2021 北京海淀高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.（4 分）在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以 Ox 为始边，终边经过点 $(-3,4)$，则 $\cos\theta=$（　　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

2.（4 分）设 $a\in R$．若 $(2+i)(a-i)=-1-3i$，则 $a=$（　　）

A．-1　　B．-2　　C．1　　D．2

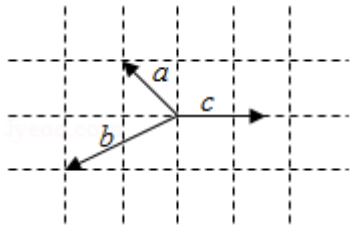
3.（4 分）已知 $a=0.3^{1.5}$，$b=\log_{1.5}0.3$，$c=1.5^{0.3}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

4.（4 分）已知 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，$P(x_0,\ y_0)$ 是该抛物线上的一点．若 $|PF|>2$，则（　　）

A．$x_0\in(0,1)$　　B．$x_0\in(1,+\infty)$　　C．$y_0\in(2,+\infty)$　　D．$y_0\in(-\infty,2)$

5.（4 分）向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，若 $\vec{e}$ 为与 $\vec{c}$ 同方向的单位向量，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}=$（　　）



A．1.5　　B．2　　C．-4.5　　D．-3

6.（4 分）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2+4x-6y+12=0$，则 x 的最大值是（　　）

A．3　　B．2　　C．-1　　D．-3

7.（4 分）已知指数函数 $f(x)=a^x$，将函数 $f(x)$ 的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标扩大为原来的 3 倍，得到函数 $g(x)$ 的图象，再将 $g(x)$ 的图象向右平移 2 个单位长度，所得图象恰好与函数 $f(x)$ 的图象重合，则 a 的值是（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

8.（4 分）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图1），点 P 在侧面 CDD_1C_1 内（包括边界）．若三棱锥 B_1-ABP 的俯视图为等腰直角三角形（如图2），则此三棱锥的左视图不可能是（　　）

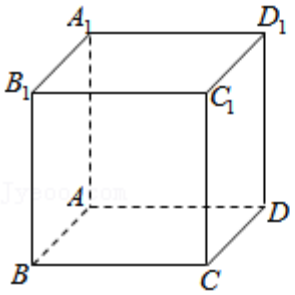


图 1

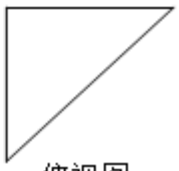
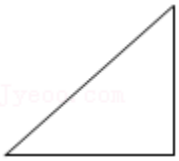
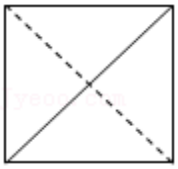
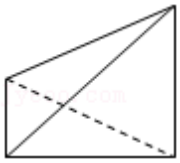
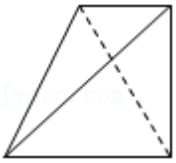


图 2

A．

B．

C．

D．

9．（4 分）已知实数 α，β，“$\alpha+\beta=2k\pi$，$k\in Z$”是“$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$”的(　　)66666666666

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．（4 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2, x\geqslant a\\ |x+a|, x<a\end{cases}$，若对于任意正数 k，关于 x 的方程 $f(x)=k$ 都恰有两个不相等的实数根，则满足条件的实数 a 的个数为(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．无数

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．（5 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-2a_n=0(n=1，2，\cdots)$，则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为____.

12．（5 分）已知 $(1+2x)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 16，则 $n=$____；各项系数之和为____.（用数字作答）

13．（5 分）在 ΔABC 中，$a=3$，$b=7$，$\angle B=\frac{2\pi}{3}$，则 ΔABC 的面积为____.

14．（5 分）已知双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点为 F_1，A，B 为双曲线 M 上的两点，O 为坐标原点．若四边形 F_1ABO 为菱形，则双曲线 M 的离心率为____.

15．（5 分）普林斯顿大学的康威教授于 1986 年发现了一类有趣的数列并命名为“外观数列”（*Look and say sequence*），该数列的后一项由前一项的外观产生．以 $i(i\in N, 0\leqslant i\leqslant 9)$ 为首项的“外观数列”记作 A_i，其中 A_1 为 1，11，21，1211，111221，…，即第一项为 1，外观上看是 1 个 1，因此第二项为 11；第二项外观上看是 2 个 1，因此第三项为 21；第三项外观上看是 1 个 2，1 个 1，因此第四项为 1211，…，按照相同的规则可得其它 A_i，例如 A_3 为 3，13，1113，3113，132113，…．给出下列四个结论：

①若 A_i 的第 n 项记作 a_n，A_j 的第 n 项记作 b_n，其中 $2\leqslant i<j\leqslant 9$，则 $\forall n\in N^*$，$a_n-b_n=i-j$；

② A_1 中存在一项，该项中某连续三个位置上均为数字 3；

③ A_1 的每一项中均不含数字 4；

④对于 $k\geqslant 2$，$i\neq 1$，A_i 的第 k 项的首位数字与 A_1 的第 $k+2$ 项的首位数字相同．

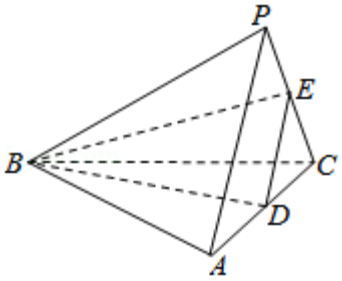
其中所有正确结论的序号是____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．（14 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$BC\perp AC$，$BC\perp PC$，$AC=BC=6$，$PA=PC=5$，D，E 分别是 AC，PC 的中点．

（Ⅰ）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求二面角 $A-DE-B$ 的余弦值．



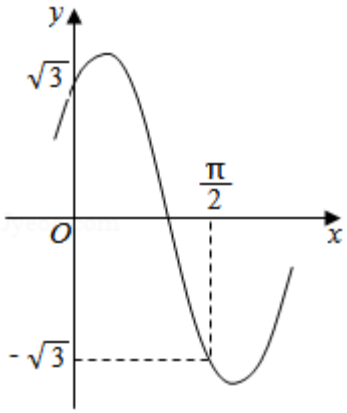
17．（14 分）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示．

（Ⅰ）直接写出 ω 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②中选择一个作为已知，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值．

条件①：直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

条件②：$(\frac{\pi}{3}$，$0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心．



18．（14 分）为迎接 2022 年北京冬季奥运会，普及冬奥知识，某地区小学联合开展了“冰雪答题王”冬奥知识竞赛活动．现从参加该活动的学生中随机抽取了 30 名学生，将他们的竞赛成绩（单位：分）用茎叶图记录如图：

男						女								
					5	8								
			8	0	6	6	9							
		9	8	5	7	0	5	6	6	6	8	8		
8	7	6	4	1	8	6	6							
8	6	2	2	1	9	5	8	8						

（Ⅰ）从该地区参加该活动的男生中随机抽取 1 人，估计该男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率；

（Ⅱ）从该地区参加该活动的全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 2 人，估计这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的概率；

（Ⅲ）为便于普及冬奥知识，现从该地区某所小学参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机选取 10 名男生、10 名女生作为冬奥宣传志愿者．记这 10 名男生竞赛成绩的平均数为 μ_1，这 10 名女生竞赛成绩的平均数为 μ_2，能否认为 $\mu_1 > \mu_2$，说明理由．

19．（14 分）椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，E 是椭圆 C 上一点，且 $|F_1F_2|=2$，$|EF_1|+|EF_2|=4$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）M，N 是 y 轴上的两个动点（点 M 与点 E 位于 x 轴的两侧），$\angle MF_1N=\angle MEN=90°$，直线 EM 交 x 轴于点 P，求 $\frac{|EP|}{|PM|}$ 的值．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=x-a\ln x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，\ f\ (1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，记较小的实数根为 x_0，求证：$(a-1)x_0>a$．

21．（14 分）已知有限集 X，Y，定义集合 $X-Y=\{x|x\in X$，且 $x\notin Y\}$，$|X|$ 表示集合 X 中的元素个数．

（Ⅰ）若 $X=\{1，2，3，4\}$，$Y=\{3，4，5\}$，求集合 $X-Y$ 和 $Y-X$，以及 $|(X-Y)\bigcup(Y-X)|$ 的值；

（Ⅱ）给定正整数 n，集合 $S=\{1，2，\cdots，n\}$．对于实数集的非空有限子集 A，B，定义集合 $C=\{x|x=a+b$，$a\in A$，$b\in B\}$．

①求证：$|A-S|+|B-S|+|S-C|\geqslant 1$；

②求 $|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|$ 的最小值．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】由任意角的三角函数的定义即可求解 $\cos\theta$ 的值.

【解答】解：因为角 θ 以 Ox 为始边，终边经过点 $(-3,4)$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\dfrac{3}{5}$.

故选：C.

【点评】本题考查任意角的三角函数的定义，是基础题.

2.【分析】利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数相等的条件列式求解 a 值.

【解答】解：由 $(2+i)(a-i)=-1-3i$，

得 $2a-2i+ai-i^2=(2a+1)+(a-2)i=-1-3i$，

$\therefore\begin{cases}2a+1=-1\\a-2=-3\end{cases}$，解得 $a=-1$.

故选：A.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数相等的条件，是基础题.

3.【分析】利用有理指数幂与对数的运算性质分别比较 a，b，c 与 0 和 1 的大小得答案.

【解答】解：$\because 0<a=0.3^{1.5}<0.3^0=1$，

$b=\log_{1.5}0.3<\log_{1.5}1=0$，

$c=1.5^{0.3}>1.5^0=1$，

$\therefore b<a<c$.

故选：B.

【点评】本题考查对数值的大小比较，考查有理指数幂与对数的运算性质，是基础题.

4.【分析】求出抛物线的焦点和准线方程，设出 P 的坐标，运用抛物线的定义，可得 $|PF|=d$（d 为 P 到准线的距离），即可得到所求值.

【解答】解：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，

准线 l 为 $x=-1$，

$P(x_0,\ y_0)$ 是该抛物线上的一点．若 $|PF|>2$，

则由抛物线的定义，可得 $|PF|=d$（d 为 P 到准线的距离），

即有 $x_0+1>2$，

解得，$x_0>1$，

故选：B.

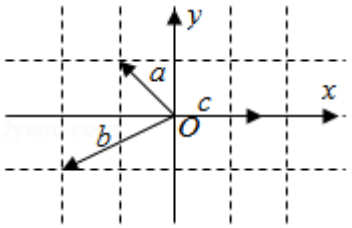
【点评】本题考查抛物线的定义、方程和性质，考查运算能力，属于基础题.

5.【分析】利用已知条件表示 $\vec{a}+\vec{b}$，然后求解向量的数量积即可.

【解答】解：建立坐标系如图，$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(-2,-1)$，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}=(-1-2,\ 1-1)\cdot(1,\ 0)=-3$.

故选：D.



【点评】本题考查向量的数量积的求法与应用，是基础题.

6.【分析】根据题意，将$x^2+y^2+4x-6y+12=0$变形为$(x+2)^2+(y-3)^2=1$，则有$-1\leqslant x+2\leqslant 1$，分析可得$x$的取值范围，即可得答案.

【解答】解：根据题意，$x^2+y^2+4x-6y+12=0$，即$(x+2)^2+(y-3)^2=1$，

则有$-1\leqslant x+2\leqslant 1$，解可得$-3\leqslant x\leqslant -1$，

即x的最大值是-1，

故选：C.

【点评】本题考查圆的标准方程的应用，涉及圆的标准方程的形式，属于基础题.

7.【分析】根据函数图象变换法则求出函数的解析式，建立方程关系进行求解即可.

【解答】解：将函数$f(x)$的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标扩大为原来的3倍，得到函数$g(x)$的图象，

则$g(x)=3a^x$，再将$g(x)$的图象向右平移2个单位长度，得到$y=3a^{x-2}=\frac{3}{a^2}\cdot a^x$，

所得图象恰好与函数$f(x)$的图象重合，

则$\frac{3}{a^2}=1$，即$a^2=3$，$a=\sqrt{3}$，

故选：D.

【点评】本题主要考查函数图象的变换，利用平移变换求出函数的解析式是解决本题的关键，是基础题.

8.【分析】利用俯视图判断P的位置，然后判断左视图的情况，推出结果.

【解答】解：由题意可知P在侧棱DD_1上，如果P与D重合，左视图为A；

如果P与D_1重合，左视图为：B；

如果P在DD_1的中点时，左视图为C；

所以左视图不可能为D；

故选：D.

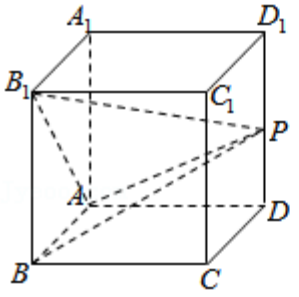


图1

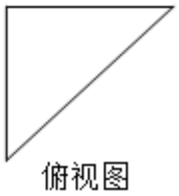


图2

【点评】本题考查简单几何体的三视图的应用，是基础题.

9.【分析】由“$\alpha+\beta=2k\pi(k\in Z)$”$\Rightarrow$右边$=\sin(\alpha+\beta)=0$，左边$=\sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\sin(2k\pi-\alpha)=0$．即可判断出正误．反之：若$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$，可得$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，可得：$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$或$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$，解出即可判断出关系.

【解答】解：由“$\alpha+\beta=2k\pi(k\in Z)$”$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=0$，

$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\sin(2k\pi-\alpha)=\sin\alpha-\sin\alpha=0$．$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$.

反之不成立：若$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$，则$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，可得：

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2})=0$，可得：$\frac{\alpha+\beta}{2}=k\pi$，或$\frac{\alpha+\beta}{2}=2k\pi\pm\frac{\alpha-\beta}{2}$.

化为：$\alpha+\beta=2k\pi$，或$\beta=2k\pi$，或$\alpha=2k\pi$，$(k\in Z)$.

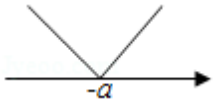
$\therefore$“$\alpha+\beta=2k\pi(k\in Z)$”是“$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$”的充分不必要条件.

故选：A.

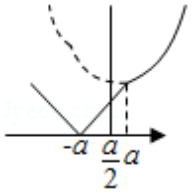
【点评】本题考查了简易逻辑的判定、三角函数求值、和差公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

10.【分析】分情况讨论，并作出大致图象，由图象结合题意分析即可得解.

【解答】解：函数$y=|x+a|$的图象形状大致如下，



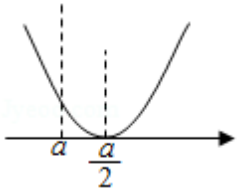
①当$a>0$时，要使$f(x)=k$有两个不相等的实数根，即$f(x)$的图象与直线$y=k$有两个交点，如图，



当$y=x^2-ax+2$的对称轴$x=\frac{a}{2}$在$x=a$的左边，且两段在a处相交时，可满足题意，此时$\begin{cases}0<\frac{a}{2}<a\\a^2-a\cdot a+2=|a+a|\end{cases}$，

解得$a=1$；

②当$a<0$时，如图，



要满足条件，需在$x=a$处相接，且$y=x^2-ax+2$在$x=\frac{a}{2}$处的函数值为0，则$\begin{cases}a^2-a\cdot a+2=|a+a|\\\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+2=0\end{cases}$，无解；

③当 $a=0$ 时， $f(x)=\begin{cases}x^2+2, x\geqslant 0\\ |x|, x<0\end{cases}$，显然不合题意；

综上，满足条件的 a 有 1 个.

故选： B .

【点评】本题考查函数零点与方程根的关系，考查分类讨论思想及数形结合思想，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.【分析】根据题意判断数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，再计算其前 6 项和.

【解答】解：数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2$ ， $a_{n+1}-2a_n=0$ ，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

其前 6 项和为 $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=2^7-2=126$.

故答案为：126.

【点评】本题考查了等比数列的定义与前 n 项和公式计算问题，是基础题.

12.【分析】利用二项展开式的二项式系数和为 2^n ，列出方程求出 n ；再令 $x=1$ 可得结论.

【解答】解： $(1+2x)^n$ 的展开式中二项式系数之和为 2^n ，

$\therefore 2^n=16$ ，解得 $n=4$ ，

$\therefore (1+2x)^n=(1+2x)^4$ ，令 $x=1$ 可得各项系数之和为： $3^4=81$ ，

故答案为 4，81.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式系数的性质，属基础题.

13.【分析】根据余弦定理求出 c ，再求出三角形的面积即可.

【解答】解： $\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ ，

$\therefore 49=9+c^2-6c\cdot(-\frac{1}{2})$ ，解得： $c=5$ 或 $c=-8$ （舍），

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ ，

故答案为： $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【点评】本题考查了求三角形的面积公式，考查余弦定理的应用，是基础题.

14.【分析】利用已知条件，求出 A 的坐标，代入双曲线方程，转化求解离心率即可.

【解答】解：双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点为 F_1 ， A ， B 为双曲线 M 上的两点， O 为坐标原点.

四边形 F_1ABO 为菱形，可得 $A(-\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}c)$ ， $B(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}c)$ ，

所以 $\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4c^2-4a^2}=1$ ，

即 $e^4-8e^2+4=0$ ， $e>1$ ，

可得 $e^2=4+2\sqrt{3}$，

所以 $e=\sqrt{3}+1$．

故答案为：$\sqrt{3}+1$．

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，考查转化思想以及计算能力，是中档题．

15．【分析】列出 A_i，A_j 的前 4 项，观察规律，可判断①的正误；利用反证法可判断②的正误；利用②中的结论可判断③的正误；根据 A_i 和 A_1 各项首位数字出现的周期性可判断④的正误．

【解答】解：对于①，$a_1=i$，$a_2=1i$，$a_3=111i$，$a_4=311i$，…，$a_n=\cdots i$，

$b_1=j$，$b_2=1j$，$b_3=111j$，$b_4=311j$，…，$b_n=\cdots j$，

由递推右，随着 n 的增大，a_n 和 b_n 每一项除了最后一位不同外，其余各数位都相同，

$\therefore a_n-b_n=i-j$，故①正确；

对于②，若 A_1 中存在一项，该项中连续三个位置上的数字均为 3，即 $a_n=\cdots 333\cdots$，

由题中定义可知，a_{n-1} 必有连续三个位置上的数字均为 3，即 $a_{n-1}=\cdots 333\cdots$，…，

以此类推可知，a_1 中必有三个位置上的数字均为 3，这与 $a_1=1$ 矛盾，故②错误；

对于③，由②知，A_1 中的每一项不会出现某连续三个数位上都是 3，

故 A_1 中每一项只会出现 1，2，3，故③正确；

对于④，对于 $k\geqslant 2$，$i\neq 1$，有 $a_1=i$，$a_2=1i$，$a_3=111i$，$a_4=311i$，$a_5=13211i$，$a_6=111312211i$，…，

由上可知，记数列 $\{a_n\}$ 的首位数字构成数列 $\{c_n\}$，

则数列 $\{c_n\}$ 为：i，1，1，3，1，1，3，…，且当 $k\geqslant 2$ 时，$c_{k+3}=c_k$；

记 A_1 的第 k 项为 b_k，则 $b_1=1$，$b_2=11$，$b_3=21$，$b_4=1211$，$b_5=111221$，$b_6=312211$，$b_7=13112221$，

$b_8=1113213211$，…

记数列 $\{b_n\}$ 的首位数字构成数列 $\{d_n\}$．

则 $\{d_n\}$ 为：1，1，2，1，1，3，1，1，3，…，且当 $k\geqslant 4$ 时，$d_{k+3}=d_k$，

由上可知，$c_2=d_4$，$c_3=d_5$，$c_4=d_6$，…，

$\therefore$ 当 $k\geqslant 2$ 时，$c_k=d_{k+2}$，故④正确．

故答案为：①③④．

【点评】本题考查命题真假的判断，考查数列中的新定义，解题时要紧扣“外观数列”的定义，考查数列的规律、数列的周期性等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是中档题．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．【分析】（Ⅰ）证明 $BC\perp$ 平面 PAC，得出平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）连接 PD，过 C 作 $CH//PD$，得 $CH\perp AC$，以 C 为原点，CB、CA、CH 为 x、y、x 轴建立空间直角坐标系，用坐标表示向量，求出平面 DEB 的法向量 $\vec{n}$ 和平面 ADE 的法向量 $\vec{m}$，计算 $\cos<\vec{m}$，$\vec{n}>$ 即可．

【解答】解：（Ⅰ）因为 $BC\perp AC$，$BC\perp PC$，$AC\bigcap PC=C$，$AC\subset$ 平面 PAC，$PC\subset$ 平面 PAC，

所以 $BC\perp$ 平面 PAC，

又 $BC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

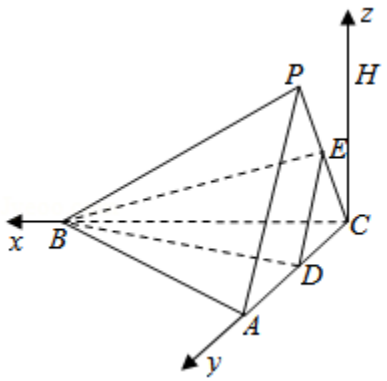
（Ⅱ）连接 PD，因为 $PA=PC$，D 是 AC 的中点，所以 $AD=DC$，$PD\perp AC$；

过 C 作 $CH//PD$，则 $CH\perp AC$，

因为 $BC\perp$ 平面 PAC，$CH\subset$ 平面 PAC，所以 $BC\perp CH$；

又因为 $BC\perp AC$，

以 C 为坐标原点，分别以 CB、CA、CH 为 x、y、x 轴建立空间直角坐标系，如图所示：



因为 $AC=6$，$PC=5$，所以 $PD=4$，

因为 $BC=6$，所以 $C(0，0，0)$，$B(6，0，0)$，$A(0，6，0)$，$D(0，3，0)$，$P(0，3，4)$，

因为 E 是 PC 的中点，所以 $E(0，\frac{3}{2}，2)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(0，-\frac{3}{2}，2)$，$\overrightarrow{DB}=(6，-3，0)$．

设平面 DEB 的法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}y+2z=0\\ 6x-3y=0\end{cases}$，令 $x=-2$，则 $y=-4$，$z=-3$，所以 $\vec{n}=(-2，-4，-3)$．

由（Ⅰ）知，$BC\perp$ 平面 PAC，取平面 ADE 的一个法向量为 $\vec{m}=(1，0，0)$，

计算 $\cos<\vec{m}，\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\frac{-2+0+0}{\sqrt{1+0+0}\times\sqrt{4+16+9}}=-\frac{2\sqrt{29}}{29}$；

所以二面角 $A-DE-B$ 的余弦值是 $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$．

【点评】本题考查了空间中的垂直关系应用问题，也考查了利用空间直角坐标系求二面角的余弦值问题，是中档题．

17.【分析】（Ⅰ）由图象可得函数 $f(x)$ 的周期，由周期公式即可求得 ω 的值；

（Ⅱ）利用三角函数的性质求出 φ 和 A 的值，从而可求得 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}，\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值．

【解答】解：（Ⅰ）由图象可得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$．

（Ⅱ）条件①：直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴，

所以 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解得 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=A\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，由图象过点 $(0,\sqrt{3})$，

所以 $A\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，解得 $A=2$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

当 $x\in[-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}]$，

$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[\frac{1}{2},\ 1]$，所以 $f(x)\in[1,\ 2]$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 1.

条件②：$(\frac{\pi}{3},\ 0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心，

所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$，$\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in Z$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=A\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，由图象过点 $(0,\sqrt{3})$，

所以 $A\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，解得 $A=2$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

当 $x\in[-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}]$，

$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[\frac{1}{2},\ 1]$，所以 $f(x)\in[1,\ 2]$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 1.

【点评】本题主要考查由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象确定其解析式，三角函数的图象与性质，考查运算求解能力，属于中档题.

18.【分析】（Ⅰ）由茎叶图可知，随机抽取的 30 名学生中男生有 15 名，其中竞赛成绩在 90 分以上的学生有 5 名，由此能求出从该地区参加该活动的男生中随机抽取 1 人，该男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率估计值.

（Ⅱ）记 $A_i(i=1,2)$ 表示“第 i 名男生的竞赛成绩在 90 分以上”，$B_j(j=1,2)$ 表示“第 j 名女生的竞赛成绩在 90 分以上”，C 表示“这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多”，从该地区参加该

活动的女生中随机选 1 人，该生生竞赛成绩在 90 分以上的概率估计为$\frac{1}{5}$，这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的概率为 P（C）$=P(A_1A_2\overline{B_1}\,\overline{B_2}+A_1A_2\overline{B_1}B_2+A_1A_2B_1\overline{B_2}+\overline{A_1}A_2\overline{B_1}\,\overline{B_2}+A_1\overline{A_2}\,\overline{B_1}\,\overline{B_2})$，由此能求出结果.

（Ⅲ）上述 10 名男生，10 名女生的竞赛成绩的数据是随机的，μ_1，μ_2 是随机的，无法确定是否有 $\mu_1>\mu_2$.

【解答】解：（Ⅰ）由茎叶图可知，随机抽取的30名学生中男生有15名，其中竞赛成绩在90分以上的学生有5名，

$\therefore$随机抽取的 15 名男生中竞赛成绩在 90 分以上的频率为$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$，

$\therefore$从该地区参加该活动的男生中随机抽取 1 人，

该男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率估计为$\frac{1}{3}$.

（Ⅱ）记 $A_i(i=1,2)$ 表示“第 i 名男生的竞赛成绩在 90 分以上”，

$B_j(j=1,2)$ 表示“第 j 名女生的竞赛成绩在 90 分以上”，

C 表示“这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多”，

同（Ⅰ），从该地区参加该活动的女生中随机选 1 人，该生生竞赛成绩在 90 分以上的概率估计为$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，

则这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的概率为：

P（C）$=P(A_1A_2\overline{B_1}\,\overline{B_2}+A_1A_2\overline{B_1}B_2+A_1A_2B_1\overline{B_2}+\overline{A_1}A_2\overline{B_1}\,\overline{B_2}+A_1\overline{A_2}\,\overline{B_1}\,\overline{B_2})$

$=P(A_1)P(A_2)P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})+P(A_1)P(A_2)P(\overline{B_1})P(B_2)+P(A_1)P(A_2)P(B_1)P(\overline{B_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{5})\times(1-\frac{1}{5})+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{5})\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times(1-\frac{1}{5})+(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{5})\times(1-\frac{1}{5})+\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{5})\times(1-\frac{1}{5})$

$=\frac{88}{225}$.

（Ⅲ）不能认为 $\mu_1>\mu_2$，理由如下：

上述 10 名男生，10 名女生的竞赛成绩的数据是随机的，

$\therefore\mu_1$，μ_2 是随机的，

$\therefore$无法确定是否有 $\mu_1>\mu_2$.

【点评】本题考查概率、平均数的求法，考查茎叶图、古典概型、相互独立事件概率乘法公式等基础知识，考查运算求解能力、数据分析能力等数学核心素养，是中档题.

19.【分析】（Ⅰ）由题意可得 $c=1$，$a=2$，由 a，b，c 的关系，可得 b，进而得到所求椭圆方程；

（Ⅱ）设 $M(0,m)$，$N(0,n)$，$E(x_0$，$y_0)$，由向量垂直的数量积为 0，可得 m，n 的关系，结合点 E 满足椭圆方程，换整理，解方程可得 $y_0=-3m$，即可得到所求值.

【解答】解：（Ⅰ）由 $|F_1F_2|=2$，即 $2c=2$，$c=1$，

由 $|EF_1|+|EF_2|=4$，可得 $2a=4$，即 $a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（Ⅱ）设 $M(0,m)$， $N(0,n)$， $E(x_0$， $y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

由 $F_1(-1,0)$， $F_2(1,0)$，因为 $\angle MF_1N=90°$，所以 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=(1$， $m)\cdot(1$， $n)=1+mn=0$，即 $mn=-1$，

又因为 $\angle MEN=90°$，所以 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{NE}=(x_0$， $y_0-m)\cdot(x_0$， $y_0-n)=x_0^2+y_0^2-(m+n)y_0+mn=0$，

因为 $mn=-1$，所以 $n=-\frac{1}{m}$，且 $m\neq 0$，所以 $x_0^2+y_0^2-(m-\frac{1}{m})y_0-1=0$，

因为 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，所以 $x_0^2=4-\frac{4}{3}y_0^2$，

所以 $4-\frac{4}{3}y_0^2+y_0^2-(m-\frac{1}{m})y_0-1=0$，

即 $y_0^2+3(m-\frac{1}{m})y_0-9=0$，即 $(y_0+3m)(y_0-\frac{3}{m})=0$，

因为 M， E 位于 x 轴的两侧， y_0 与 m 异号，所以 $y_0=-3m$，

即 $\frac{|EP|}{|PM|}=\frac{|y_0|}{|m|}=3$.

【点评】本题考查椭圆的方程和性质，以及向量垂直的条件：数量积为 0，考查方程思想和运算能力，属于中档题.

20.【分析】（Ⅰ）求出导数，求出切点和切线的斜率，由点斜式方程，即可得到切线方程；

（Ⅱ）求出 $f(x)$ 的定义域和导函数 $f'(x)$，再对 a 分类讨论，利用导数与单调性的关系即可求解；

（Ⅲ）分析可得要证 $(a-1)x_0>a$， $x_0-lnx_0-1>0$，令 $g(x_0)=x_0-lnx_0-1$，利用导数证得 $g(x_0)>0$，即可得证.

【解答】（Ⅰ）解：由 $f(x)=x-alnx$，可得 $f'(x)=1-\frac{a}{x}$，

则 f'（1）$=1-a$，又 f（1）$=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1$， f（1）$)$ 处的切线方程为 $y-1=(1-a)(x-1)$，

即 $y=(1-a)x+a$.

（Ⅱ）解： $f(x)=x-alnx$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，

当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x>a$，令 $f'(x)<0$，可得 $0<x<a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

（Ⅲ）证明：由（Ⅱ）可知，当 $a>0$ 时， $f(x)=x-alnx=0$ 才有两个不相等的实根，且 $x_0>0$，

则要证 $(a-1)x_0>a$，即证 $\frac{a-1}{a}>\frac{1}{x_0}$，即证 $1-\frac{1}{a}>\frac{1}{x_0}$，

而 $x_0-alnx_0=0$，则 $a=\frac{x_0}{lnx_0}(x_0\neq 1$，否则方程不成立），

所以即证 $1-\frac{lnx_0}{x_0}>\frac{1}{x_0}$，化简得 $x_0-lnx_0-1>0$，

令 $g(x_0)=x_0-lnx_0-1$，则 $g'(x_0)=1-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-1}{x_0}$，

当$0<x_0<1$时，$g'(x_0)<0$，$g(x_0)$单调递减，

当$x_0>1$时，$g'(x_0)>0$，$g(x_0)$单调递增，

所以$g(x_0)\geqslant g$（1）$=0$，而$x_0\neq 1$，

所以$g(x_0)>0$，

所以$(a-1)x_0>a$，得证.

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的单调性，导数的几何意义，不等式的证明，考查分类讨论思想、逻辑推理与运算求解能力，属于难题.

21.【分析】（Ⅰ）根据题意直接可以得出答案；

（Ⅱ）①分$A\bigcup B$中含有一个不在S中的元素及$A\subseteq S$，且$B\subseteq S$两种情形讨论求证；②结合①知，$|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|\geqslant|S-A|+|S-B|+|C-S|+1$，讨论若$A\bigcap S=\varnothing$，或$B\bigcap S=\varnothing$，得$|S-A|+|S-B|\geqslant n$，若$A\bigcap S\neq\varnothing$，且$B\bigcap S\neq\varnothing$，可证得$|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|$的最小值是$n+1$.

【解答】解：（Ⅰ）$X-Y=\{1，2\}$，$Y-X=\{5\}$，$|(X-Y)\bigcup(Y-X)\}=3$；

（Ⅱ）①证明：显然$|X|\geqslant 0$，

若$A\bigcup B$中含有一个不在S中的元素，则$|A-S|+|B-S|\geqslant 1$，即$|A-S|+|B-S|+|S-C|\geqslant 1$，；

若$A\subseteq S$，且$B\subseteq S$，则$|A-S|=|B-S|=0$，此时A中最小的元素$a\geqslant 1$，B中最小的元素$b\geqslant 1$，

$\therefore C$中最小的元素$a+b\geqslant 2$，

$\therefore 1\notin C$，

$\because S=\{1，2，\ldots\ldots，n\}$，

$\therefore|S-C|\geqslant 1$，即$|A-S|+|B-S|+|S-C|\geqslant 1$，

综上，$|A-S|+|B-S|+|S-C|\geqslant 1$；

②由①知，$|A-S|+|B-S|+|S-C|\geqslant 1$，

$\therefore|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|=|A-S|+|S-A|+|B-S|+|S-B|+|C-S|+|S-C|$

$\geqslant|S-A|+|S-B|+|C-S|+1$，

若$A\bigcap S=\varnothing$，或$B\bigcap S=\varnothing$，则$|S-A|+|S-B|\geqslant n$，

若$A\bigcap S\neq\varnothing$，且$B\bigcap S\neq\varnothing$，设$A\bigcap S=\{a_1，a_2，\ldots\ldots，a_s\}$，$B\bigcap S=\{b_1，b_2，\ldots\ldots，b_l\}$，

且$1\leqslant a_1<a_2<\ldots\ldots<a_s\leqslant n$，$1\leqslant b_1<b_2<\ldots\ldots<b_l\leqslant n$，

则$|S-A|=n-s$，$|S-B|=n-l$，

若$s+l\leqslant n$，则$|S-A|+|S-B|=2n-s-l\geqslant n$，

若$s+l>n$，因为$2\leqslant a_1+b_1<a_2+b_2<\ldots\ldots<a_s+b_l$，

$\therefore a_1+b_1$，a_1+b_2，$\ldots\ldots$，a_1+b_l，a_2+b_l，a_3+b_l，$\ldots\ldots$，a_s+a_l这$s+l-1$个数一定在集合C中，且均不等于1，

$\therefore|C-S|\geqslant s+l-1-(n-1)=s+l-n$，

$\therefore|S-A|+|S-B|+|C-S|\geqslant 2n-s-l+(s+l-n)=n$，

$\therefore|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|\geqslant|S-A|+|S-B|+|C-S|+1\geqslant n+1$；

当 $A=B=S$， $C=\{2$，3，……，$2n\}$ 时，

$|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|=n+1$，

$\therefore|(A-S)\bigcup(S-A)|+|(B-S)\bigcup(S-B)|+|(C-S)\bigcup(S-C)|$ 的最小值是 $n+1$．

【点评】本题考查集合中的新定义问题，考查知识迁移能力，逻辑推理能力，对学生的综合数学素养要求较高，属于难题。