2021 北京西城高三二模

数　　学

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.（4 分）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2\leqslant 9\}$，$B=\{x|x>-2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0，1，2，3\}$　　B．$\{1，2，3\}$

C．$\{-1，0，1，2，3\}$　　D．$\{x|-2<x\leqslant 3\}$

2.（4 分）已知复数 $z=ai+\frac{2}{1-i}$，其所对应的点在第四象限，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty，1)$　　B．$(1，+\infty)$　　C．$(-1，+\infty)$　　D．$(-\infty，-1)$

3.（4 分）要得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象（　　）

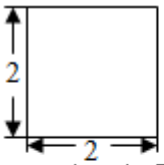
A．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

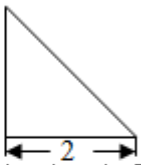
C．向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D．向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

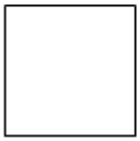
4.（4 分）某三棱柱的三视图如图所示，该三棱柱的体积为（　　）



正（主）视图



侧（左）视图


俯视图

A．$\frac{8}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．8　　D．4

5.（4 分）在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$A=\frac{\pi}{6}$，则“$B=\frac{\pi}{3}$”是“$b=2\sqrt{3}$”的（　　）

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

6．（4 分）若直线 $y=2x$ 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 无公共点，则双曲线 C 的离心率可能是（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．1　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

7．（4 分）“苏州码子”发源于苏州，在明清至民国时期，作为一种民间的数字符号曾经流行一时，广泛应用于各种商业场合.110 多年前，詹天佑主持修建京张铁路，首次将“苏州码子”刻于里程碑上．“苏州码子”计数方式如下：〡（1）、〢（2）、〣（3）、〤（4）、〥（5）、〦（6）、〧（7）、〨（8）、〩（9）、〇（0）．为了防止混淆，有时要将“〡”“〢”“〣”横过来写．已知某铁路的里程碑所刻数字代表距离始发车站的里程，每隔 2 公里摆放一个里程碑，若在 A 点处里程碑上刻着“〣〤”，在 B 点处里程碑刻着“〩〢”，则从 A 点到 B 点里程碑的个数应为（　　）

A．29　　B．30　　C．58　　D．59

8．（4 分）记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=8$，$a_4=-1$，则数列$\{S_n\}$（　　）

A．有最大项，有最小项　　B．有最大项，无最小项

C．无最大项，有最小项　　D．无最大项，无最小项

9．（4 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（1，1），B（2，1），C（2，2），P 是圆 M：$x^2+(y-4)^2=2$ 上一点，Q 是△ABC 边上一点，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$的最大值是（　　）

A．$8+2\sqrt{2}$　　B．12　　C．$8+4\sqrt{2}$　　D．16

10．（4 分）甲乙丙三个学生同时参加了若干门学科竞赛（至少包含数学和物理），在每科竞赛中，甲乙丙三人中都有一个学生的分数为 x，另一个学生的分数为 y，第三个学生的分数为 z，其中 x，y，z 是三个互不相等的正整数．在完成所有学科竞赛后，甲的总分为 47 分，乙的总分为 24 分，丙的总分为 16 分，且在甲乙丙这三个学生中乙的数学竞赛成绩排名第一，则（　　）

A．甲乙丙三个学生至少参加了四门学科竞赛

B．x，y，z 这三个数中的最大值可以取到 21

C．在甲乙丙这三个学生中，甲的物理竞赛成绩可能排名第二

D．在甲乙丙这三个学生中，丙的物理竞赛成绩一定排名第二

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．（5 分）已知向量$\vec{a}$=（m，1），$\vec{b}$=（3，m），若$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反，则 m 等于_____.

12．（5 分）在$(\sqrt{x}-\frac{2}{x})^3$的展开式中，常数项是_____.

13．（5 分）对于抛物线 C，给出下列三个条件：

①对称轴为 y 轴；②过点（1，1）；③焦点到准线的距离为 2.

写出符合其中两个条件的一个抛物线 C 的标准方程_____.

14．（5 分）共享单车已经成为方便人们出行的交通工具，某公司决定从 2020 年 1 月开始向某地投放共享单车，记第 n（$n\in\mathbf{N}^*$）个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n（单位：千辆），其中 $a_1=1$，$b_1=0.1$．从第 2 个月到 2021 年 12 月，共享单车的每月投放量比上个月增加 1 千辆，从 2022 年 1 月开始，

共享单车的每月投放量比上个月减少 1 千辆；根据预测，从 2020 年 1 月开始，共享单车的每月损失量比上个月增加 100 辆．设第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差，则该地区第 4 个月底的共享单车的保有量为_____千辆；当 n 为_____时，该地区第 n 个月底的共享单车保有量达到最大．

15．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|a^x-1|, & x\leqslant 1,\\ (a-2)(x-1), & x>1.\end{cases}$ 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$．给出下列四个结论：

①若 $a\neq 2$，则函数 $f(x)$ 的零点是 0

②若函数 $f(x)$ 无最小值，则 a 的取值范围为（0，1）；

③若 $a>2$，则 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，0）上单调递减，在区间（0，$+\infty$）上单调递增

④若关于 x 的方程 $f(x)=a-2$ 恰有三个不相等的实数根 x_1，x_2，x_3，则 a 的取值范围为（2，3），且 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围为（$-\infty$，2）．

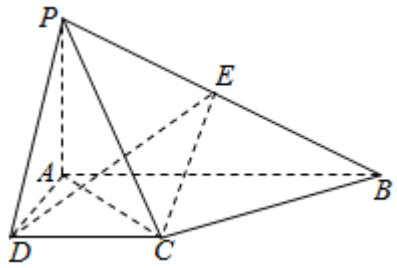
其中，所有正确结论的序号是_____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，$AB=4$，$PA=AD=CD=2$，点 E 为 PB 的中点．

（Ⅰ）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）求二面角 $E-CD-A$ 的余弦值．



17．（13 分）已知函数 $f(x)=4\sin\frac{\omega x}{2}\cos\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+m$（$\omega>0$）．在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知．

（Ⅰ）求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间[0，a]上是增函数，求实数 a 的最大值

条件①：$f(x)$ 最小正周期为 π；

条件②：$f(x)$ 最大值与最小值之和为 0；

条件③：$f(0)=2$．

18．（14 分）在新冠病毒疫情防控期间，北京市中小学开展了“优化线上教育与学生线下学习相结合”的教育教学实践活动．为了解某区教师对 A，B，C，D，E 五类线上教育软件的使用情况（每位教师都使用这五类教育软件中的某一类且每位教师只选择一类教育软件），从该区教师中随机抽取了 100 人，统计数据如表，其中 $a>b$，$ab\in\mathbf{N}$．

教育软件类型	A	B	C	D	E
选用教师人数	10	15	a	30	b

假设所有教师选择使用哪类软件相互独立.

（Ⅰ）若某校共有 300 名教师，试估计该校教师中使用教育软件 C 或 E 的人数；

（Ⅱ）从该区教师中随机抽取 3 人，估计这 3 人中至少有 2 人使用教育软件 D 的概率；

（Ⅲ）设该区有 3000 名教师，从中随机抽取 1 人，记该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_1；该区学校 M 有 600 名教师，其中有 200 人使用教育软件 C，100 人使用教育软件 D，从学校 M 中随机抽取 1 人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率值为 P_2；从该区其他教师（除学校 M 外）中随机抽取 1 人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_3．试比较 P_1，P_2 和 P_3 之间的大小．（结论不要求证明）

19．（15 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，其长轴的两个端点分别为 A（﹣3，0），B（3，0）.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）点 P 为椭圆上除 A，B 外的任意一点，直线 AP 交直线 $x=4$ 于点 E，点 O 为坐标原点，过点 O 且与直线 BE 垂直的直线记为 l，直线 BP 交 y 轴于点 M，交直线 l 于点 N，求△BMO 与△NMO 的面积之比.

20．（15 分）已知函数 $f(x)=\ln x+bx+c$，$g(x)=kx^2+2$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 1.

（Ⅰ）求 b 和 c 的值；

（Ⅱ）当 $x\in[1,+\infty)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在曲线 $y=g(x)$ 的上方，求 k 的取值范围；

（Ⅲ）设 $k=1$，证明：存在两条与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 都相切的直线.

21．（15 分）设 A 是正整数集的一个非空子集，如果对于任意 $x\in A$，都有 $x-1\in A$ 或 $x+1\in A$，则称 A 为自邻集．记集合 $A_n=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}$）的所有子集中的自邻集的个数为 a_n.

（Ⅰ）直接写出 A_4 的所有自邻集；

（Ⅱ）若 n 为偶数且 $n\geq 6$，求证：A_n 的所有含 5 个元素的子集中，自邻集的个数是偶数；

（Ⅲ）若 $n\geq 4$，求证：$a_n\leq 2a_{n-1}$.

参考答案

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】可求出集合 A，然后进行交集的运算即可.

【解答】解：∵$A=\{x\in\mathbf{Z}|-3\leqslant x\leqslant 3\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|x>-2\}$，

∴$A\cap B=\{-1,0,1,2,3\}$.

故选：C.

【点评】本题考查了集合的描述法和列举法的定义，一元二次不等式的解法，交集及其运算，考查了计算能力，属于基础题.

2.【分析】利用复数的运算法则、几何意义即可得出.

【解答】解：复数 $z=ai+\frac{2}{1-i}=ai+\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=ai+1+i=1+(a+1)i$，

其所对应的点在第四象限，∴$\begin{cases}1>0\\a+1<0\end{cases}$，解得 $a<-1$.

则实数 a 的取值范围是（$-\infty$，-1），

故选：D.

【点评】本题考查了复数的运算法则、几何意义，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3.【分析】利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，得出结论.

【解答】解：把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，

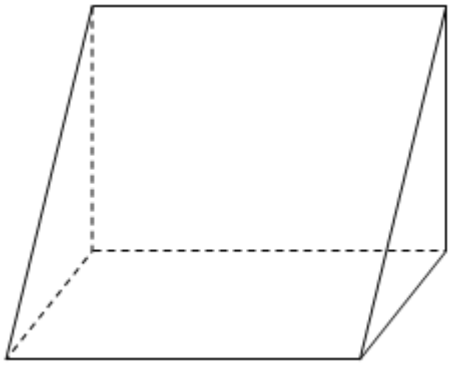
故选：B.

【点评】本题主要考查函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，属于基础题.

4.【分析】首先把三视图转换为几何体的直观图，进一步求出几何体的体积.

【解答】解：根据几何体的三视图转换为直观图为：该几何体为底面为等腰直角三角形，高为 2 的直三棱柱；

如图所示：



故 $V=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=4$，

故选：D.

【点评】本题考查的知识要点：三视图和几何体的直观图之间的转换，几何体的体积公式的应用，主要

考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题．

5．【分析】利用正弦定理，再结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可．

【解答】解：①当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，由正弦定理得 $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，∴$b=\frac{asinB}{sinA}=2\sqrt{3}$，∴充分性成立，

②当 $b=2\sqrt{3}$ 时，由正弦定理得 $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，∴$sinB=\frac{bsinA}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∵$B\in$（0，π），∴$B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$，∴必要性不成立，

综上，$B=\frac{\pi}{3}$ 是 $b=2\sqrt{3}$ 的充分不必要条件．

故选：*A*．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据正弦定理是解决本题的关键．

6．【分析】利用双曲线的渐近线的斜率与直线的斜率的关系，即可推出结果．

【解答】解：直线 $y=2x$ 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 无公共点，

可得 $\frac{b}{a}\leqslant 2$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\leqslant\sqrt{5}$，

结合选项可知，双曲线 *C* 的离心率可能是 2．

故选：*C*．

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，考查转化思想以及计算能力，是中档题．

7．【分析】根据苏州码子”计数方式先求出 *A*，*B* 两点处距离始发车站的里程，再根据每隔 2 公里摆放一个里程碑，即可求出结果．

【解答】解：由苏州码子”计数方式可知 *A* 点处里程碑上的“Ⅲ〆”表示 34 公里，*B* 点处里程碑上的“〆Ⅱ”表示 92 公里，

所以从 *A* 点到 *B* 点里程碑的个数应为：（92﹣34）÷2+1＝30（个），

故选：*B*．

【点评】本题主要考查了简单的合情推理，考查了学生的逻辑推理能力，是基础题．

8．【分析】根据题意，由等比数列的通项公式求出数列的公比 *q*，进而求出 S_n 的表达式，分 *n* 为奇数和偶数两种情况讨论，分析$\{S_n\}$的最大项和最小项，即可得答案．

【解答】解：根据题意，等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=8$，$a_4=-1$，则 $q^3=\frac{a_4}{a_1}=-\frac{1}{8}$，则 $q=-\frac{1}{2}$，

则 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{8[1-(-\frac{1}{2})^n]}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$，

若 n 为奇数，则 $S_n=\frac{16}{3}[1+\frac{1}{2^n}]$，此时有 $S_1>S_3>\cdots\cdots>S_n>\frac{16}{3}$，

若 n 为偶数，则 $S_n=\frac{16}{3}[1-\frac{1}{2^n}]$，此时有 $S_2<S_4<\cdots\cdots<S_n<\frac{16}{3}$，

故 S_1 最大，S_2 最小，

故选：A.

【点评】本题考查等比数列的求和，关键是求出数列的公比，属于基础题.

9.【分析】设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$，当 $x_1>0$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$有可能取得最大值．当点 P 不动时时，x_2 与 y_2 尽可能大，即 $x_2=y_2=2$ 时，即点 Q 与 C 重合时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$有最大值 2（$x_1+y_1$）．令 $x_1=\sqrt{2}\cos\theta$，$y_1=4+\sqrt{2}\sin\theta$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$．再利用三角函数的单调性即可得出最大值．

【解答】解：设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2$，当 $x_1>0$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$有可能取得最大值．

当点 P 不动时时，x_2 与 y_2 尽可能大，即 $x_2=y_2=2$ 时，即点 Q 与 C 重合时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$有最大值 2（$x_1+y_1$）．

令 $x_1=\sqrt{2}\cos\theta$，$y_1=4+\sqrt{2}\sin\theta$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$．

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2(x_1+y_1)=2(\sqrt{2}\cos\theta+4+\sqrt{2}\sin\theta)=4\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+8$，

$\because\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$时，$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$取得最大值 1，

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$的最大值 12.

故选：B.

【点评】本题考查了数量积运算性质、三角函数求值、圆的参数方程，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

10.【分析】确定甲乙丙三人总得分，不妨设 $x>y>z>0$，先根据 87 的因数，即可判断选项 A，通过分析甲乙丙的得分情况，判断甲必有第一名，且第一名分数不少于 16 分，丙没有第一名，由此进行推理，即可判断选项 C，D，再列出 x，y，z 的方程组，求出 x，y，z，即可判断选项 B.

【解答】解：甲乙丙三人总得分为 47+24+16＝87 分，不妨设 $x>y>z>0$，

因为 87 只能被 3 和 29 整除，所以共有 3 门学科竞赛，每门一二三名总分为 29 分，即 $x+y+z=29$，故选项 A 错误；

乙得分 24＜$x+y+z$，则另外两门必为第三，故 $24-x=2z$，

甲共得 47 分，平均每门$\frac{47}{3}>15$分，故甲必有第一名，且第一名分数不少于 16 分，

丙三门共 16 分，则必然没有第一名，

故甲有两门第一，且这两门中乙第三，丙第二，

因为 16 不能被 3 整除，

所以数学丙第三，甲第二，故选项 C 错误，选项 D 正确；

由上述条件可知，$\begin{cases}2x+y=47\\x+2z=24\\2y+z=16\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=20\\y=7\\z=2\end{cases}$，故选项 B 错误．

故选：D．

【点评】本题考查了合情推理的应用，主要考查了逻辑推理能力，正确理解题意是解题的关键，属于中档题．

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．【分析】根据题意可设$\vec{b}=k\vec{a}$，$k<0$，从而得出$\begin{cases}km=3\\k=m\end{cases}$，然后解出 m 的值即可．

【解答】解：∵$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反，

∴设$\vec{b}=k\vec{a}$，$k<0$，

∴（3，m）＝（km，k），

∴$\begin{cases}km=3\\k=m\end{cases}$，且 $k<0$，解得$m=-\sqrt{3}$．

故答案为：$-\sqrt{3}$．

【点评】本题考查了共线向量基本定理，向量坐标的数乘运算，考查了计算能力，属于基础题．

12．【分析】求出展开式的通项公式，再令 x 的指数为 0，进而可以求解．

【解答】解：展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot(\sqrt{x})^{3-r}\cdot(\frac{-2}{x})^r=C_3^r\cdot(-2)^r x^{\frac{3-3r}{2}}$，

令$\frac{3-3r}{2}=0$，解得 $r=1$，

所以常数项为 $C_3^1\cdot(-2)^1=-6$，

故答案为：－6．

【点评】本题考查了二项式定理的应用，考查了学生的运算能力，属于基础题．

13．【分析】选①②，由对称轴为 y 轴，设出抛物线方程，再代入（1，1）即可得解．

【解答】解：选①②，设 $x^2=2py$，则 $2p=1$，解得$p=\frac{1}{2}$，故抛物线方程为 $x^2=y$．

故答案为：$x^2=y$．

【点评】本题考查抛物线方程的求法，属于基础题．

14．【分析】先求出 2021 年 12 月前 a_n 和 b_n 的通项公式，得到 a_n-b_n，故第四个月底的保有量为$\frac{(a_1-b_1)+(a_4-b_4)}{2}\times 4$，若保有量最大，则 $a_n-b_n\geqslant 0$ 且 $a_{n+1}-b_{n+1}<0$，从而可求出 n．

【解答】解：2021 年 12 月前，$a_n=1+n-1=n$，$b_n=0.1+0.1(n-1)=0.1n$，

则 $a_n-b_n=0.9n$，

故第四个月底的保有量为$\frac{(a_1-b_1)+(a_4-b_4)}{2}\times 4=\frac{0.9+0.9\times 4}{2}\times 4=9$，

故第四个月底的保有量为 9 千辆，

2021 年 12 月前，$a_n - b_n = 0.9n$ 持续增加，且 $a_{24} - b_{24} = 0.9 \times 24 = 21.6$，$a_{24} = 24$，

2022 年 1 月开始，$a_n = 24 - (n - 24) = 48 - n$，$b_n = 0.1n$，则 $a_n - b_n = 48 - 1.1n$，

若保有量最大，则 $a_n - b_n \geqslant 0$ 且 $a_{n+1} - b_{n+1} < 0$，

若 $a_n - b_n = 0$，则 $48 = 1.1n$，即 $n \approx 43.6$，

因为 $n \in \mathbf{N}^*$，故 $n = 43$ 时，保有量最大．

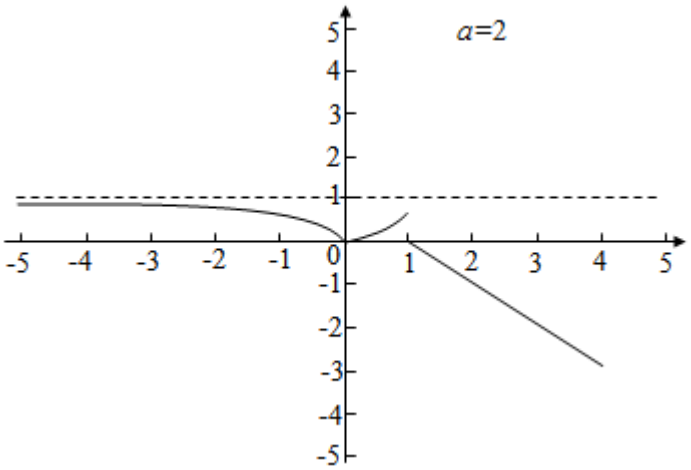
故答案为：9，43．

【点评】本题主要考查了数列的应用，以及最值的求解，解题的关键是弄清题意，同时考查了转化能力和运算求解的能力，属于中档题．

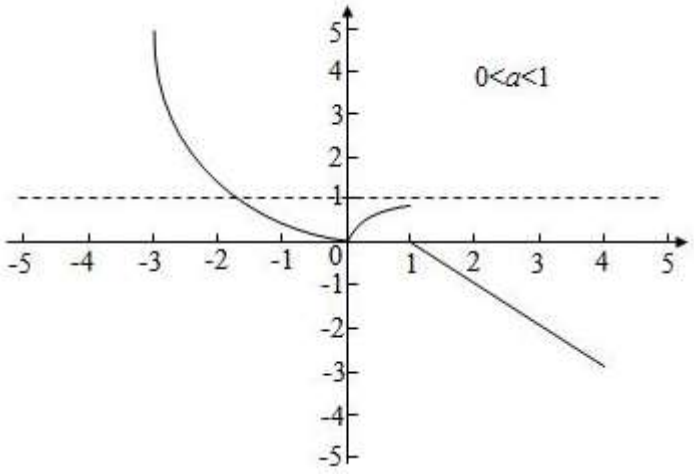
15．【分析】作出分段函数图像，根据不同情况逐步讨论作答．

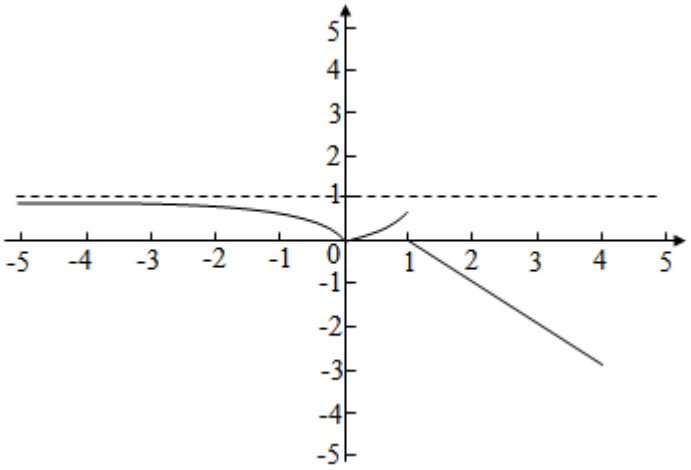
【解答】解：若 $a \neq 2$，则函数有唯一零点，是 0，①正确；当 $a < 2$ 时，$f(x)$ 无最小值，题干限制 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，所以 a 的取值范围是（0，1）∪（1，2），②错误；当 $a > 2$ 时，$f(x)$ 在（$-\infty$，0）上单调递减，在（0，1），（1，$+\infty$），分别单调递增，但并非连续单调递增，③错误；当 $a = 2$ 时，$a - 2 = 0$，$f(x) = a - 2 = 0$，函数有无数个根，不满足恰有三个不等根，故不考虑．当 $a > 2$ 时，令 $0 < a - 2 < 1$ 得，$2 < a < 3$，当 $x > 1$ 时，$(a - 2)(x - 1) = a - 2$ 得，$x_3 = 2$，$x \leqslant 1$ 时，$|a^x - 1| = a - 2$ 得，$x_1 = \log_a(3-a)$，$x_2 = \log_a(a-1)$，$x_1 + x_2 = \log_a(3-a)(a-1)$．

比较 $x_1 + x_2$ 与 0 的大小，即比较 $(3 - a)(a - 1)$ 与 1 的大小，$2 < a < 3$，而 $(3 - a)(a - 1) < 1$，故 $x_1 + x_2 < 0$，则 $x_1 + x_2 + x_3$ 取值范围为（$-\infty$，2），④正确．



故选①





【点评】本题考查分段函数图像问题，对函数的零点、单调性、根的分布等问题进行一一探讨，根据不同情况分类讨论，进而作答，属于中档题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】（Ⅰ）取 AB 的中点 F，连接 CF，由已知证明四边形 $AFCD$ 是正方形，可得 $AB\perp CF$，再由已知求解三角形得 $BC\perp AC$，由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，得 $PA\perp BC$，利用直线与平面垂直的判定可得 $BC\perp$ 平面 PAC，进一步得到平面 $PBC\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，得 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，以 A 为坐标原点，分别以 AD、AB、AP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，分别求出平面 CDE 的一个法向量与平面 ACD 的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值可得二面角 $E-CD-A$ 的余弦值.

【解答】（Ⅰ）证明：取 AB 的中点 F，连接 CF，$\therefore AF=CD$

又$\because AF\parallel CD$，$\therefore$四边形 $AFCD$ 为平行四边形，

$\because AB\perp AD$，$AD=CD$，$\therefore$四边形 $AFCD$ 是正方形，

则 $AB\perp CF$，$CF=AD=2$，得 $AC=BC=2\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，得 $BC\perp AC$，

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BC$，

又 $AC\cap PA=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC，

$\because BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）解：∵$PA\perp$平面$ABCD$，∴$PA\perp AD$，$PA\perp AB$，

则PA、AD、AB两两相互垂直，

以A为坐标原点，分别以AD、AB、AP所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系，

则A（0，0，0），P（0，0，2），B（0，4，0），C（2，2，0），

D（2，0，0），E（0，2，1），

∴$\overrightarrow{DC}=(0,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,\ 0,\ 1)$，

设平面CDE的一个法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

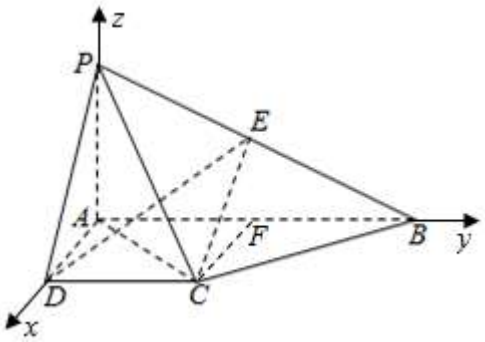
由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-2x+z=0\end{cases}$，取$x=1$，得$\vec{n}=(1,\ 0,\ 2)$；

又平面ACD的一个法向量$\vec{m}=(0,\ 0,\ 1)$.

∴$\cos<\vec{m},\ \vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\times1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

由图可知，二面角$E-CD-A$为锐角，

∴二面角$E-CD-A$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



【点评】本题考查平面与平面垂直的判定，考查空间想象能力与思维能力，训练了利用空间向量求解空间角，是中档题.

17.【分析】（1）首先利用三角函数关系式的变换，把函数的关系式变形成正弦型函数，进一步利用函数的关系式求查出函数的值；

（2）利用整体思想的应用求出函数的单调区间，进一步求出a的最大值.

【解答】解：函数$f(x)=4\sin\dfrac{\omega x}{2}\cos(\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\pi}{3})+m=4\sin\dfrac{\omega x}{2}(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\omega x}{2})+m$

$=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x+\sqrt{3}+m=2\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}+m$，

选条件①②：由于$f(x)$最小正周期为π，所以$\omega=2$，所以$f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}+m$；

由$f(x)$最大值与最小值之和为0，

$f(x)_{min}=-2+\sqrt{3}+m$，$f(x)_{max}=2+\sqrt{3}+m$，

故$-2+\sqrt{3}+m+2+\sqrt{3}+m=0$，解得$m=-\sqrt{3}$.

所以$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

故（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{3})=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

选条件①③：由于$f(x)$最小正周期为π，所以ω=2，

所以$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+\pi$；

解得$m=2$，故$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+2$；

所以$f(\frac{\pi}{3})=2\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}+2$.

（Ⅱ）由于函数在区间[0，a]上是增函数，

所以$2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\ 2a-\frac{\pi}{3}]$，

即$2a-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得$a\leqslant\frac{5\pi}{12}$，

故a的最大值为$\frac{5\pi}{12}$.

【点评】本题考查的知识要点：三角函数的关系式的变换，正弦型函数的性质的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

18.【分析】（Ⅰ）由统计表知$a+b=45$，某校共有300名教师，由此能估计该校教师中使用教育软件C或E的人数.

（Ⅱ）设“从该地区教师中随机抽取3人．至少有2人使用教育软件D”为事件I，由频率估计概率，从该地区教师中随机抽取一名教师，该教师使用软件D的概率为$\frac{3}{10}$，记被抽取的3人中使用软件D的人数为X，则符合事件I的X的可能取值为2，3，由此能估计这3人中至少有2人使用教育软件D的概率.

（Ⅲ）$P_1=\frac{a+30}{100}$，由$a+b=45$，$a>b$，$ab\in\mathbf{N}$．得$23\leqslant a\leqslant44$，从而$\frac{53}{100}\leqslant P_1\leqslant\frac{37}{50}$；$P_2<\frac{1}{2}<P_1$，从该区其他教师（除学校$M$外）中随机抽取1人，该教师使用教育软件$C$或$D$的概率估计值为$P_3$．则$P_3>P_1>P_2$.

【解答】解：（Ⅰ）由统计表知：

$a+b=100-10-15-30=45$，

若某校共有300名教师，则估计该校教师中使用教育软件C或E的人数为：

$300\times\frac{45}{100}=135$（人）.

（Ⅱ）设“从该地区教师中随机抽取3人．至少有2人使用教育软件D”为事件I，

由题意，样本中100名教师使用教育软件D的人数为30人，频率为$\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$，

由频率估计概率，从该地区教师中随机抽取一名教师，该教师使用软件 D 的概率为$\frac{3}{10}$，

记被抽取的 3 人中使用软件 D 的人数为 X，则符合事件 I 的 X 的可能取值为 2，3，

∴估计这 3 人中至少有 2 人使用教育软件 D 的概率为：

$P(I)=P(X=2)+P(X=3)$

$=C_3^2(\frac{3}{10})^2(1-\frac{3}{10})+C_3^3(\frac{3}{10})^3$

$=\frac{27}{125}$.

（Ⅲ）设该区有 3000 名教师，从中随机抽取 1 人，记该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_1，

则 $P_1=\frac{a+30}{100}$，∵$a+b=45$，$a>b$，$ab\in\mathbf{N}$．∴$23\leqslant a\leqslant 44$，∴$\frac{53}{100}\leqslant P_1\leqslant\frac{37}{50}$；

该区学校 M 有 600 名教师，其中有 200 人使用教育软件 C，100 人使用教育软件 D，

从学校 M 中随机抽取 1 人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率值为 P_2，

则 P_2 是 M 部分概率，$P_2<\frac{1}{2}<P_1$；

从该区其他教师（除学校 M 外）中随机抽取 1 人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_3．

则 $P_3>P_1>P_2$．

【点评】本题考查频数、概率的运算，考查二项分布等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是中档题．

19．【分析】（Ⅰ）由已知可得 a，再由离心率求得 c，结合隐含条件求得 b，则椭圆方程可求；

（Ⅱ）设 $P(x_0，y_0)(y_0\neq 0)$，则$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$，写出 PA 所在直线方程，求得 E 点坐标，得到直线 l 的方程，再写出 PB 方程求解 N 点坐标，把三角形的面积比转化为 B 与 N 点的横坐标的绝对值之比得答案．

【解答】解：（Ⅰ）由题意，$a=3$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴$c=\sqrt{6}$，

则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$．

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$；

（Ⅱ）设 $P(x_0，y_0)(y_0\neq 0)$，则$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$．

∴直线 AP 的方程为$y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，

取 $x=4$，可得点 $E(4，\frac{7y_0}{x_0+3})$，

∵直线 BE 的斜率为$\frac{\frac{7y_0}{x_0+3}}{4-3}=\frac{7y_0}{x_0+3}$，

∴直线 l 的方程为$y=\frac{x_0+3}{7y_0}x$，

又直线 PB 的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，

联立直线 l 与 PB 的方程，消去 y 得$\frac{x_0+3}{7y_0}x=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，

$\therefore\frac{7y_0^2+x_0^2-9}{7y_0(x_0-3)}\cdot x=\frac{3y_0}{x_0-3}$，①

$\because\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$，$\therefore x_0^2-9=-3y_0^2$，

代入①解得点 N 的横坐标 $x_N=\frac{21}{4}$，

$\therefore\frac{S_{\triangle BMO}}{S_{\triangle NMO}}=\frac{\frac{1}{2}|OM|\cdot|x_B|}{\frac{1}{2}|OM|\cdot|x_N|}=\frac{|x_B|}{|x_N|}=\frac{3}{\frac{21}{4}}=\frac{4}{7}$.

故△BMO 与△NMO 的面积之比为 4：7.

【点评】本题考查椭圆方程的求法，考查直线与椭圆位置关系的应用，考查整体运算思想，是中档题.

20.【分析】（Ⅰ）求出函数的导数，计算 f'（1），f（1），得到关于 b，c 的方程组，解出即可；

（Ⅱ）问题转化为 $k<\frac{1nx-x}{x^2}$对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，令 $F(x)=\frac{1nx-x}{x^2}$，$x\in[1,+\infty)$，求出函数的导数，根据函数的单调性求出 k 的取值范围即可；

（Ⅲ）设切点坐标分别为（x_1，lnx_1-x_1+2），（x_2，x_2^2+2），得到$\begin{cases}\frac{1}{x_1}-1=2x_2\\ 1nx_1+1=-x_2^2+2\end{cases}$，消去 x_2 得 $lnx_1+\frac{1}{4x_1^2}-\frac{1}{2x_1}-\frac{3}{4}=0$①，令 $t(x)=lnx+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}$，（$x>0$），求出函数的导数，根据函数的单调性证明结论成立即可.

【解答】解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{x}+b$，由已知 $f'(1)=1+b=0$，$f(1)=b+c=1$，

解得：$b=-1$，$c=2$，经检验，满足题意，

故 $b=-1$，$c=2$；

（Ⅱ）$f(x)=lnx-x+2$，$g(x)=kx^2+2$，$f(x)-g(x)=lnx-x-kx^2$，

由题意 $lnx-x-kx^2>0$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，

故 $k<\frac{lnx-x}{x^2}$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，

令 $F(x)=\frac{lnx-x}{x^2}$，$x\in[1,+\infty)$，

$F'(x)=\frac{(\frac{1}{x}-1)x^2-2x(lnx-x)}{x^4}=\frac{x-2lnx+1}{x^3}$，

令 $h(x)=x-2lnx+1$，$x\geqslant1$，

则 $h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，令 $h'(x)=0$，解得：$x=2$，

∵当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x=2$ 时，函数 $h(x)$ 的最小值是 $h(2)=3-2ln2$，且 $3-2ln2>0$，

故 $h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

∴$F(x)_{min}=F(1)=-1$，故 $k<-1$，

∴实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-1)$；

（Ⅲ）证明：假设存在与曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都相切的直线 l，

设切点坐标分别为 (x_1,lnx_1-x_1+2)，(x_2,x_2^2+2)，

∵$f'(x_1)=\frac{1}{x_1}-1$，∴l 的方程为 $y=(\frac{1}{x_1}-1)x+lnx_1+1$，

∵$g'(x_2)=2x_2$，∴l 的方程为 $y=2x_2x-x_2^2+2$，

∴$\begin{cases}\frac{1}{x_1}-1=2x_2\\ lnx_1+1=-x_2^2+2\end{cases}$，消去 x_2 得 $lnx_1+\frac{1}{4x_1^2}-\frac{1}{2x_1}-\frac{3}{4}=0$①，

令 $t(x)=lnx+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}$，$(x>0)$，

则 $t'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^2}=\frac{(x+1)(2x-1)}{2x^3}$，

令 $t'(x)>0$，解得：$x>\frac{1}{2}$，令 $t'(x)<0$，解得：$0<x<\frac{1}{2}$，

故 $t(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 递增，

故 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 $t(x)$ 的最小值是 $-\frac{3}{4}-ln2<0$，

又∵$t(e)=1+\frac{1}{4e^2}-\frac{1}{2e}-\frac{3}{4}>0$，$t(\frac{1}{e^2})=\frac{5e^2}{4}-\frac{11}{4}>0$，

故函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点，即方程①有 2 个不等的正实根，

由方程 $\frac{1}{x_1}-1=2x_2$ 可得 x_2 有 2 个不同的值，

故 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}-1=2x_2\\ \ln x_1+1=-x_2^2+2\end{cases}$ 有 2 个不同的解，直线 l 有 2 条，

故存在两条与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 都相切的直线．

【点评】本题考查了函数的单调性，极值，最值问题，考查导数的应用以及切线方程问题，考查转化思想，是难题．

21.【分析】（Ⅰ）通过题意可写出在 A_4 所有自邻集即在 4 范围内组成的集合．

（Ⅱ）利用配对原则证明对于 A_n 的含 5 个元素的自邻集 $B=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$．构造集合 $C=\{n+1-x_5,n+1-x_4,n+1-x_3,n+1-x_2,n+1-x_1\}$，

它们是不相邻的集合也是自邻集，这样可得证结论．

（Ⅲ）自邻集中最大元素为 k 的自邻集的个数为 b_k，$k=1,2,3,\cdots,n$．

$n\geqslant 4$，$a_{n-1}=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$a_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$，$a_n=a_{n-1}+b_n$，

下面只需要证明：$b_n\leqslant a_{n-1}$．

①自邻集含有 $n-2$，$n-1$，n 这三个元素

②自邻集含有 $n-1$，n 这两个元素，不含 $n-2$，且不只有 $n-1$，n 这两个元素，

③自邻集只含有 $n-1$，n 这两个元素，这样的自邻集只有 1 个．

可得 b_n 与 a_{n-1} 的关系，

【解答】解：（Ⅰ）A_4 的所有自邻集有：$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$．

（Ⅱ）证明：对于 A_n 的含 5 个元素的自邻集 $B=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$．

因为对于$\forall x_i\in B$，都有 $x_i-1\in B$ 或 $x_i+1\in B$，$i=1,2,3,4,5$，

所以 $x_2=x_1+1$，$x_4=x_5-1$，$x_3=x_2+1$ 或 $x_3=x_4-1$．

对于集合 $C=\{n+1-x_5,n+1-x_4,n+1-x_3,n+1-x_2,n+1-x_1\}$，

因为 $1\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4<x_5\leqslant n$，所以 $1\leqslant n+1-x_i\leqslant n$，$i=1,2,3,4,5$，

$n+1-x_5<n+1-x_4<n+1-x_3<n+1-x_2<n+1-x_1$，

所以 $C\subseteq A_n$．

因为 $x_2=x_1+1$，$x_4=x_5-1$，$x_3=x_2+1$ 或 $x_3=x_4-1$．

所以 $n+1-x_2=(n+1-x_1)-1$，$n+1-x_4=(,n+1-x_3)+1$，

$n+1-x_3=(n+1-x_4)+1$ 或 $n+1-x_3=(n+1-x_2)-1$，

所以对于任意 $n+1-x_i+1\in\mathbf{C}$ 或 $n+1-x_i-1\in\mathbf{C}$，$i=1,2,3,4,5$，

所以集合 C 也是自邻集.

因为当 n 为偶数时，$x_3 \neq n+1-x_3$，

所以 $B \neq C$.

所以对于集合 A_n 的含 5 个元素的自邻集，在上述对应方法下会存在一个不同的含有 5 个元素的自邻集与其对应.

所以，A_n 的所有含 5 个元素的子集中，自邻集的个数是偶数.

（Ⅲ）证明：记自邻集中最大元素为 k 的自邻集的个数为 b_k，$k=1$，2，3，…，n.

当 $n \geqslant 4$ 时，$a_{n-1}=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$a_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$，

显然 $a_n=a_{n-1}+b_n$.

下面证明：$b_n \leqslant a_{n-1}$.

①自邻集含有 $n-2$，$n-1$，n 这三个元素，记去掉这个自邻集中的元素 n 后的集合为 D

因为 $n-1$．$n-2 \in D$，所以 D 仍是自邻集，且集合 D 中的最大元素是 $n-1$，

所以含有 $n-2$，$n-1$，n 这三个元素的自邻集的个数为 b_{n-1}.

②自邻集含有 $n-1$，n 这两个元素，不含 $n-2$，且不只有 $n-1$，n 这两个元素，

记自邻集除 $n-1$，n 之外最大元素为 m，则 $2 \leqslant m \leqslant n-3$，每个自邻集去掉 $n-1$，n 这两个元素后，仍为自邻集.

此时的自邻集的最大元素为 m，可将此时的自邻集分为 $n-4$；

含有最大数为 2 的集合个数为 b_2，

含有最大数为 3 的集合个数为 b_3，

，……，

含有最大数为 $n-3$ 的集合个数为 b_{n-3}.

则这样的集合共有 $b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}$ 个.

③自邻集只含有 $n-1$，n 这两个元素，这样的自邻集只有 1 个.

综上可得 $b_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+1 \leqslant b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+b_{n-2}=a_{n-1}$，

所以 $b_n \leqslant a_{n-1}$，

所以若 $n \geqslant 4$，求证：$a_n \leqslant 2a_{n-1}$.

故 $n \geqslant 4$ 时，$a_n \leqslant 2a_{n-1}$ 得证.

【点评】本题为集合与数列的综合类考题，是集合类的新定义，关键理解新定义并通过新定义进行求解.