$；

其他区的营业利润率为$\frac{1.8\%}{4.7\%}\times 32.5\%=12.45\%$；

日用品区为$\frac{20.2\%}{10.8\%}\times 32.5\%=60.787\%$，最高，故③正确.

故选：D.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线$y^2=2x$的准线方程为_____.

【答案】$x=-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】抛物线$y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，由此得到题目所求准线方程.

【详解】抛物线$y^2=2x$的准线方程是$x=-\frac{1}{2}$.

【点睛】本小题主要考查抛物线的准线方程，抛物线$y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，直接利用公式可得到结果.

属于基础题.

12. 复数z满足$(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则$|z|=$_____.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【详解】由题意得 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，

$\therefore |z|=|-1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

13. 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 和直线 $l:y=k(x+1)$，则圆心坐标为_____；若点 P 在圆 C 上运动，P 到直线 l 的距离记为 $d(k)$，则 $d(k)$ 的最大值为_____.

【答案】 ①. $(1,2)$ ②. $2\sqrt{2}+1$##$1+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由圆的标准方程可得圆心坐标；根据直线 l 过定点 $Q(-1,0)$，可知当 $CQ\perp l$ 时，圆心 C 到 l 距离最大，则 $d(k)_{\max}=|CQ|+r$.

【详解】由圆的方程知：圆心 C 坐标为 $(1,2)$；

由直线方程知：l 恒过点 $Q(-1,0)$，则 $|CQ|=\sqrt{(1+1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 当 $CQ\perp l$ 时，圆心 C 到 l 距离最大，

又圆 C 的半径 $r=1$，$\therefore d(k)_{\max}=|CQ|+r=2\sqrt{2}+1$.

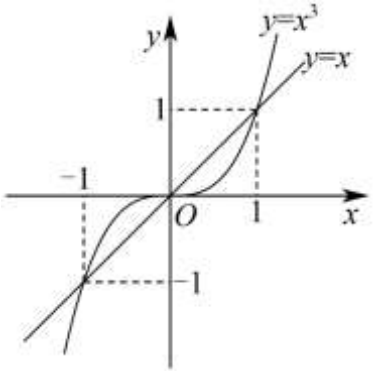
14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\le a,\\ x^3, x>a.\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数，则 a 的一个取值为_____.

【答案】-2(答案不唯一，满足 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 即可)

【解析】

【分析】作出 $y=x$ 和 $y=x^3$ 的图象，数形结合即可得 a 的范围，从而得到 a 的可能取值.

【详解】$y=x$ 和 $y=x^3$ 的图象如图所示：



$\therefore$ 当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，$y=x^3$ 有部分函数值比 $y=x$ 的函数值小，

故当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数.

故答案为：-2.

15. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波，其中包含着正弦函数.纯音的数学模型是函数 $y=A\sin\varpi t$.我们听到的声音是由纯音合成的，称为复合音.已知一个复合音的数学模型是函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.给出下列四个结论：

① $f(x)$ 的最小正周期是 π；

② $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点；

③ $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数；

④ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】②④

【解析】

【分析】对①，分别计算 $y=\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期，再由其最小公倍数即可得到 $f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期；

对②，直接求零点即可；

对③④，对 $f\left(x\right)$ 求导，利用导数研究函数的单调性、极值和最值，即可判断

【详解】对①，因为： $f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$，

$y=\sin x$ 的最小正周期是 2π， $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

所以 $f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期是 2π，故①不正确；

对②， $f(x)=0$ 即 $\sin x+\sin x\cos x=0$，即 $\sin x\left(1+\cos x\right)=0$，故 $\sin x=0$ 或 $\cos x=-1$，又 $x\in\left[0,2\pi\right]$，故 $x=0$， $x=\pi$ 或 $x=2\pi$，即 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点，故②正确；

对③由题 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$， $x\in\left[0,2\pi\right]$，

由 $f'\left(x\right)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$，

令 $f'\left(x\right)=0$ 得， $x=\frac{\pi}{3}$， $x=\frac{5\pi}{3}$， $x=\pi$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$， $f'(x)>0$， $f(x)$ 为增函数，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$， $f'\left(x\right)\le 0$， $f(x)$ 减函数，

当 $x\in\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$， $f'(x)>0$， $f(x)$ 为增函数，

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$， $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$ 上为单调递减，故③不正确；

由于 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$， $f(2\pi)=0$，所以 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以④正确

综上，②④正确

故答案为：②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $a\cos B+\frac{1}{2}b=c,b=2$.

（1）求 $\angle A$；

（2）再从下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上的高.

条件①： $\cos B=-\frac{2}{3}$；条件②： $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$；条件③： $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1） $A=60°$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）方法一：根据正弦定理，结合内角和与两角和的正弦公式化简即可；方法二：利用余弦定理化简即可

（2）选①则 $A+B>\pi$ 不合题意；

选②：根据 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 则可得 $B=45°$，再根据两角和的正弦公式可得 $\sin C$，再根据高 $h=b\sin C$ 计算即可；

选③：根据面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 可得 $c=1+\sqrt{3}$，进而用余弦定理求得 $a=\sqrt{6}$，再结合面积公式求解高即可

【小问 1 详解】

方法一：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\cos B+\frac{1}{2}b=c$，

所以由正弦定理可得 $\sin A\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\sin C$.

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

所以 $\frac{1}{2}\sin B=\cos A\sin B$.

在 $\triangle ABC$ 中， $\sin B\neq 0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=60°$.

方法二：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\cos B+\frac{1}{2}b=c$，

由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

得 $a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{1}{2}b=c$，

整理得 $c^2+b^2-a^2=bc$

所以 $\cos A=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=60°$.

【小问 2 详解】

选条件②：由（1）知 $0°<B<120°$

因为在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B=45°$

又 $A+B+C=\pi$，所以 $C=75°$

所以 $\sin C=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

设 BC 边上高线的长为 h，则

$h=b\sin C=2\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

选条件③：

因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=c\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

所以 $c=1+\sqrt{3}$，

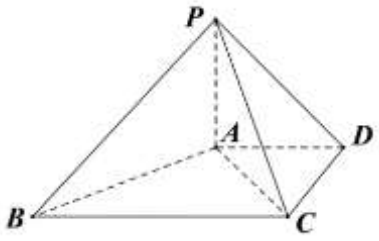
由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+4+2\sqrt{3}-2\times2\times(1+\sqrt{3})\cos 60°=6$

所以 $a=\sqrt{6}$.

设 BC 边上高线的长为 h，则

$h=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$.在底面 $ABCD$ 中，$BC//AD$，$CD\perp AD$，$AD=CD=1$，$BC=2$.



（1）求证：$AC\perp$ 平面 PAB；

（2）若平面 PAB 与平面 PCD 的夹角等于 $\frac{\pi}{3}$，求点 B 到平面 PCD 的距离.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）根据几何关系证明 $AB \perp AC$，根据 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ 得 $PA \perp AC$，进而证明结论；

（2）根据题意，AE, AD, PA 两两互相垂直，进而建立空间直角坐标系，设 $PA = a(a > 0)$，再根据坐标法求解即可.

【小问 1 详解】

证明：设 BC 中点为 E，连接 AE，

易知 $ADCE$ 为正方形，且 $AC = \sqrt{2}, AE = 1, AB = \sqrt{2}$

所以 $BC^2 = AB^2 + AC^2$，

所以 $AB \perp AC$

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD, AC \subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PA \perp AC$

又 $PA, AB \subset$ 面 PAB，$PA \cap AB = A$

所以 $AC \perp$ 平面 PAB

【小问 2 详解】

解：因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，在正方形 $ADCE$ 中 $AE \perp AD$

所以 AE, AD, PA 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A - xyz$

设 $PA = a(a > 0)$

则 $C(1,1,0), D(0,1,0), B(1,-1,0), P(0,0,a)$

所以 $\overrightarrow{PD} = (0,1,-a), \overrightarrow{DC} = (1,0,0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} y - az = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

所以 $\vec{n} = (0, a, 1)$

由（1）知，平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$

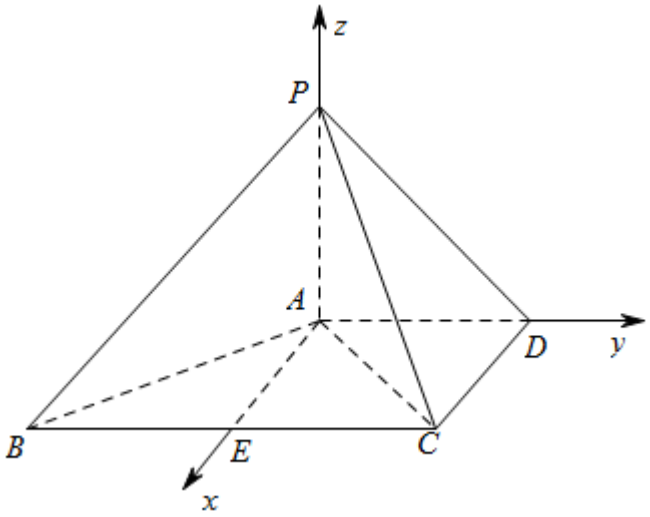
因为平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $\cos\frac{\pi}{3} = |\cos\langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}||\vec{n}|} = \frac{|(1,1,0) \cdot (0,1,-a)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-a)^2}} = \frac{1}{2}$，解得 $a = 1$

设点 B 到平面 PCD 的距离为 d.

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0),\vec{n}=(0,1,1)$

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|(0,2,0)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



18. 北京 2022 年冬奥会，向全世界传递了挑战自我、积极向上的体育精神，引导了健康、文明、快乐的生活方式.为了激发学生的体育运动兴趣，助力全面健康成长，某中学组织全体学生开展以“筑梦奥运，一起向未来”为主题的体育实践活动.为了解该校学生参与活动的情况，随机抽取 100 名学生作为样本，统计他们参加体育实践活动时间（单位：分钟），得到下表：

时间 / 人数 / 类别		$[0,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中					10	
	高中	m	13	12	7	5	4

（1）从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育实践活动时间在 $[50,60)$ 的概率；

（2）从参加体育实践活动时间在 $[80,90)$ 和 $[90,100)$ 的学生中各随机抽取 1 人，其中初中学生的人数记为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（3）假设同组中每个数据用该组区间中点值代替，样本中的 100 名学生参加体育实践活动时间的平均数记为 μ_0，初中、高中学生参加体育实践活动时间的平均数分别记为 μ_1,μ_2，当 m 满足什么条件时，$\mu_0\geq\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$.（结论不要求证明）

【答案】（1）$\dfrac{1}{5}$

（2）分布列答案见解析，数学期望：$\frac{4}{3}$

（3）$\left\{m \in Z \middle| 2 \le m \le 11\right\}$

【解析】

【分析】（1）方法一：根据条件概率公式求解即可；方法二：根据古典概型的方法分析即可；

（2）方法一：根据相互独立事件同时发生的概率公式求解即可；方法二：根据二项分布的公式求解；

（3）补全初中段的人数表格，再分别计算 μ_0, μ_1, μ_2 关于 m 的解析式，代入 $\mu_0 \ge \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$ 求解 m 的范围即可

【小问 1 详解】

方法一：女生共有 $6+9+10+10+6+4=45$ 人，记事件 A 为“从所有调查学生中随机抽取 1 人，女生被抽到”，事件 B 为“从所有调查学生中随机抽取 1 人，参加体育活动时间在 $[50,60)$ ”

由题意可知，$P(A)=\frac{45}{100}, P(AB)=\frac{9}{100}$

因此 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{45}{100}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$

所以从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育活动时间在 $[50,60)$ 的概率为 $\frac{1}{5}$

方法二：女生共有 $6+9+10+10+6+4=45$ 人，记事件 M 为“从所有调查学生中随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，该学生参加体育活动时间在 $[50,60)$ ”

由题意知，从所有调查学生中随机抽取 1 人，抽到女生所包含的基本事件共 45 个，抽到女生且参加体育活动时间在 $[50,60)$ 所包含的基本事件共 9 个

所以 $P(M)=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$

所以从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育活动时间在 $[50,60)$ 的概率为 $\frac{1}{5}$

小问 2 详解】

方法一：X 的所有可能值为 0，1，2，时间在 $[80,90)$ 的学生有 $10+5=15$ 人，活动时间在 $[90,100)$ 的初中学生有 $8+4-4=8$ 人.

记事件 C 为“从参加体育活动时间在 $[80,90)$ 的学生中随机抽取 1 人，抽到的是初中学生”，事件 D 为“从参加体育活动时间在 $[90,100)$ 的学生中随机抽取 1 人，抽到的是初中学生”.由题意知，事件 C、D 相互独立，且

$P(C)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}, P(D)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

所以 $P(X=0)=P(\overline{C}\,\overline{D})=P(\overline{C})P(\overline{D})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$$P(X=1)=P(C\bar{D}\cup\bar{C}D)=P(C)P(\bar{D})+P(\bar{C})P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

方法二：X 的所有可能值为 0，1，2，

因为从参加体育活动时间在 $[80,90)$ 和 $[90,100)$ 的学生中各随机抽取 1 人是相互独立，且抽到初中学生的概率均为 $\frac{2}{3}$，故 $X\sim B\left(2,\frac{2}{3}\right)$

所以 $P(X=0)=C_2^0\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$$P(X=1)=C_2^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=C_2^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

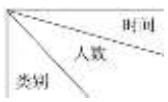
所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

故 X 的数学期望 $E(X)=np=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

【小问 3 详解】

根据男女生人数先补全初中学生各区间人数：

		$[0,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
学段	初中	$11-m$	8	11	11	10	8
	高中	m	13	12	7	5	4

$[50,100)$ 内初中生的总运动时间 $t_1=8\times55+11\times65+11\times75+10\times85+8\times95=3590$，$[50,100)$ 内高中生的总运动时间 $t_2=13\times55+12\times65+7\times75+5\times85+4\times95=2825$，

则由题，$m=1,2,3...11$，又$\mu_0=\frac{1}{100}\left(11\times25+3590+2825\right)=66.9$，

$\mu_1=\frac{1}{59-m}\left[25\left(11-m\right)+3590\right]=\frac{2390}{59-m}+25$，$\mu_2=\frac{1}{41+m}\left(25m+2825\right)=25+\frac{1800}{41+m}$，由$\mu_0\geq\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$可得

$83.8\geq\frac{2390}{59-m}+\frac{1800}{41+m}$，当$m=2,3...11$时成立，故$m$的取值范围$\left\{m\in Z\middle|2\leq m\leq11\right\}$

19. 已知函数$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}ax^2(a\in\mathbf{R})$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程；

（2）求函数$f(x)$在$[1,2]$上的最小值.

【答案】（1）$y=-1$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）利用导数的几何意义，求切线方程；

（2）首先求函数的导数，化简为$f'(x)=x\left(\mathrm{e}^x-a\right)$，再讨论$a\leq0$和$a>0$两种情况讨论函数的单调性，再求函数的最值.

【小问 1 详解】

当$a=0$时，$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x,f'(x)=x\mathrm{e}^x$

所以$f'(0)=0,f(0)=-1$.

所以曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为：$y=-1$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=x\mathrm{e}^x-ax=x\left(\mathrm{e}^x-a\right)$.

①当$a\leq0$时，$\mathrm{e}^x-a>0$.

所以$x\in[1,2]$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$[1,2]$上是增函数.所以$f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}a$.

②当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x_1=\ln a,x_2=0$（舍）

1°当$\ln a\leq1$，即$0<a\leq\mathrm{e}$时，$x\in[1,2]$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$[1,2]$上是增函数.所以$f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}a$.

2°当$1<\ln a<2$，即$\mathrm{e}<a<\mathrm{e}^2$时，

x	$(1,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,2)$
$f'(x)$	-	0	+

$f(x)$	减函数	极小值	增函数

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=-\frac{1}{2}a\ln^2 a+a(\ln a-1)$.

3°当 $\ln a\geq 2$，即 $a\geq \mathrm{e}^2$ 时，$x\in[1,2]$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数.所以 $f(x)_{\min}=f(2)=\mathrm{e}^2-2a$.

综上，当 $a\leq \mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}a$；

当 $\mathrm{e}<a<\mathrm{e}^2$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}a\ln^2 a+a(\ln a-1)$.

当 $a\geq \mathrm{e}^2$ 时，$f(x)_{\min}=\mathrm{e}^2-2a$.

20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $(0,-1)$，一个焦点为 $(1,0)$.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率；

（2）已知点 $P(0,2)$，过原点 O 的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，直线 PM 与椭圆 C 的另一个交点为 Q.若 $\triangle MNQ$ 的面积等于 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$，求直线 PM 的斜率.

【答案】（1）椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）$\pm\sqrt{2}$ 或 $\pm\frac{\sqrt{38}}{2}$.

【解析】

【分析】（1）根据题意得到 b,c，进而求出 a，最后得到椭圆方程和离心率；

（2）设出直线 PM 的方程并代入椭圆方程然后化简，再设出点 M,Q 的坐标，进而表达出面积，然后结合根与系数的关系求出答案.

【小问 1 详解】

由题设，得 $b=1,c=1$，则 $a^2=b^2+c^2=2$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问 2 详解】

设直线 PM 的方程为 $y=kx+2$，由 $\begin{cases}y=kx+2\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $\left(1+2k^2\right)x^2+8kx+6=0$，

$\Delta=(8k)^2-4\left(1+2k^2\right)\times 6>0$ 解得 $k^2>\frac{3}{2}$.

设 $M\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\frac{-8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{6}{1+2k^2}>0$，即 x_1,x_2 同号.

根据椭圆的对称性知$S_{\triangle OMQ}=S_{\triangle ONQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle MNQ}$，$S_{\triangle POM}=S_{\triangle PON}$，所以

$S_{\triangle OMQ}=S_{\triangle ONQ}=S_{\triangle POQ}-S_{\triangle PON}=S_{\triangle POQ}-S_{\triangle POM}$

$=\left|\frac{1}{2}\times 2\times\left|x_2\right|\right|-\left|\frac{1}{2}\times 2\times\left|x_1\right|\right|=\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{64k^2}{\left(1+2k^2\right)^2}-\frac{24}{1+2k^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，整理得

$2k^4-23k^2+38=0$，

解得$k^2=2,k^2=\frac{19}{2}$，（满足$k^2>\frac{3}{2}$）

所以$k=\pm\sqrt{2}$，或$k=\pm\frac{\sqrt{38}}{2}$.

【点睛】本题运算量较大，对于用“根与系数的关系”解决问题是个老套路，但本题对于面积的处理有一定的技巧，平常注意对此类题型的训练.

21. 已知数集$A=\left\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right\}\left(1=a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geq 2\right)$具有性质 P：对任意的

$k(2\leq k\leq n),\exists i,j(1\leq i\leq j\leq n)$，使得$a_k=a_i+a_j$成立.

（1）分别判断数集$\{1,3,5\}$与$\{1,2,3,6\}$是否具有性质 P，并说明理由；

（2）已知$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，求证：$2a_n-1\leq S_n$；

（3）若$a_n=36$，求数集 A 中所有元素的和的最小值.

【答案】（1）$\{1,3,5\}$不具有性质 P，$\{1,2,3,6\}$具有性质 P，理由见解析；

（2）证明见解析；　（3）75.

【解析】

【分析】(1)对于$\{1,3,5\}$，$3\neq 1+1$，故可判断它不具有性质 P；对于$\{1,2,3,6\}$可逐项验证 2、3、6 均满足对任意的$k(2\leq k\leq n),\exists i,j(1\leq i\leq j\leq n)$，使得$a_k=a_i+a_j$成立，故可判断它具有性质 P；

(2)根据题意可知$a_i\leq a_{k-1},a_j\leq a_{k-1}$，从而$a_k=a_i+a_j\leq 2a_{k-1}$，故而可得

$a_n\leq 2a_{n-1},a_{n-1}\leq 2a_{n-2},a_{n-2}\leq 2a_{n-3},\ldots,a_3\leq 2a_2,a_2\leq 2a_1$，将这些式子累加即可得$a_n\leq 2a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$，从而可变形为要证的结论；

(3)根据题中已知条件可得该数集$a_1=1$，$a_2=2a_1=2$，从而可得该数集元素均为整数，再根据$a_n=36$可构造一个满足性质 P 的数集$A=\{1,2,3,6,9,18,36\}$或$A=\{1,2,4,5,9,18,36\}$，这两个数集元素之和为 75，证明 75 是最小值即可.

【小问 1 详解】

$\because 3\neq 1+1$，$\therefore\{1,3,5\}$不具有性质 P；

$\because 2=1\times 2,3=1+2,6=3+3$，$\therefore\{1,2,3,6\}$具有性质 P；

【小问 2 详解】

$\because$集合$A=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}$具有性质 P：

即对任意的$k(2\le k\le n),\exists i,j(1\le i\le j\le n)$，使得$a_k=a_i+a_j$成立，

又$\because 1=a_1<a_2<\ldots<a_n,n\ge 2$，

$\therefore a_i\le a_{k-1},a_j\le a_{k-1}$，$\therefore a_k=a_i+a_j\le 2a_{k-1}$，

即$a_n\le 2a_{n-1},a_{n-1}\le 2a_{n-2},a_{n-2}\le 2a_{n-3},\ldots,a_3\le 2a_2,a_2\le 2a_1$，

将上述不等式相加得$a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n\le 2\left(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}\right)$，

$\therefore a_n\le 2a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$，由于$a_1=1$，

$\therefore a_n-1\le a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$，$\therefore 2a_n-1\le a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=S_n$；

【小问 3 详解】

最小值为 75.

首先注意到$a_1=1$，根据性质 P，得到$a_2=2a_1=2$，

$\therefore$易知数集 A 的元素都是整数.

构造$A=\{1,2,3,6,9,18,36\}$或者$A=\{1,2,4,5,9,18,36\}$，

这两个集合具有性质 P，此时元素和为 75.

下面，证明 75 是最小的和：

假设数集$A=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}\left(a_1<a_2<\ldots<a_n,n\ge 2\right)$，满足$S=\sum_{i=1}^{n}a_i\le 75$(存在性显然，$\because$满足$S=\sum_{i=1}^{n}a_i\le 75$的数集 A 只有有限个).

第一步：首先说明集合$A=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}\left(a_1<a_2<\ldots<a_n,n\ge 2\right)$中至少有 7 个元素：

由(2)可知$a_2\le 2a_1,a_3\leqslant 2a_2$，…

又$a_1=1$，$\therefore a_2\le 2,a_3\le 4,a_4\le 8,a_5\le 16,a_6\le 32<36$；

$\therefore n\ge 7$；

第二步：证明$a_{n-1}=18,a_{n-2}=9$；

若$18\in A$，设$a_t=18$，$\because a_n=36=18+18$，为了使得$S=\sum_{i=1}^{n}a_i$最小，在集合 A 中一定不含有元素a_k，使得$18<a_k<36$，从而$a_{n-1}=18$；

假设$18\notin A$，根据性质 P，对$a_n=36$，有a_i,a_j，使得$a_n=36=a_i+a_j$，

显然$a_i\ne a_j$，$\therefore a_n+a_i+a_j=36+36=72$，

而此时集合 A 中至少还有 4 个不同于a_n,a_i,a_j的元素，

从而$S>\left(a_n+a_i+a_j\right)+4a_1=76$，矛盾，

$\therefore 18\in A$，进而$a_t=18$，且$a_{n-1}=18$；

同理可证：$a_{n-2}=9$；

(同理可以证明：若$9\in A$，则$a_{n-2}=9$).

假设$9\notin A$.

$\because a_{n-1}=18$，根据性质 P，有a_i,a_j，使得$a_{n-1}=18=a_i+a_j$，

显然$a_i\neq a_j$，$\therefore a_n+a_{n-1}+a_i+a_j=72$，

而此时集合 A 中至少还有 3 个不同于a_n,a_{n-1},a_i,a_j的元素，

从而$S>a_n+a_{n-1}+a_i+a_j+3a_1=75$，矛盾，

$\therefore 9\in A$，且$a_{n-2}=9$；

至此，我们得到了$a_{n-1}=18,a_{n-2}=9$，

根据性质 P，有a_i,a_j，使得$9=a_i+a_j$，

我们需要考虑如下几种情形：

①$a_i=8,a_j=1$，此时集合中至少还需要一个大于等于 4 的元素a_k，才能得到元素 8，

则$S>76$；

②$a_i=7,a_j=2$，此时集合中至少还需要一个大于 4 的元素a_k，才能得到元素 7，则$S>76$；

③$a_i=6,a_j=3$，此时集合$A=\{1,2,3,6,9,18,36\}$的和最小，为 75；

④$a_i=5,a_j=4$，此时集合$A=\{1,2,4,5,9,18,36\}$的和最小，为 75.

【点睛】本题第二问考察对题设条件的理解，根据数集要满足性质 P，得到其元素之间应该满足的大小关系，利用数列的累加法思想即可得数集的“前 n 项和”的范围；本题第三问采用枚举法即可证明，根据题设信息不断地确定数集 A 中的具体元素，将抽象问题具体化，从而证明出结论，过程中需用反证法证明猜想.