2022 北京东城高三二模

数　　学

2022.5

第一部分（选择题 共 40 分

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1 已知集合$U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\}$，则$\complement_U A=$（　）

A. $\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-1\le x\le 3\right\}$

C. $\{x\middle|x\le -1$或$x\ge 3\}$　　D. $\{x\middle|x<-1$或$x>3\}$

2. 已知$a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\ln\pi$，$c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

3. 在$(1-2x)^5$的展开式中，第 4 项的系数为（　）

A. -80　　B. 80　　C. -10　　D. 10

4. 将函数$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度后，所得图象对应的函数为（　）

A. $y=\sin 2x$　　B. $y=-\sin 2x$　　C. $y=\cos 2x$　　D. $y=-\cos 2\mathrm{x}$

5.《周髀算经》中对圆周率π有“径一而周三”的记载，已知两周率π小数点后 20 位数字分别为 14159 26535 89793 23846．若从这 20 个数字的前 10 个数字和后 10 个数字中各随机抽取一个数字，则这两个数字均为奇数的概率为（　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{33}{95}$　　C. $\frac{21}{100}$　　D. $\frac{7}{20}$

6. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为$C$右支上一点．若$C$的一条渐近线方程为$3x+4y=0$，则$\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=$（　）

A. $-\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $-\frac{5}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

7. 已知α，$\beta\in\mathbf{R}$则“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”是“$\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的（　）

A 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知点$P(\cos\theta,\sin\theta)$在直线$ax-y+3=0$上．则当θ变化时，实数 a 的范围为（　）

A. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$　　B. $(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$

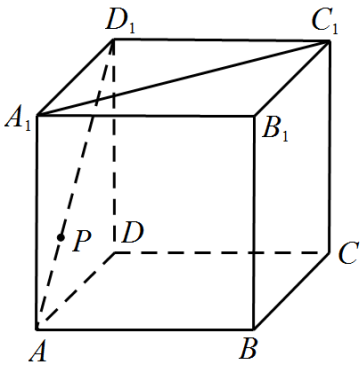
C. $[-3,3]$　　D. $(-\infty,-3]\bigcup[3,+\infty)$

9. 已知等差数列$\{a_n\}$与等比数列$\{b_n\}$的首项均为-3，且$a_3=1$，$a_4=8b_4$，则数列$\{a_nb_n\}$（　）

A. 有最大项，有最小项　　B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项　　D. 无最大项，无最小项

10. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则线段 AD_1 上的动点 P 到直线 A_1C_1 的距离的最小值为（　）



A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

第二部分（非选择题　共 110 分

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$，则 $z=$_____，$|z|=$_____.

12. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且 $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{c}=$_____.

13. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$，P 为 C 上一点，$PQ\perp x$ 轴，垂足为 Q，F 为 C 的焦点，O 为原点．若 $\angle POQ=45°$，则 $\cos\angle PFQ=$_____.

14. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $\frac{f'(x)}{x^2-1}>0$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为_____；满足以上条件的一个函数是_____.

15. 某公司通过统计分析发现，工人工作效率 E 与工作年限 $r(r>0)$，劳累程度 $T(0<T<1)$，劳动动机 $b(1<b<5)$ 相关，并建立了数学模型 $E=10-10T\cdot b^{-0.14r}$.

已知甲、乙为该公司的员工，给出下列四个结论：

①甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作年限长，劳累程度弱，则甲比乙工作效率高；

②甲与乙劳累程度相同，且甲比乙工作年限长，劳动动机高，则甲比乙工作效率高；

③甲与乙工作年限相同，且甲比乙工作效率高，劳动动机低，则甲比乙劳累程度强；

④甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作效率高，工作年限短．则甲比乙劳累程度弱.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B+b\cos A=\sqrt{2}c\cos C$.

（1）求 C；

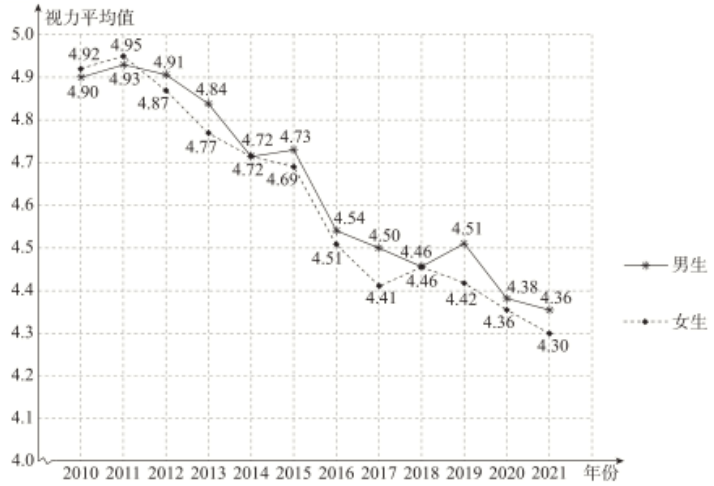
（2）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$存在且唯一确定，求c和$\sin A$的值．

条件①：$a=2\sqrt{2}$，AC边上中线的长为$\sqrt{5}$；

条件②：$b=6$，$\triangle ABC$的面积为6；

条件③：$\cos B=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$AC$边上的高$BD$的长为2．

17. 某部门为了解青少年视力发展状况，从全市体检数据中，随机抽取了100名男生和100名女生的视力数据．分别计算出男生和女生从小学一年级（2010年）到高中三年级（2021年）每年的视力平均值，如图所示．

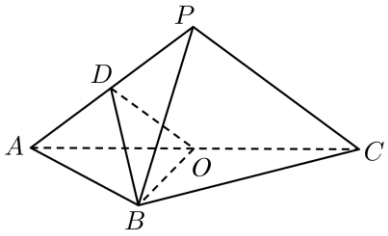


（1）从2011年到2021年中随机选取1年，求该年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值的概率；

（2）从2010年到2021年这12年中随机选取2年，设其中恰有X年女生的视力平均值不低于当年男生的视力平均值．求X的分布列和数学期望；

（3）由图判断，这200名学生的视力平均值从哪年开始连续三年的方差最小？（结论不要求证明）

18. 如图，平面$PAC\perp$平面ABC，$AB\perp BC$，$AB=BC$，D、O分别为PA、AC的中点，$AC=8$，$PA=PC=5$．



（1）设平面$PBC\cap$平面$BOD=l$，判断直线l与PC的位置关系，并证明；

（2）求直线PB与平面BOD所成角的正弦值．

19. 已知函数$f(x)=x+\dfrac{2a^2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$．

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）当$x\in[\mathrm{e},+\infty)$时，曲线$y=f(x)$在x轴的上方，求实数a的取值范围．

20. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(2,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$．过点 $P(6,0)$ 与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别交直线 $x=6$ 于点 M，N.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 O 为原点．求证：$\angle PAN+\angle POM=90°$.

21. 对于数列 $A:a_1$，a_2，…，$a_n(n\geq 3)$，定义变换 T，T 将数列 A 变换成数列 $T(A):a_2$，a_3，…，a_n，a_1，记 $T^1(A)=T(A)$，$T^m(A)=T\left(T^{m-1}(A)\right)$，$m\geq 2$．对于数列 $A:a_1$，a_2，…，a_n 与 $B:b_1$，b_2，…，b_n，定义 $A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$．若数列 $A:a_1$，a_2，…，$a_n(n\geq 3)$ 满足 $a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，则称数列 A 为 $\mathfrak{R}_n$ 数列.

（1）若 $A:-1,-1,1,-1,1,1$，写出 $T(A)$，并求 $A\cdot T^2(A)$；

（2）对于任意给定的正整数 $n(n\geq 3)$，是否存在 $\mathfrak{R}_n$ 数列 A，使得 $A\cdot T(A)=n-3$? 若存在，写出一个数列 A，若不存在，说明理由：

（3）若 $\mathfrak{R}_n$ 数列 A 满足 $T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=n-4(k=1,2,\cdots,n-2)$，求数列 A 的个数.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合$U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\}$，则$\complement_U A=$（　）

A. $\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-1\le x\le 3\right\}$

C. $\{x\mid x\le -1$或$x\ge 3\}$　　D. $\{x\mid x<-1$或$x>3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据补集的定义，结合一元二次不等式的解法进行求解即可.

【详解】因为集合$A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\}=\{x\mid -1<x<3\}$，

所以$\complement_U A=\{x\mid x\le -1$或$x\ge 3\}$.

故选：C.

2. 已知$a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\ln\pi$，$c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】A

【解析】

【分析】根据对数函数的单调性及指数函数的单调性可得结论.

【详解】$a=\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}1=0$，$b=\ln\pi>\ln\mathrm{e}=1$，$0<c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<\mathrm{e}^0=1$，

所以$a<c<b$.

故选：A．

3. 在$(1-2x)^5$的展开式中，第 4 项的系数为（　）

A. -80　　B. 80　　C. -10　　D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】先写出$(1-2x)^5$的展开式的通项公式T_{r+1}，再令$r=3$，即得.

【详解】因为$(1-2x)^5$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r 1^{5-r}\left(-2x\right)^r=\mathrm{C}_5^r\left(-2\right)^r x^r$，

令$r=3$，则展开式中第 4 项的系数为$\mathrm{C}_5^3\left(-2\right)^3=-80$，

故选：A.

4. 将函数$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位长度后，所得图象对应的函数为（　）

A. $y=\sin 2x$　　B. $y=-\sin 2x$　　C. $y=\cos 2x$　　D. $y=-\cos 2\mathrm{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】由三角函数图象平移求解即可.

【详解】由函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，

则所得图象对应的函数为 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$.

故选：B.

5.《周髀算经》中对圆周率 π 有“径一而周三”的记载，已知两周率 π 小数点后 20 位数字分别为 14159 26535 89793 23846．若从这 20 个数字的前 10 个数字和后 10 个数字中各随机抽取一个数字，则这两个数字均为奇数的概率为（　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{33}{95}$　　C. $\frac{21}{100}$　　D. $\frac{7}{20}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用古典概型概率公式即得.

【详解】因为从这 20 个数字的前 10 个数字中有 7 个奇数，后 10 个数字中有 5 个奇数，

所以从这 20 个数字的前 10 个数字和后 10 个数字中各随机抽取一个数字，这两个数字均为奇数的概率为

$P=\frac{7\times 5}{10\times 10}=\frac{7}{20}$.

故选：D.

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 右支上一点．若 C 的一条渐近线方程为 $3x+4y=0$，则 $\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=$（　）

A. $-\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $-\frac{5}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用双曲线的定义可得 $\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=-e$，结合条件可得 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，进而可得 $e=\frac{5}{4}$，即得.

【详解】由题可知 $|F_1F_2|=2c,|PF_2|-|PF_1|=-2a$，$\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=-e$，

因为 C 的一条渐近线方程为 $3x+4y=0$，

所以 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$，

所以 $\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=-\frac{5}{4}$.

故选：C.

7. 已知 α， $\beta\in\mathbf{R}$ 则“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”是“$\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用正弦函数性质得出 α,β 的关系，然后根据充分必要条件的定义判断.

【详解】由 $\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$，

可得 $\alpha+\beta=2\alpha+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$ 或 $\alpha+\beta=\pi-2\alpha+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

即 $\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathrm{Z})$ 或 $\beta=2k\pi+\pi-3\alpha(k\in\mathrm{Z})$，

所以由“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”推不出“$\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”，由“$\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”可推出

“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”，

所以“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”是“$\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的必要不充分条件.

故选：B.

8. 已知点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 在直线 $ax-y+3=0$ 上．则当 θ 变化时，实数 a 的范围为（　）

A. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$　　B. $(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$

C. $[-3,3]$　　D. $(-\infty,-3]\bigcup[3,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】由题可得 $\sin\theta-a\cos\theta=\sqrt{1+a^2}\sin(\theta-\varphi)=3$，然后利用三角函数的性质可得 $\sqrt{1+a^2}\geq 3$，即得.

【详解】∵点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 在直线 $ax-y+3=0$ 上，

∴ $a\cos\theta-\sin\theta+3=0$，

∴ $\sin\theta-a\cos\theta=\sqrt{1+a^2}\sin(\theta-\varphi)=3$，其中 $\tan\varphi=a$，

∵ $\sin(\theta-\varphi)\leq 1$，

∴ $\sqrt{1+a^2}\geq 3$，即 $a^2\geq 8$，

解得 $a\leq -2\sqrt{2}$ 或 $a\geq 2\sqrt{2}$.

故选：B.

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 与等比数列 $\{b_n\}$ 的首项均为−3，且 $a_3=1$， $a_4=8b_4$，则数列 $\{a_nb_n\}$（　）

A. 有最大项，有最小项　　B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项　　D. 无最大项，无最小项

【答案】A

【解析】

【分析】求出等差数列和等比数列的通项公式a_n,b_n，得出a_nb_n，确定数列$\{a_nb_n\}$中奇数项都是负数，偶数项都是正数，然后设$c_n=|a_nb_n|$，用作差法得出$\{c_n\}$的单调性，从而可得数列$\{a_nb_n\}$的最值.

【详解】$a_1=-3$，$a_3=1$，则$d=\frac{1-(-3)}{2}=2$，$a_n=-3+2(n-1)=2n-5$，

$a_4=3=8b_4$，$b_4=\frac{3}{8}$，$q^3=\frac{b_4}{b_1}=-\frac{1}{8}$，$q=-\frac{1}{2}$，$b_n=-3\times(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{(-1)^n\cdot 3}{2^{n-1}}$，

$a_nb_n=\frac{(-1)^n\cdot 3(2n-5)}{2^{n-1}}$，显然奇数项都是负数，偶数项都是正数，

设$c_n=|a_nb_n|=\frac{3(2n-5)}{2^{n-1}}$，

则$c_{n+1}-c_n=\frac{3(2n-3)}{2^n}-\frac{3(2n-5)}{2^{n-1}}=\frac{3(7-2n)}{2^n}$，

$n<3.5$，即$n\le 3$时，$c_{n+1}-c_n>0$，$c_{n+1}>c_n$，

$n\ge 4$时，$c_{n+1}-c_n<0$，$c_{n+1}<c_n$，即数列$\{c_n\}$，从c_1到c_4递增，从c_4往后递减，

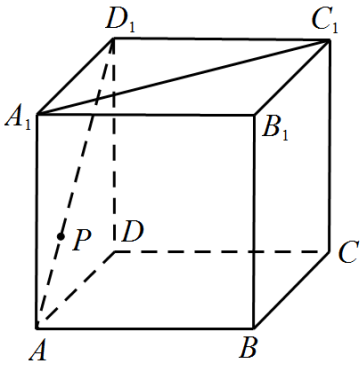
由于$\{a_nb_n\}$中奇数项都是负数，偶数项都是正数，

所以$\{a_nb_n\}$中，a_4b_4最大，

又$c_3=\frac{3}{4}$，$c_5=\frac{15}{16}>\frac{3}{4}$，所以$a_5b_5$是最小项.

故选：A.

10. 如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，则线段AD_1上的动点P到直线A_1C_1的距离的最小值为（　）



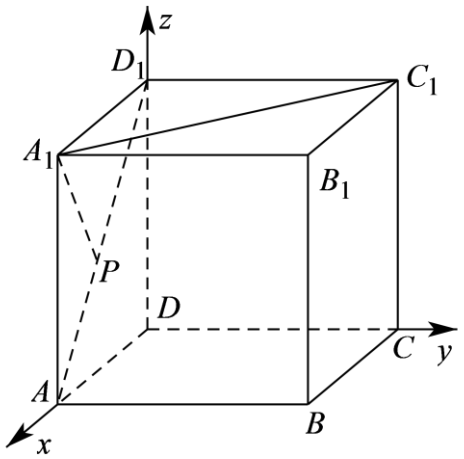
A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用坐标法，设 $P\left(x,0,1-x\right),0\le x\le 1$，可得动点 P 到直线 A_1C_1 的距离为 $d=\sqrt{\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}}$，然后利用二次函数的性质即得.

【详解】如图建立空间直角坐标系，则 $A_1\left(1,0,1\right),C_1\left(0,1,1\right)$，



设 $P\left(x,0,1-x\right),0\le x\le 1$，则 $\overrightarrow{A_1P}=\left(x-1,0,-x\right),\overrightarrow{A_1C_1}=\left(-1,1,0\right)$，

∴动点 P 到直线 A_1C_1 的距离为

$$d=\sqrt{\left|\overrightarrow{A_1P}\right|^2-\left|\frac{\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}}{\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right|}\right|^2}=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(-x\right)^2-\left|\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right|^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$$，当 $x=\frac{1}{3}$ 时取等号，

即线段 AD_1 上的动点 P 到直线 A_1C_1 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：D.

第二部分（非选择题　共 110 分

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$，则 $z=$_____，$|z|=$_____.

【答案】　①. $1+2\mathrm{i}$ ##2i+1　②. $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】利用复数的除法化简得到 $z=1+2\mathrm{i}$，利用复数的模长公式即得.

【详解】∵ $(1-\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$，

∴ $z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2+4\mathrm{i}}{2}=1+2\mathrm{i}$，

$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$1+2\mathrm{i}$；$\sqrt{5}$.

12. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且$|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{c}=$_____.

【答案】-1

【解析】

【分析】利用数量积的定义和运算律直接计算.

【详解】因为$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，所以$\vec{c}=-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

所以$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left[-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=-\vec{a}^{2}-\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.

故答案为：-1.

13. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，P为C上一点，$PQ\perp x$轴，垂足为Q，F为C的焦点，O为原点．若$\angle POQ=45°$，则$\cos\angle PFQ=$_____.

【答案】$\frac{3}{5}$##0.6

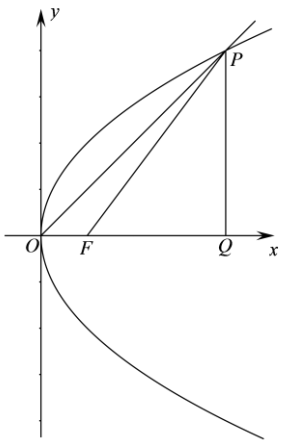
【解析】

【分析】由题可设直线$OP:y=x$，进而可得$P\left(2p,2p\right),Q\left(2p,0\right)$，即得.

【详解】不妨设P在x轴上方，由$\angle POQ=45°$，可设直线$OP:y=x$，

由$\begin{cases}y=x\\y^2=2px\end{cases}$，可得$x=y=2p$，

$\therefore P\left(2p,2p\right),Q\left(2p,0\right)$，又$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，



$\therefore\cos\angle PFQ=\frac{|FQ|}{|PF|}=\frac{\left|2p-\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{\left(2p-\frac{p}{2}\right)^2+\left(2p\right)^2}}=\frac{3}{5}$

故答案为：$\frac{3}{5}$.

14. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $\frac{f'(x)}{x^2-1}>0$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为_____；满足以上条件的一个函数是_____.

【答案】 ①. $(-1,1)$ ②. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$（答案不唯一）

【解析】

【分析】由 $\frac{f'(x)}{x^2-1}>0$ 可得 $f'(x)(x^2-1)>0$，从而可得 $\begin{cases}f'(x)>0\\x^2-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f'(x)<0\\x^2-1<0\end{cases}$，进而可求出 $f(x)$ 的单调递减区间，由导函数的单调区间可求得满足条件的一个函数

【详解】由 $\frac{f'(x)}{x^2-1}>0$ 可得 $f'(x)(x^2-1)>0$，

所以 $\begin{cases}f'(x)>0\\x^2-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f'(x)<0\\x^2-1<0\end{cases}$，

所以当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$，

所以满足条件的一个函数可以为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$（答案不唯一）

故答案为：$(-1,1)$，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$（答案不唯一）

15. 某公司通过统计分析发现，工人工作效率 E 与工作年限 $r(r>0)$，劳累程度 $T(0<T<1)$，劳动动机 $b(1<b<5)$ 相关，并建立了数学模型 $E=10-10T\cdot b^{-0.14r}$.

已知甲、乙为该公司的员工，给出下列四个结论：

①甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作年限长，劳累程度弱，则甲比乙工作效率高；

②甲与乙劳累程度相同，且甲比乙工作年限长，劳动动机高，则甲比乙工作效率高；

③甲与乙工作年限相同，且甲比乙工作效率高，劳动动机低，则甲比乙劳累程度强：

④甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作效率高，工作年限短．则甲比乙劳累程度弱.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】①②④

【解析】

【分析】利用指数函数的性质，幂函数的性质逐项分析即得.

【详解】设甲与乙的工人工作效率 E_1,E_2，工作年限 r_1,r_2，劳累程度 T_1,T_2，劳动动机 b_1,b_2，

对于①，$b_1=b_2$，$r_1>r_2$，$T_1<T_2$，$1<b<5$，$0<b_2^{-0.14}<1$

$\therefore b_2^{-0.14r_2}>b_1^{-0.14r_1}$，$T_2>T_1>0$，

则 $E_1-E_2=10-10T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}-\left(10-10T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}\right)=10\left(T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}-T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}\right)>0$，

$\therefore E_1>E_2$，即甲比乙工作效率高，故①正确；

对于②，$T_1=T_2$，$r_1>r_2$，$b_1>b_2$，

$\therefore 1>b_2^{-0.14}>b_1^{-0.14}>0$，$b_2^{-0.14r_2}>b_1^{-0.14r_2}>b_1^{-0.14r_1}$，

则 $E_1-E_2=10-10T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}-\left(10-10T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}\right)=10T_1\left(b_2^{-0.14r_2}-b_1^{-0.14r_1}\right)>0$，

$\therefore E_1>E_2$，即甲比乙工作效率高，故②正确；

对于③，$r_1=r_2$，$E_1>E_2$，$b_1<b_2$，$0<\dfrac{b_1}{b_2}<1$，

$\therefore E_1-E_2=10\left(T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}-T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}\right)>0$，$T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}>T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}$，

$\dfrac{T_2}{T_1}>\dfrac{b_1^{-0.14r_1}}{b_2^{-0.14r_2}}=\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^{-0.14r_1}>1$，

所以$T_2>T_1$，即甲比乙劳累程度弱，故③错误；

对于④，$b_1=b_2$，$E_1>E_2$，$r_1<r_2$，

$\therefore E_1-E_2=10\left(T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}-T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}\right)>0$，$T_2\cdot b_2^{-0.14r_2}>T_1\cdot b_1^{-0.14r_1}$，

$\therefore \dfrac{T_2}{T_1}>\dfrac{b_1^{-0.14r_1}}{b_2^{-0.14r_2}}=\left(b_1\right)^{-0.14(r_1-r_2)}>1$，

所以$T_2>T_1$，即甲比乙劳累程度弱，故④正确.

故答案为：①②④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，$a\cos B+b\cos A=\sqrt{2}c\cos C$.

（1）求C；

（2）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$存在且唯一确定，求 c 和$\sin A$的值.

条件①：$a=2\sqrt{2}$，AC 边上中线的长为$\sqrt{5}$；

条件②：$b=6$，$\triangle ABC$的面积为 6；

条件③：$\cos B=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$AC$ 边上的高 BD 的长为 2.

【答案】（1）$C=\dfrac{\pi}{4}$；

（2）详见解析.

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理及特殊角三角函数值即得；

（2）选①利用余弦定理可得不合题意，选②利用正弦定理，余弦定理及面积公式即求，选③利用和角公式及正弦定理即得.

【小问 1 详解】

$\because a\cos B+b\cos A=\sqrt{2}c\cos C$，

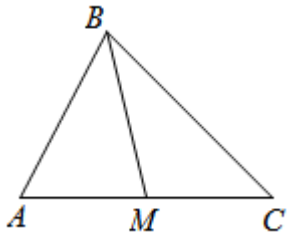
$\therefore \sin A\cos B+\sin B\cos A=\sqrt{2}\sin C\cos C$，即 $\sin\ \ A+B\ \ =\sin C=\sqrt{2}\sin C\cos C$，

又 $C\in(0,\pi),\sin C\neq 0$，故 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore C=\dfrac{\pi}{4}$；

【小问 2 详解】

选①，设 AC 的中点为 M，在 $\triangle BCM$ 中，$BM=\sqrt{5},BC=2\sqrt{2},$



由余弦定理可得 $BM^2=BC^2+CM^2-2CM\cdot BC\cos C$，

$\therefore\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+CM^2-2\times 2\sqrt{2}\times CM\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $CM^2-4CM+3=0$，

解得 $CM=1$ 或 $CM=3$，

故 $\triangle ABC$ 有两组解，不合题意；

选②，由 $b=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 6，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times a\times 6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6$，

故 $a=2\sqrt{2}$，

由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=8+36-2\times 2\sqrt{2}\times 6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20$，

可得 $c=2\sqrt{5}$，

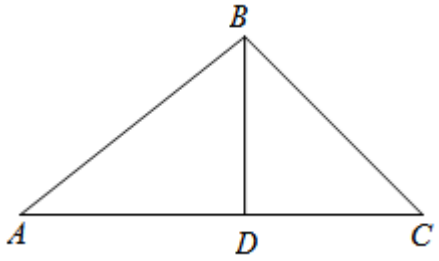
由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

选③，$\because \cos B=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \sin B=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \sin A=\sin\left(B+C\right)=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

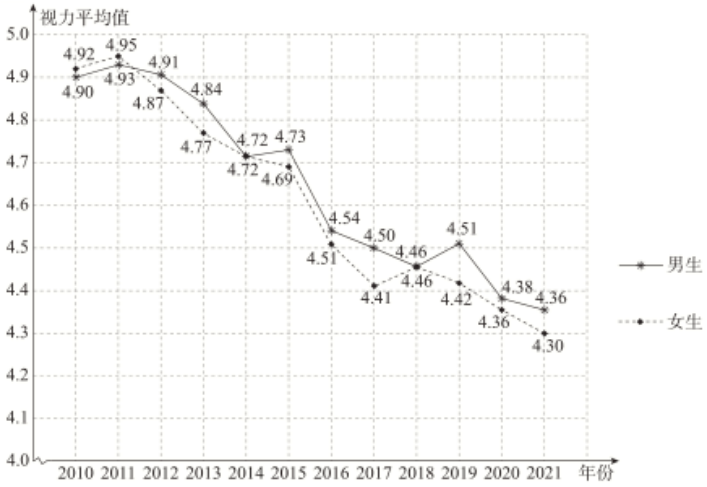
又 AC 边上的高 BD 的长为 2，



$\therefore a = BC = 2\sqrt{2}$，

由 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$，可得 $c = \dfrac{a\sin C}{\sin A} = \dfrac{2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}} = 2\sqrt{5}$.

17. 某部门为了解青少年视力发展状况，从全市体检数据中，随机抽取了100名男生和100名女生的视力数据．分别计算出男生和女生从小学一年级（2010年）到高中三年级（2021年）每年的视力平均值，如图所示．



（1）从2011年到2021年中随机选取1年，求该年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值的概率；

（2）从2010年到2021年这12年中随机选取2年，设其中恰有 X 年女生的视力平均值不低于当年男生的视力平均值．求 X 的分布列和数学期望：

（3）由图判断，这200名学生的视力平均值从哪年开始连续三年的方差最小？（结论不要求证明）

【答案】（1）$\dfrac{3}{11}$

（2）分布列见解析；数学期望 $E\left(X\right) = \dfrac{2}{3}$

（3）自2017年开始的连续三年，200名学生的视力平均值方差最小

【解析】

【分析】（1）根据折线图可确定该年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值的共有3个，由此可计算得到概率；

（2）由折线图知女生的视力平均值不低于当年男生的视力平均值的年份有4个，根据超几何分布概率公式可确定 X 每个取值对应的概率，由此可得分布列；根据数学期望计算公式可求得期望值；

（3）根据折线图可确定自2017年开始的连续三年，学生视力波动程度最小，由此可得结论.

【小问 1 详解】

由折线图可知：从 2011 年到 2021 年中，该年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值的共有 3 个；

$\therefore$ 所求概率 $P=\dfrac{3}{11}$.

【小问 2 详解】

从 2010 年到 2021 年这 12 年中，女生的视力平均值不低于当年男生的视力平均值的年份有 4 个；

$\therefore X$ 所有可能的取值为 $0,1,2$，

$\therefore P\left(X=0\right)=\dfrac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\dfrac{14}{33}$；$P\left(X=1\right)=\dfrac{\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_{12}^2}=\dfrac{16}{33}$；$P\left(X=2\right)=\dfrac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\dfrac{1}{11}$；

则 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{14}{33}$	$\dfrac{16}{33}$	$\dfrac{1}{11}$

$\therefore X$ 的数学期望 $E\left(X\right)=0\times\dfrac{14}{33}+1\times\dfrac{16}{33}+2\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{2}{3}$.

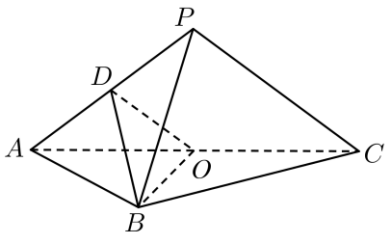
【小问 3 详解】

由折线图知：自 2017 年开始的连续三年视力平均值接近且连续三年数据相差不大，

$\therefore$ 自 2017 年开始的连续三年，200 名学生的视力平均值波动幅度最小，

则自 2017 年开始的连续三年，200 名学生的视力平均值方差最小.

18. 如图，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$AB=BC$，D、O 分别为 PA、AC 的中点，$AC=8$，$PA=PC=5$.



（1）设平面 $PBC\bigcap$ 平面 $BOD=l$，判断直线 l 与 PC 的位置关系，并证明；

（2）求直线 PB 与平面 BOD 所成角的正弦值.

【答案】（1）$l/\!/PC$，证明见解析；

（2）$\dfrac{12}{25}$.

【解析】

【分析】(1)根据线面平行的判断定理和性质定理即可判断；

(2)以 O 为原点，OB、OC、OP 分别为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系，求出各点坐标，利用向量法即可求出直线 PB 与平面 BOD 所成角的余弦值和正弦值.

【小问 1 详解】

∵ D、O 分别为 PA、AC 的中点，∴在△APC 中，$DO \parallel PC$，

∵$DO \subset$ 平面 BOD，$PC \not\subset$ 平面 BOD，∴$PC \parallel$ 平面 BOD，

∵$PC \subset$ 平面 PBC，平面 $PBC \cap$ 平面 $BOD=l$，∴根据线面平行的性质定理可知 $PC \parallel l$；

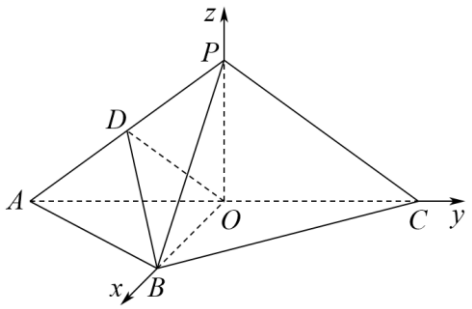
【小问 2 详解】

∵$AB=BC$，O 是 AC 中点，∴$BO \perp AC$，

∵平面 $PAC \perp$ 平面 ABC，平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC=AC$，$BO \subset$ 平面 ABC，

∴$BO \perp$ 平面 APC，同理∵$AP=PC$，∴$PO \perp AC$，PO 垂直平面 ABC，

故 OB、OC、OP 三线两两垂直，故可以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系．



由题可知 $AC=8$，$AB=BC=4\sqrt{2}$，$OA=OC=OB=4$，$OP=3$，

则 $A(0,-4,0)$，$B(4,0,0)$，$P(0,0,3)$，$D\left(0,-2,\frac{3}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{BP}=(-4,0,3)$，$\overrightarrow{OB}=(4,0,0)$，$\overrightarrow{OD}=\left(0,-2,\frac{3}{2}\right)$，

设平面 BOD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB}=4x=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OD}=-2y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，取 $z=4$，则 $y=3$，则 $\vec{m}=(0,3,4)$，

$\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{BP}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\vec{m}||\overrightarrow{BP}|}=\frac{12}{5\times5}=\frac{12}{25}$，

∴直线 PB 与平面 BOD 所成角的正弦值 $\frac{12}{25}$．

19. 已知函数 $f(x)=x+\frac{2a^2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $x\in[\mathrm{e},+\infty)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$y=3$；

（2）$\left(-\frac{\mathrm{e}^3}{2},+\infty\right)$．

【解析】

【分析】（1）利用导数的几何意义即得；

（2）由题可知 $f(x)_{\min}>0$，当 $a\geq 0$ 时适合题意，当 $a<0$ 时，分类讨论，利用导数求函数的最值即得.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\ln x, x>0$，

$\therefore f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$，

$\therefore f(1)=3, f'(1)=0$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=3$；

【小问 2 详解】

$\because$ 函数 $f(x)=x+\dfrac{2a^2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$，

当 $a\geq 0$ 时，由 $x\in[\mathrm{e},+\infty)$ 有 $f(x)>0$，故曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，

当 $a<0$ 时，$f'(x)=1-\dfrac{2a^2}{x^2}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{(x-a)(x+2a)}{x^2}$，

由 $f'(x)=0$ 可得 $x=-2a$ 或 $x=a$（舍去），

$\therefore$ 当 $x\in(0,-2a)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-2a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

当 $-2a\leq \mathrm{e}$ 即 $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\leqslant a<0$ 时，所以 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)\geq f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}}+a=\dfrac{2}{\mathrm{e}}\left(a+\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\mathrm{e}>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，

当 $-2a>\mathrm{e}$ 即 $a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[\mathrm{e},-2a)$ 上单调递减，在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)\geq f(-2a)=-3a+a\ln(-2a)$，

由 $x\in[\mathrm{e},+\infty)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，

$\therefore -3a+a\ln(-2a)>0$，解得 $a>-\dfrac{\mathrm{e}^3}{2}$，

所以 $-\dfrac{\mathrm{e}^3}{2}<a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$；

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\dfrac{\mathrm{e}^3}{2},+\infty\right)$.

20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(2,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．过点 $P(6,0)$ 与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别交直线 $x=6$ 于点 M，N.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 O 为原点．求证：$\angle PAN+\angle POM=90°$.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）由题得到关于 a,c 的方程组，解方程组即得解；

（2）设 $M(6,m),N(6,n)$，只需证明 $mn=24$.设直线 l 的方程为 $y=k(x-6)$，$k\neq 0$，联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

得韦达定理，根据三点共线得到 $m=\frac{4y_1}{x_1-2}$，$n=\frac{4y_2}{x_2-2}$，求出 $mn=24$ 即得证.

【小问 1 详解】

解：由题得 $a=2,\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\therefore a=2,c=1,\therefore b=\sqrt{3},$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

解：要证 $\angle PAN+\angle POM=90°$，只需证 $\angle PAN=90°-\angle POM$，

只需证明 $\tan\angle PAN=\frac{1}{\tan\angle POM}$,只需证明 $\tan\angle PAN\cdot\tan\angle POM=1,$

只需证明 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1,$

设 $M(6,m),N(6,n)$，只需证明 $\frac{n}{6-2}\cdot\frac{m}{6}=1,$只需证明 $mn=24$.

设直线 l 的方程为 $y=k(x-6)$，$k\neq 0$，

联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(3+4k^2)x^2-48k^2x+144k^2-12=0$，

设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，所以 $\Delta>0,x_1+x_2=\frac{48k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{144k^2-12}{3+4k^2}$，

又 A,B,M 三点共线，所以 $\frac{m}{4}=\frac{y_1}{x_1-2},\therefore m=\frac{4y_1}{x_1-2}$，同理 $n=\frac{4y_2}{x_2-2}$，

所以 $mn=\frac{4y_1}{x_1-2}\times\frac{4y_2}{x_2-2}=\frac{16k^2(x_1-6)(x_2-6)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

所以 $mn=\frac{16k^2[x_1x_2-6(x_1+x_2)+36]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

所以 $mn=\frac{16k^2[\frac{144k^2-12}{3+4k^2}-6\times\frac{48k^2}{3+4k^2}+36]}{\frac{144k^2-12}{3+4k^2}-2\times\frac{48k^2}{3+4k^2}+4}=\frac{16k^2\times 96}{64k^2}=24$.

所以 $\angle PAN+\angle POM=90°$.

21. 对于数列 $A:a_1$，a_2，…，$a_n(n\geq 3)$，定义变换 T，T 将数列 A 变换成数列 $T(A):a_2$，a_3，…，a_n，a_1，记 $T^1(A)=T(A)$，$T^m(A)=T\left(T^{m-1}(A)\right)$，$m\geq 2$．对于数列 $A:a_1$，a_2，…，a_n 与 $B:b_1$，b_2，…，b_n，定义

$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$．若数列$A:a_1$，$a_2$，…，$a_n(n\geq 3)$满足$a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，则称数列A为$\mathfrak{R}_n$数列.

（1）若$A:-1,-1,1,-1,1,1$，写出$T(A)$，并求$A\cdot T^2(A)$；

（2）对于任意给定的正整数$n(n\geq 3)$，是否存在$\mathfrak{R}_n$数列A，使得$A\cdot T(A)=n-3$?若存在，写出一个数列A，若不存在，说明理由：

（3）若$\mathfrak{R}_n$数列A满足$T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=n-4(k=1,2,\cdots,n-2)$，求数列$A$的个数.

【答案】（1）$T(A):-1,1,-1,1,1,-1$；$A\cdot T^2(A)=-2$；

（2）不存在适合题意的数列A；

（3）$n(n-1)$.

【解析】

【分析】（1）利用变换T的定义即；

（2）利用$\mathfrak{R}_n$数列的定义，记$a_ia_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$中有$t$个$-1$，有$n-t$个$1$，则$A\cdot T(A)=n-2t$，进而即得；

（3）由题可得$A\cdot T(A)=T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)(k=1,2,\cdots,n-2)$，进而可得$n-2t=n-4$，然后结合条件即得.

【小问1详解】

由$A:-1,-1,1,-1,1,1$，

可得$T(A):-1,1,-1,1,1,-1$，

$T^2(A):1,-1,1,1,-1,-1$，

$\therefore A\cdot T^2(A)=-1+1+1-1-1-1=-2$；

【小问2详解】

$\because A\cdot T(A)=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$，

由数列A为$\mathfrak{R}_n$数列，所以$a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，

对于数列$A:a_1$，a_2，…，a_n中相邻的两项$a_i,a_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$，

令$a_{n+1}=a_1$，若$a_i=a_{i+1}$，则$a_ia_{i+1}=1$，若$a_i\neq a_{i+1}$，则$a_ia_{i+1}=-1$，

记$a_ia_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$中有$t$个$-1$，有$n-t$个$1$，则$A\cdot T(A)=n-2t$，

因为$n-2t$与n的奇偶性相同，而$n-3$与n的奇偶性不同，

故不存在适合题意的数列A；

【小问3详解】

首先证明$A\cdot T(A)=T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)(k=1,2,\cdots,n-2)$，

对于数列$A:a_1$，a_2，…，a_n，有$T(A):a_2$，a_3，…，a_n，a_1，

$T^k(A):a_{k+1}$，a_{k+2}，…，a_{n-1}，a_n，a_1，a_2，…，a_{k-1}，a_k，

$T^{k+1}(A):a_{k+2}$，a_{k+3}，…，a_n，a_1，a_2，a_3，…，a_k，a_{k+1}，

$\because A\cdot T(A)=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$，

$T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=a_{k+1}a_{k+2}+a_{k+2}a_{k+3}+\cdots+a_na_1+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_ka_{k+1}$，

$\therefore A\cdot T(A)=T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)(k=1,2,\cdots,n-2)$，

故 $A\cdot T(A)=n-4$，

其次，由数列 A 为 $\mathfrak{R}_n$ 数列可知，$A\cdot T(A)=n-2t=n-4$，

解得 $t=2$，

这说明数列 A 中任意相邻两项不同的情况有 2 次，

若数列 A 中 –1 的个数为 $s\left(s=1,2,\cdots,n-1\right)$ 个，此时数列 A 有 n 个，

所以数列 A 的个数为 $n\left(n-1\right)$ 个.

【点睛】数学中的新定义题目解题策略：①仔细阅读，理解新定义的内涵；②根据新定义，对对应知识进行再迁移.