2022 北京丰台高三二模

数　　学

2022．04

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，则复数 $\overline{z}=$（　）

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $1+2\mathrm{i}$

2. “$x>1$”是“$x^2>1$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y=2\cos^2 x-1$ 是（　）

A. 最小正周期为 π　奇函数　　B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 2π 的奇函数　　D. 最小正周期为 2π 的偶函数

4. 在 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为

A. -240　　B. -60　　C. 60　　D. 240

5. 已知两条不同的直线 l，m 与两个不同的平面 α，β，则下列结论中正确的是（　）

A. 若 $l\parallel\alpha$，$m\perp l$，则 $m\perp\alpha$　　B. 若 $l\perp\alpha$，$l\parallel\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 $m\perp\alpha$，$l\perp m$，则 $l\parallel\alpha$　　D. 若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则 $l\parallel\beta$

6. 小王每天在 6：30 至 6：50 出发去上班，其中在 6：30 至 6：40 出发的概率为 0.3，在该时间段出发上班迟到的概率为 0.1；在 6：40 至 6：50 出发的概率为 0.7，在该时间段出发上班迟到的概率为 0.2，则小王某天在 6：30 至 6：50 出发上班迟到的概率为（　）

A. 0.13　　B. 0.17　　C. 0.21　　D. 0.3

7. 已知 $a=3^{0.5}$，$b=\log_3 2$，$c=\tan\frac{2\pi}{3}$，则（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $S_2<S_3<0$，则下列结论中正确的是（　）

A. $a_3<0$　　B. $a_2-a_1<0$

C. $a_2+a_3<0$　　D. $a_4>\sqrt{a_3\cdot a_5}$

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减．若 $f(\lg x)>f(1)$，则 x 的取值范围是（　）

A. $\left(\frac{1}{10},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{10},10\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$

10. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，左、右焦点分别为 F_1，F_2．以线段 A_1A_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 M，且点 M 在第一象限，A_2M 与另一条渐近线平行．若 $|F_1M|=\sqrt{21}$，则 $\triangle MA_2F_2$ 的面积是（　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

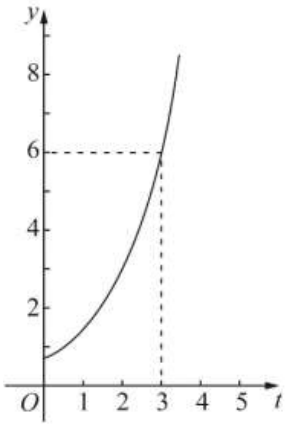
11. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(6,m)$．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$_____.

12. 已知抛物线 C：$x^2=8y$，则抛物线 C 的准线方程为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$A=2B$，则 $\cos B=$_____.

14. 在平面直角坐标系中，已知点 $M(2,-2)$，动点 N 满足 $|NM|=1$，记 d 为点 N 到直线 l：$x+my+1-2m=0$ 的距离．当 m 变化时，直线 l 所过定点的坐标为_____；d 的最大值为_____.

15. 如图，某荷塘里浮萍的面积 y（单位：m^2）与时间 t（单位：月）满足关系式：$y=a^t\ln a$（a 为常数），记 $y=f(t)$（$t\geq 0$）．给出下列四个结论：



①设 $a_n=f(n)\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

②存在唯一的实数 $t_0\in(1,2)$，使得 $f(2)-f(1)=f'(t_0)$ 成立，其中 $f'(t)$ 是 $f(t)$ 的导函数；

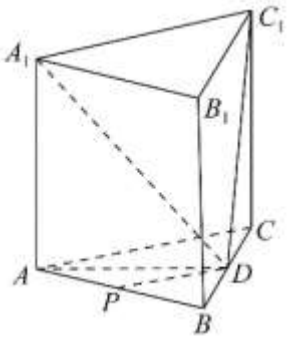
③常数 $a\in(1,2)$；

④记浮萍蔓延到 $2\mathrm{m}^2$，$3\mathrm{m}^2$，$6\mathrm{m}^2$ 所经过　时间分别为 t_1，t_2，t_3，则 $t_1+t_2>t_3$．

其中所有正确结论　序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB$，D 为 BC 的中点，平面 $A_1C_1D\cap$ 平面 $ABC=DP$．



（1）求证：$A_1C_1 \parallel DP$；

（2）求平面 A_1C_1D 与平面 AA_1D 夹角的余弦值.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n. 若对任意 $n \in N^*$，不等式 $T_n < m$ 恒成立，求 m 的最小值.

条件①：$a_1 = 1$ 且 $a_n - 2a_{n-1} = 0\left(n \geq 2\right)$；

条件②：$S_n = 2^n - 1$；

条件③：$2a_n - S_n = 1$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 某商家为了促销，规定每位消费者均可免费参加一次抽奖活动，活动规则如下：在一不透明纸箱中有 8 张相同的卡片，其中 4 张卡片上印有“幸”字，另外 4 张卡片上印有“运”字. 消费者从该纸箱中不放回地随机抽取 4 张卡片，若抽到的 4 张卡片上都印有同一个字，则获得一张 10 元代金券；若抽到的 4 张卡片中恰有 3 张卡片上印有同一个字，则获得一张 5 元代金券；若抽到的 4 张卡片是其他情况，则不获得任何奖励.

（1）求某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片上都印有“幸”字的概率；

（2）记随机变量 X 为某位消费者在一次抽奖活动中获得代金券　金额数，求 X 的分布列和数学期望 $E\left(X\right)$；

（3）该商家规定，消费者若想再次参加该项抽奖活动，则每抽奖一次需支付 3 元. 若你　消费者，是否愿意再次参加该项抽奖活动？请说明理由.

19. 已知函数 $f\left(x\right) = \dfrac{ax+1}{e^x}$.

（1）当 $a = 1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间和极值；

（2）当 $a \geq 1$ 时，求证：$f\left(x\right) \leq \left(a-1\right)x + 1$；

（3）直接写出 a 的一个取值范围，使得 $f(x) \geq ax^2 + \left(a-1\right)x + 1$ 恒成立.

20. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$ 经过点 $P\left(2,1\right)$，P 到椭圆 C 的两个焦点的距离和为 $4\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设$Q(4,0)$，R为PQ的中点，作PQ的平行线l与椭圆C交于不同的两点A，B，直线AQ与椭圆C交于另一点M，直线BQ与椭圆C交于另一点N，求证：M，N，R三点共线．

21. 设$I_1=[a_1,b_1]$，$I_2=[a_2,b_2]$，…，$I_n=[a_n,b_n]$，$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$，是$n+1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$个互不相同的闭区间，若存在实数$x_0$使得$x_0\in I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$，则称这$n+1$个闭区间为聚合区间，$x_0$为该聚合区间的聚合点．

（1）已知$I_1=[1,3]$，$I_2=[-2,\sin t]\left(0<t<\pi\right)$为聚合区间，求$t$的值；

（2）已知$I_1=[a_1,b_1]$，$I_1=[a_2,b_2]$，…，$I_n=[a_n,b_n]$，$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$为聚合区间．

（i）设x_0，y_0是该聚合区间的两个不同的聚合点．求证：存在k，$j\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，使得$\left[a_k,b_j\right]\subseteq I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$；

（ii）若对任意p，q（$p\neq q$且p，$q\in\{1,2,\ldots,n+1\}$），都有I_p，I_q互不包含．求证：存在不同的i，$j\in\{1,2,\cdots,\ n+1\}$，使得$b_i-a_j\geq\dfrac{n-1}{n}\left(b_i-a_i\right)$．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，则复数 $\overline{z}=$（　）

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $1+2\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

分析】

根据复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，可直接求得复数 z，再利用共轭复数的概念求解.

【详解】由复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，

可得 $z=2+i$，

故 $\overline{z}=2-i$，

故选：A.

2. “$x>1$”是“$x^2>1$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】直接利用充分条件和必要条件的判断方法，判断即可得出答案.

【详解】解：因为“$x>1$”能推出“$x^2>1$”，

而“$x^2>1$”推不出“$x>1$”，

所以“$x>1$”是“$x^2>1$”的充分不必要条件.

故选：A.

3. 函数 $y=2\cos^2 x-1$ 是（　）

A. 最小正周期为 π 的奇函数　　B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 2π 的奇函数　　D. 最小正周期为 2π 的偶函数

【答案】B

【解析】

【分析】由倍角公式可得 $2\cos^2 x-1=\cos 2x$，可求周期；再由 $\cos(-2x)=\cos 2x$ 可得奇偶性.

【详解】由倍角公式可得 $y=2\cos^2 x-1=\cos 2x$，所以周期为 π.

又 $\because \cos(-2x)=\cos 2x, \therefore y=2\cos^2 x-1$ 是偶函数.

故选：B.

【点睛】本题考查倍角公式的逆用和函数的奇偶性，属于基础题.

4. 在 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为

A. -240　　B. -60　　C. 60　　D. 240

【答案】D

【解析】

【分析】

写出$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$展开式的通项，整理后令$x$的指数为0，得到项数，然后计算出常数项，得到答案.

【详解】$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$的二项展开式的通项为

$$T_{r+1}=C_6^r\left(x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=C_6^r\left(-2\right)^r x^{12-3r}$$

其常数项为，令$12-3r=0$得$r=4$

即$T_5=C_6^4\left(-2\right)^4=240$

故选D项.

【点睛】本题考查二项展开式的通项，求二项展开式中的常数项，属于简单题.

5. 已知两条不同的直线l，m与两个不同的平面α，β，则下列结论中正确的是（　）

A. 若$l\parallel\alpha$，$m\perp l$，则$m\perp\alpha$　　B. 若$l\perp\alpha$，$l\parallel\beta$，则$\alpha\perp\beta$

C. 若$m\perp\alpha$，$l\perp m$，则$l\parallel\alpha$　　D. 若$\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则$l\parallel\beta$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间中线面、面面的判定定理与性质定理一一判断即可；

【详解】解：由两条不同的直线l，m与两个不同的平面α，β，知：

对于A，若$l//\alpha$，$l\perp m$，则m与α平行或$m\subset\alpha$或m与α相交或$m\perp\alpha$，故A错误；

对于B，若$l\perp\alpha$，$l//\beta$，则由面面垂直的判定定理得$\alpha\perp\beta$，故B正确；

对于C，若$m\perp\alpha$，$l\perp m$，则$l//\alpha$或$l\subset\alpha$，故C错误；

对于D，若$\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则$l//\beta$或$l\subset\beta$，故D错误.

故选：B.

6. 小王每天在6：30至6：50出发去上班，其中在6：30至6：40出发的概率为0.3，在该时间段出发上班迟到的概率为0.1；在6：40至6：50出发的概率为0.7，在该时间段出发上班迟到的概率为0.2，则小王某天在6：30至6：50出发上班迟到的概率为（　）

A. 0.13　　B. 0.17　　C. 0.21　　D. 0.3

【答案】B

【解析】

【分析】根据全概率公式计算即可得解.

【详解】解：由题意在6：30至6：50出发上班迟到的概率为$0.3\times0.1+0.7\times0.2=0.17$.

故选：B.

7. 已知$a=3^{0.5}$，$b=\log_3 2$，$c=\tan\frac{2\pi}{3}$，则（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指数、对数函数的单调性，将 a，b，c 与 0 或 1 比较，分析即可得答案.

【详解】由题意得$a=3^{0.5}>3^0=1$，$0=\log_3 1<\log_3 2<\log_3 3=1$，所以$0<b<1$，

又$c=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，

所以 $a>b>c$.

故选：A

8. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n．若$S_2<S_3<0$，则下列结论中正确的是（　）

A. $a_3<0$　　B. $a_2-a_1<0$

C. $a_2+a_3<0$　　D. $a_4>\sqrt{a_3\cdot a_5}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据$S_2<S_3<0$，可得$a_3>0$，$a_2<0$，从而可判断 AB，举出反例即可判断 C，根据等差数列的性质结合基本不等式即可判断 D.

【详解】解：因为$S_2<S_3<0$，

所以$S_3-S_2=a_3>0$，故 A 错误；

$S_3=3a_2<0$，所以$a_2<0$，

则公差$d=a_3-a_2=a_2-a_1>0$，故 B 错误；

所以等差数列$\{a_n\}$为递增数列，

则$a_4>0,a_5>0$，$a_3\neq a_5$，

则$a_3+a_5>2\sqrt{a_3\cdot a_5}$，

所以$2a_4=a_3+a_5>2\sqrt{a_3\cdot a_5}$，

所以$a_4>\sqrt{a_3\cdot a_5}$，故 D 正确；

对于 C，当$a_1=-3,d=2$时，

$a_2=-1,a_3=1$，$S_2=-4<S_3=-3<0$。

此时$a_2+a_3=0$，故 C 错误.

故选：D.

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减．若 $f(\lg x)>f(1)$，则 x 的取值范围是（　）

A. $\left(\frac{1}{10},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{10},10\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据偶函数的对称性得到 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递增，再根据函数的奇偶性与单调性将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可；

【详解】解：偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递增；

则 $f(\lg x)>f(1)$ 等价于 $|\lg x|<1$，即 $-1<\lg x<1$，

即 $\lg\frac{1}{10}<\lg x<\lg 10$，解得 $\frac{1}{10}<x<10$，即原不等式的解集为 $\left(\frac{1}{10},10\right)$；

故选：C

10. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，左、右焦点分别为 F_1，F_2．以线段 A_1A_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 M，且点 M 在第一象限，A_2M 与另一条渐近线平行．若 $|F_1M|=\sqrt{21}$，则 $\triangle MA_2F_2$ 的面积是（　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】求得以线段 A_1A_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 联立求出点 M 的坐标，根据 A_2M 与另一条渐近线平行可求出 a,b,c 的关系，然后根据 $|F_1M|=\sqrt{21}$，即可求出 a,b,c 的值，从而可得出答案.

【详解】解：由题意 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

则以线段 A_1A_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ y=\frac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{a^2}{c}\\ y=\frac{ab}{c}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{a^2}{c}\\ y=-\frac{ab}{c}\end{cases}$，

又因点 M 在第一象限，所以 $M\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，

因为 A_2M 与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 平行，

所以 $\dfrac{\dfrac{ab}{c}}{\dfrac{a^2}{c}-a}=-\dfrac{b}{a}$，即 $\dfrac{b}{a-c}=-\dfrac{b}{a}$，

所以 $c=2a$，则 $b^2=c^2-a^2=3a^2$，

因为 $\left|F_1M\right|=\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{c}+c\right)^2+\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2}=\sqrt{21}$，

所以 $\sqrt{\left(\dfrac{5a^2}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{21}$，

即 $\dfrac{25a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}=\dfrac{25a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}=21$，

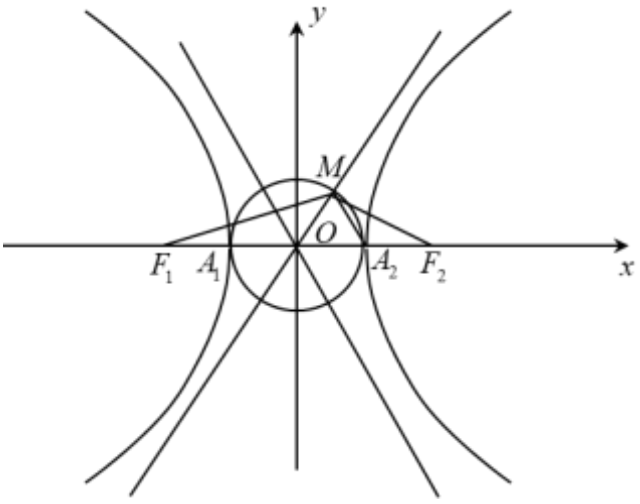
所以 $a^2=3$，

则 $c^2=12, b^2=9$，

所以 $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$A_2\left(\sqrt{3},0\right), F_2\left(2\sqrt{3},0\right)$，

所以 $S_{\triangle MA_2F_2}=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选：C.



第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(6,m)$．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$_____.

【答案】4

【解析】

【分析】依题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，根据向量数量积的坐标表示得到方程，解得即可；

【详解】解：因为 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(6,m)$ 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times6+3\times m=0$，解得$m=4$；

故答案为：4

12. 已知抛物线C：$x^2=8y$，则抛物线C的准线方程为_____.

【答案】$y=-2$

【解析】

【分析】根据抛物线的方程求出p的值，进一步得出答案.

【详解】因为抛物线$C:x^2=8y$，

所以$2p=8$，$\therefore p=4$

所以C的准线方程为$y=-2$.

故答案为：$y=-2$

13. 在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$A=2B$，则$\cos B=$_____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】利用正弦定理结合二倍角的正弦公式即可得解.

【详解】解：在$\triangle ABC$中，

由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

即$\dfrac{2}{\sin 2B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$，即$\dfrac{2}{2\sin B\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$，

所以$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 在平面直角坐标系中，已知点$M(2,-2)$，动点N满足$|NM|=1$，记d为点N到直线l：$x+my+1-2m=0$的距离．当m变化时，直线l所过定点的坐标为_____；d的最大值为_____.

【答案】 ①. $(-1,2)$ ②. 6

【解析】

【分析】对直线方程变形可求出直线l所过定点P的坐标，由题意可得动点N在以$M(2,-2)$为圆心，1为半径为圆上，所以当$MP\perp l$时，点N到直线l的距离最大，最大值为$|MP|+1$

【详解】由$x+my+1-2m=0$，得$x+1+m(y-2)=0$，

则$\begin{cases}x+1=0\\y-2=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，

所以直线l所过定点$P(-1,2)$，

因为点$M\left(2,-2\right)$，动点N满足$\left|NM\right|=1$，

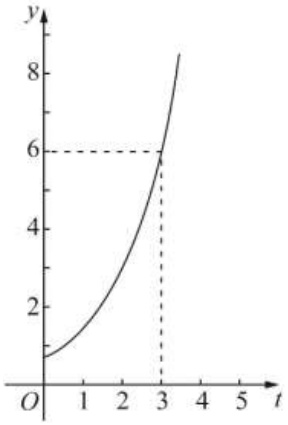
所以动点N在以$M\left(2,-2\right)$为圆心，1为半径为圆上，

所以当$MP\perp l$时，点N到直线l的距离最大，

所以d的最大值为$\left|MP\right|+1=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}+1=6$，

故答案为：$(-1,2)$，6

15. 如图，某荷塘里浮萍的面积y（单位：m^2）与时间t（单位：月）满足关系式：$y=a^t\ln a$（a为常数），记$y=f\left(t\right)$（$t\geq 0$）．给出下列四个结论：



①设$a_n=f\left(n\right)\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，则数列$\left\{a_n\right\}$是等比数列；

②存在唯一的实数$t_0\in\left(1,2\right)$，使得$f\left(2\right)-f\left(1\right)=f'\left(t_0\right)$成立，其中$f'\left(t\right)$是$f\left(t\right)$的导函数；

③常数$a\in\left(1,2\right)$；

④记浮萍蔓延到$2\mathrm{m}^2$，$3\mathrm{m}^2$，$6\mathrm{m}^2$所经过的时间分别为t_1，t_2，t_3，则$t_1+t_2>t_3$．

其中所有正确结论的序号是_____．

【答案】①②④

【解析】

【分析】根据$f\left(0\right)<1$、$f\left(3\right)=6$求出a的取值范围，即可判断③，再根据等比数列的定义判断①，构造函数利用导数说明函数的单调性，再结合零点存在性定理判断②，根据指数对数的关系及对数函数的性质判断④；

【详解】解：依题意$f\left(t\right)=a^t\ln a$，因为$f\left(0\right)=a^0\ln a<1$，所以$0<a<\mathrm{e}$且$a\neq 1$，

又$f\left(3\right)=a^3\ln a=6$，所以$\ln a>0$，所以$1<a<\mathrm{e}$，即$a\in\left(1,\mathrm{e}\right)$，

令$h\left(a\right)=a^3\ln a$，$a\in\left(1,\mathrm{e}\right)$，则$h'\left(a\right)=3a^2\ln a+a^2>0$，

则$h\left(a\right)=a^3\ln a$在$a\in\left(1,\mathrm{e}\right)$上单调递增，又$h\left(2\right)=2^3\ln 2<6$，所以$a\in\left(2,\mathrm{e}\right)$，故③错误；

由已知可得$a_n=f\left(n\right)=a^n\ln a$，则$a_{n+1}=f\left(n+1\right)=a^{n+1}\ln a$，$a_1=f\left(1\right)=a\ln a$，

所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a^{n+1}\ln a}{a^n\ln a}=a$，所以$\left\{a_n\right\}$是以$a\ln a$为首项，$a$为公比的等比数列，故①正确；

令 $f(t)=a^t\ln a$，则 $f'(t)=a^t(\ln a)^2$，$f(2)=a^2\ln a$，$f(1)=a\ln a$，

令 $g(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a$，则 $g'(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^3$，$t_0\in(1,2)$，

因为 $a\in(2,\mathrm{e})$，所以 $g'(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^3>0$，即 $g(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a$，在 $t_0\in(1,2)$ 上单调递增，

因为 $a\in(2,\mathrm{e})$，所以 $\ln a-a<0$，$\ln a-1<0$，$a\ln a>0$，

令 $\varphi(a)=\ln a-a+1$，$a\in(2,\mathrm{e})$，则 $\varphi'(a)=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}<0$，所以 $\varphi(a)=\ln a-a+1$，在 $a\in(2,\mathrm{e})$ 上单调递减，

且 $\varphi(2)=\ln 2-2+1=\ln 2-1<0$，即 $\varphi(a)=\ln a-a+1<0$，

令 $H(a)=a\ln a-a+1$，$a\in(2,\mathrm{e})$，则 $H'(a)=\ln a>0$，所以 $H(a)=a\ln a-a+1$ 在 $a\in(2,\mathrm{e})$ 上单调递增，

又 $H(2)=2\ln 2-2+1=2\ln 2-1>0$，所以 $H(a)=a\ln a-a+1>0$，

所以 $g(1)=a(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a=a\ln a(\ln a-a)+a\ln a=a\ln a(\ln a-a+1)<0$，

$g(2)=a^2(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a=a^2\ln a(\ln a-1)+a\ln a=a\ln a(a\ln a-a+1)>0$，

故存 $t_0\in(1,2)$ 上，$g(t_0)=0$，故②正确；

依题意 $2=a^{t_1}\ln a$、$3=a^{t_2}\ln a$、$6=a^{t_3}\ln a$，所以 $2\times3=a^{t_1}\ln a\times a^{t_2}\ln a=a^{t_1+t_2}(\ln a)^2$，

所以 $a^{t_1+t_2}(\ln a)^2=6$，则 $\dfrac{a^{t_1+t_2}(\ln a)^2}{a^{t_3}\ln a}=1$，即 $a^{t_1+t_2-t_3}\ln a=1$，

所以 $t_1+t_2-t_3=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}$，

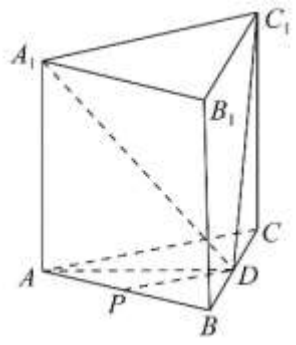
因为 $a\in(2,\mathrm{e})$，所以 $\ln 2<\ln a<1$，所以 $1<\dfrac{1}{\ln a}<\dfrac{1}{\ln 2}<2<a$，所以 $0<\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}<1$，

所以 $t_1+t_2-t_3>0$，即 $t_1+t_2>t_3$，故④正确；

故答案为：①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB$，D 为 BC 的中点，平面 $A_1C_1D\cap$ 平面 $ABC=DP$．



（1）求证：$A_1C_1 /\!/ DP$；

（2）求平面A_1C_1D与平面AA_1D夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$

【解析】

【分析】（1）利用面面平行证明线线平行；

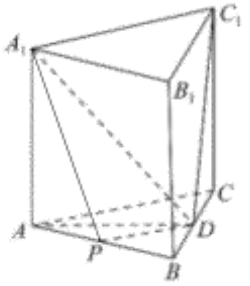
（2）建立空间直角系，分别求出平面A_1C_1D与平面AA_1D的法向量，利用$\cos<\vec{s},\vec{t}>=\dfrac{\vec{s}\cdot\vec{t}}{|\vec{s}||\vec{t}|}$求出答案.

【小问 1 详解】

连接A_1P，平面ABC // 平面$A_1B_1C_1$，

∵平面$ABC\cap$平面$A_1C_1DP=DP$，平面$A_1B_1C_1\cap$平面$A_1C_1DP=A_1C_1$，

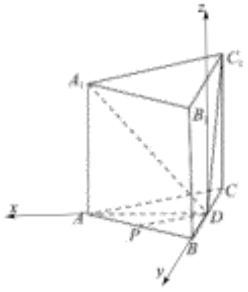
∴A_1C_1 // DP.



【小问 2 详解】

设$AA_1=AB=2m$

以D为坐标原点，AD为x轴，CD为y轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



∴$D(0,0,0)$，$A(\sqrt{3}m,0,0)$，$A_1(\sqrt{3}m,0,2m)$，$C_1(0,-m,2m)$

设平面A_1C_1D的法向量为$\vec{s}=(1,y,z)$

$\overrightarrow{DA_1}=(\sqrt{3}m,0,2m)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,-m,2m)$

联立方程$\begin{cases}\vec{s}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\sqrt{3}m+2mz=0\\ \vec{s}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-ym+2mz=0\end{cases}$

解得：$y=-\sqrt{3}$，$z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \vec{s}=(1,-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

同理求得平面 AA_1D 的法向量 $\vec{t}=(0,-1,0)$

$\therefore \cos<\vec{s},\vec{t}>=\frac{\vec{s}\cdot\vec{t}}{|\vec{s}||\vec{t}|}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$

平面 A_1C_1D 与平面 AA_1D 夹角的余弦值的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n．若对任意 $n\in N^*$，不等式 $T_n<m$ 恒成立，求 m 的最小值.

条件①：$a_1=1$ 且 $a_n-2a_{n-1}=0(n\geq 2)$；

条件②：$S_n=2^n-1$；

条件③：$2a_n-S_n=1$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1）$a_n=2^{n-1}$

（2）2

【解析】

【分析】（1）选条件①：由等比数列通项公式直接可得；选条件②：利用 a_n 与 S_n 的关系可得；选条件③：先由 a_n 与 S_n 的关系先得递推公式，然后由等比数列通项公式直接可得.

（2）由等比数列求和公式求和后可得.

【小问 1 详解】

选条件①：因为 $a_1=1$，且 $a_n-2a_{n-1}=0(n\geq 2)$，即 $a_n=2a_{n-1}$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列

所以 $a_n=2^{n-1}$.

选条件②：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

因为当 $n=1$ 时，上式也成立，

所以 $a_n=2^{n-1}$.

选条件③：因为 $2a_n-S_n=1$，得 $S_n=2a_n-1$

当 $n=1$ 时，$2a_1-S_1=1$，得 $a_1=1$

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)=2a_n-2a_{n-1}$

整理得$a_n=2a_{n-1}$

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比　等比数列

所以$a_n=2^{n-1}$.

【小问2详解】

由（1）知，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$，记$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$

因为$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n-2}}}=\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{1}{2^0}=1$

所以$\{b_n\}$是以1为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列

所以$T_n=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$

所以m的最小值为2.

18. 某商家为了促销，规定每位消费者均可免费参加一次抽奖活动，活动规则如下：在一不透明纸箱中有8张相同的卡片，其中4张卡片上印有“幸”字，另外4张卡片上印有“运”字．消费者从该纸箱中不放回地随机抽取4张卡片，若抽到的4张卡片上都印有同一个字，则获得一张10元代金券；若抽到的4张卡片中恰有3张卡片上印有同一个字，则获得一张5元代金券；若抽到的4张卡片是其他情况，则不获得任何奖励．

（1）求某位消费者在一次抽奖活动中抽到的4张卡片上都印有“幸”字的概率；

（2）记随机变量X为某位消费者在一次抽奖活动中获得代金券的金额数，求X的分布列和数学期望$E(X)$；

（3）该商家规定，消费者若想再次参加该项抽奖活动，则每抽奖一次需支付3元．若你是消费者，是否愿意再次参加该项抽奖活动？请说明理由．

【答案】（1）$\frac{1}{70}$

（2）分布列见解析，$E(X)=\frac{18}{7}$

（3）不愿意，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据古典概型的概率公式计算可得；

（2）依题意X的可能取值为0、5、10，求出所对应的概率，列出分布列，即可求出数学期望；

（3）记随机变量Y为消费者在一次抽奖活动中的收益，则$Y=X-3$，根据期望的性质求出$E(Y)$，即可判断；

【小问1详解】

解：记“某位消费者在一次抽奖活动中抽到　4张卡片上都印有“幸”字”为事件A，

则 $P(A)=\dfrac{1}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$，所以某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片上都印有“幸”字的概率为 $\dfrac{1}{70}$；

【小问 2 详解】

解：依题意随机变量 X 的所有可能取值为 0 、 5 、 10；

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^2\cdot C_4^2}{C_8^4}=\dfrac{18}{35}$，

$P(X=5)=\dfrac{C_4^3\cdot C_4^1+C_4^3\cdot C_4^1}{C_8^4}=\dfrac{16}{35}$，

$P(X=10)=\dfrac{C_4^4\cdot C_4^0+C_4^0\cdot C_4^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{35}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	5	10
P	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{16}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

所以 $E(X)=10\times\dfrac{1}{35}+5\times\dfrac{16}{35}+0\times\dfrac{18}{35}=\dfrac{18}{7}$

【小问 3 详解】

解：记随机变量 Y 为消费者在一次抽奖活动中的收益，则 $Y=X-3$，

所以 $E(Y)=E(X-3)=E(X)-3=\dfrac{18}{7}-3=-\dfrac{3}{7}<0$，

所以我不愿意再次参加该项抽奖活动；

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{e^x}$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）当 $a\geq 1$ 时，求证： $f(x)\leq(a-1)x+1$；

（3）直接写出 a 的一个取值范围，使得 $f(x)\geq ax^2+(a-1)x+1$ 恒成立.

【答案】（1） $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$，在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 1；

（2）证明见解析； （3）答案不唯一，见解析.

【解析】

【分析】（1）求导判断函数的单调性，进而可求出极值；

（2）构造函数 $g(x)=\dfrac{ax+1}{e^x}-(a-1)x-1$，求出函数的最大值即可得出结论；

（3）将 $f(x)\geq ax^2+(a-1)x+1$ 变形为 $ax\left(xe^x+e^x-1\right)\leq xe^x-e^x+1$，分别证得 $x\left(xe^x+e^x-1\right)$ 与 xe^x-e^x+1 恒非负，即可得出结论.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x}{e^x}$，

令 $f'(x)=0$，即 $x=0$，

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，$f(0)=\dfrac{0+1}{e^0}=1$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$，在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 1；

【小问 2 详解】

要证 $f(x)\le(a-1)x+1$，即证 $\dfrac{ax+1}{e^x}-(a-1)x-1\le 0$，

因此设 $g(x)=\dfrac{ax+1}{e^x}-(a-1)x-1$，则 $g'(x)=\dfrac{a-ax-1}{e^x}-(a-1)=\dfrac{a-ax-1-(a-1)e^x}{e^x}$，

令 $m(x)=a-ax-1-(a-1)e^x$，则 $m'(x)=-a-(a-1)e^x$，

因为 $a\ge 1$，所以 $m'(x)=-a-(a-1)e^x\le 0$，因此 $m(x)$ 单调递减，且 $m(0)=a-1-(a-1)e^0=0$，所以 $x\in(-\infty,0)$ 时，$m(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m(x)<0$；即 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$；所以 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值也是最大值，且 $g(0)=\dfrac{1}{e^0}-1=0$，故 $\dfrac{ax+1}{e^x}-(a-1)x-1\le 0$.

【小问 3 详解】

要证 $f(x)\ge ax^2+(a-1)x+1$，即证 $\dfrac{ax+1}{e^x}\ge ax^2+(a-1)x+1$，

也即是 $ax+1\ge ax^2e^x+(a-1)xe^x+e^x$，即证 $ax\left(xe^x+e^x-1\right)\le xe^x-e^x+1$，

令 $G(x)=xe^x-e^x+1$，则 $G'(x)=xe^x$，

当 $x>0$ 时，$G'(x)>0$，即 $G(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$G'(x)<0$，即 $G(x)$ 单调递减；所以 $G(x)_{\min}=G(0)=0$，故 $xe^x-e^x+1\ge 0$，

令 $H(x)=x\left(xe^x+e^x-1\right)=x^2e^x+xe^x-x$，

则 $H'(x)=\left(x^2+3x+1\right)e^x-1$

令 $M(x)=\left(x^2+3x+1\right)e^x-1$，则 $M'(x)=\left(x^2+5x+4\right)e^x$，

$M'(x)=0$，则 $x_1=-4,x_2=-1$

所以$x<-4$和$x>-1$时，$M'(x)>0$，则$M(x)$单调递增，$-4<x<-1$时，$M'(x)<0$，则$M(x)$单调递减，且

$M(-4)=5e^{-4}-1<0$，$M(-1)=-e^{-1}-1<0$，$M(0)=e^{0}-1=0$，

因此$x<0$时，$M(x)<0$，即$H'(x)=(x^2+3x+1)e^x-1<0$，所以$H(x)$单调递减，

$x>0$时，$M(x)>0$，即$H'(x)=(x^2+3x+1)e^x-1>0$，所以$H(x)$单调递增，

所以$H(x)_{\min}=H(0)=0$，即$x(xe^x+e^x-1)\geq 0$

因此当$a\leq 0$时，$f(x)\geq ax^2+(a-1)x+1$恒成立.

【点睛】恒成立问题解题思路：

（1）参变量分离；

（2）构造函数：①构造函数，研究函数的单调性，求出函数的最值，解不等式即可；②构造函数后，研究函数单调性，利用单调性解不等式，转化之后参数分离即可解决问题.

20. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$P(2,1)$，$P$ 到椭圆 C 的两个焦点的距离和为$4\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设$Q(4,0)$，R 为 PQ 中点，作 PQ 的平行线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A，B，直线 AQ 与椭圆 C 交于另一点 M，直线 BQ 与椭圆 C 交于另一点 N，求证：M，N，R 三点共线.

【答案】（1）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据椭圆定义，可求得 a 值，将 P 点坐标代入，即可求得b^2，即可得答案.

（2）由题意可得 R 点坐标和直线 PQ 的斜率，即可设直线 l 的方程为$y=-\frac{1}{2}x+m$，

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_m,y_m),N(x_n,y_n)$，可得直线 AQ 的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-4}(x-4)$，与椭圆联立，即可求得

y_m,x_m 表达式，同理可得 y_n,x_n 表达式，即可求导直线 MN 的斜率，再求得直线 MR 的斜率，分析即可得证.

【小问 1 详解】

根据椭圆的定义可得$2a=4\sqrt{2}$，解得$a=2\sqrt{2}$，

又过点$P(2,1)$，所以$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得$b^2=2$，

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

【小问 2 详解】

因为$P(2,1)$，$Q(4,0)$，

所以 $R\left(3,\frac{1}{2}\right)$，$k_{PQ}=\frac{1-0}{2-4}=-\frac{1}{2}$，

设直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_m,y_m),N(x_n,y_n)$，

所以 $k_{AQ}=\frac{y_1}{x_1-4},k_{BQ}=\frac{y_2}{x_2-4}$，

所以直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-4}(x-4)$，直线 BQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-4}(x-4)$，

联立直线 AQ 与椭圆 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1-4}(x-4)\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 x 可得 $\left[\left(\frac{x_1-4}{y_1}\right)^2+4\right]y^2+\frac{8(x_1-4)}{y_1}y+8=0$，

所以 $y_1+y_m=-\frac{\frac{8(x_1-4)}{y_1}}{\left(\frac{x_1-4}{y_1}\right)^2+4}$，又 $\frac{x_1^{\,2}}{8}+\frac{y_1^{\,2}}{2}=1$ 代入，

整理可得 $y_m=\frac{8(x_1-4)y_1}{24-8x_1}-y_1=\frac{y_1}{3-x_1}$，代入直线 AQ，可得 $x_m=\frac{8-3x_1}{3-x_1}$

同理可得 $y_n=\frac{y_2}{3-x_2}$，$x_n=\frac{8-3x_2}{3-x_2}$，

所以 $k_{MN}=\frac{\frac{y_2}{3-x_2}-\frac{y_1}{3-x_1}}{\frac{8-3x_2}{3-x_2}-\frac{8-3x_1}{3-x_1}}=\frac{3(y_1-y_2)+x_1y_2-x_2y_1}{x_2-x_1}=\frac{3}{2}+\frac{x_1\left(-\frac{1}{2}x_2+m\right)-x_2\left(-\frac{1}{2}x_1+m\right)}{x_2-x_1}=\frac{3}{2}-m$

又 $k_{MR}=\frac{y_m-\frac{1}{2}}{x_m-3}=\frac{\frac{y_1}{3-x_1}-\frac{1}{2}}{\frac{8-3x_1}{3-x_1}-3}=\frac{\left(-\frac{1}{2}x_1+m\right)-\frac{1}{2}(3-x_1)}{8-3x_1-3(3-x_1)}=\frac{3}{2}-m=k_{MN}$，

所以 M，N，R 三点共线

21. 设 $I_1=[a_1,b_1]$，$I_2=[a_2,b_2]$，…，$I_n=[a_n,b_n]$，$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$，是 $n+1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$ 个互不相同的闭区间，若存在实数 x_0 使得 $x_0\in I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$，则称这 $n+1$ 个闭区间为聚合区间，x_0 为该聚合区间的聚合点.

（1）已知 $I_1=[1,3]$，$I_2=[-2,\sin t]\left(0<t<\pi\right)$ 为聚合区间，求 t 的值；

（2）已知 $I_1=[a_1,b_1]$，$I_1=[a_2,b_2]$，…，$I_n=[a_n,b_n]$，$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$ 为聚合区间.

（i）设 x_0，y_0 是该聚合区间的两个不同的聚合点．求证：存在 k，$j\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，使得

$\left[a_k,b_j\right]\subseteq I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$；

（ii）若对任意 p，q（ $p \neq q$ 且 p， $q \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ ），都有 I_p， I_q 互不包含．求证：存在不同的 i，$j \in \{1,2,\cdots,\ n+1\}$，使得 $b_i - a_j \geq \dfrac{n-1}{n}(b_i - a_i)$．

【答案】（1）$t = \dfrac{\pi}{2}$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意可得当且仅当 $\sin t = 1$ 时成立即可得 $t = \dfrac{\pi}{2}$；

（2）（i）设 $x_0 < y_0$，根据区间端点的大小关系证明所有区间都包含 $[x_0, y_0]$ 即可；

（ii）先分析可得 $n+1$ 个互不相同的集合的区间端点的大小关系，再设 $a_1 < a_2 < \ldots a_{n+1}$，再根据区间端点的最小距离为 l，累加即可证明 $b_i - a_j \geq \dfrac{n-1}{n}(b_i - a_i)$

【小问 1 详解】

由 $0 < t < \pi$ 可得 $0 < \sin t \leq 1$，又 I_1， I_2 为聚合区间，由定义可得 $I_1 \bigcap I_2 \neq \varnothing$，故当且仅当 $\sin t = 1$ 时成立，故 $t = \dfrac{\pi}{2}$

【小问 2 详解】

（i）由 x_0， y_0 是该聚合区间的两个不同的聚合点，不妨设 $x_0 < y_0$，因为 $x_0 \in I_i\ (i = 1,2,\ldots,n+1)$，故 $a_1, a_2 \ldots a_{n+1} \leq x_0$，又 $y_0 \in I_i\ (i = 1,2,\ldots,n+1)$，故 $y_0 \leq b_1, b_2 \ldots b_{n+1}$，不妨设 $a_1, a_2 \ldots a_{n+1}$ 中的最大值为 a_k，$b_1, b_2 \ldots b_{n+1}$ 中最小值为 b_j，则 $a_1, a_2 \ldots a_{n+1} \leq a_k \leq x_0 < y_0 \leq b_j \leq b_1, b_2 \ldots b_{n+1}$，即 $a_1, a_2 \ldots a_{n+1} \leq a_k < b_j \leq b_1, b_2 \ldots b_{n+1}$，故存在区间 $[a_k, b_j] \subseteq I_i\ (i = 1,2,\ldots,n+1)$

（ii）若存在 $a_s = a_t\ (s \neq t)$，则 $I_s \subseteq I_t$ 或 $I_t \subseteq I_s$，与已知条件矛盾

不妨设 $a_1 < a_2 < \ldots a_{n+1}$，则 $b_k < b_{k+1}\ (k = 1,2,\ldots n)$

否则，若 $b_k \geq b_{k+1}$，则 $I_{k+1} \subseteq I_k$，与已知条件矛盾

取 $l = \min\{a_2 - a_1, a_3 - a_2 \ldots a_{n+1} - a_n, b_2 - b_1, b_3 - b_2 \ldots b_{n+1} - b_n\}$，设 $m \in \{1,2,\cdots,\ n+1\}$

当 $a_{m+1} - a_m = l$ 时，$b_m - b_1 = (b_m - b_{m-1}) + \ldots (b_2 - b_1) \geq (m-1)l$，

$a_{n+1} - a_m = (a_{n+1} - a_n) + \ldots (a_{m+1} - a_m) \geq (n - m + 1)l$

又 $b_1 > a_{n+1}$，所以 $a_{n+1} - b_1 < 0$，所以 $b_m - a_m \geq (b_m - b_1) + (a_{n+1} - a_m) \geq nl$，

即 $a_{m+1} - a_m \leq \dfrac{b_m - a_m}{n}$，所以 $b_m - a_{m+1} = b_m - a_m - (a_{m+1} - a_m) \geq \dfrac{n-1}{n}(b_m - a_m)$，

此时取 $i = m,\ j = m+1$，则 $b_i - a_j \geq \dfrac{n-1}{n}(b_i - a_i)$，

当$b_{m+1}-b_m=l$时，同理可取$i=m+1, j=m$，使得$b_i-a_j\geq\frac{n-1}{n}(b_i-a_i)$，

综上，存在不同的i，$j\in\{1,2,\cdots，n+1\}$，使得$b_i-a_j\geq\frac{n-1}{n}(b_i-a_i)$

【点睛】本题主要考查了新定义的集合类证明，可根据题意先画数轴分析题目中区间的关系，再凑出所需证明的不等式即可,属于难题