2021 北京朝阳高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（4 分）在复平面内，复数 $z=(1-i)^2+1$ 对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

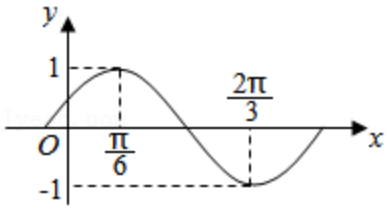
2.（4 分）下列函数是奇函数的是(　　)

A．$y=\cos x$　　B．$y=x^2$　　C．$y=ln|x|$　　D．$y=e^x-e^{-x}$

3.（4 分）已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 $(-2,0)$，则双曲线 C 的一条渐近线方程为(　　)

A．$x+\sqrt{3}y=0$　　B．$\sqrt{3}x+y=0$　　C．$x+\sqrt{3}y-1=0$　　D．$\sqrt{3}x+y-1=0$

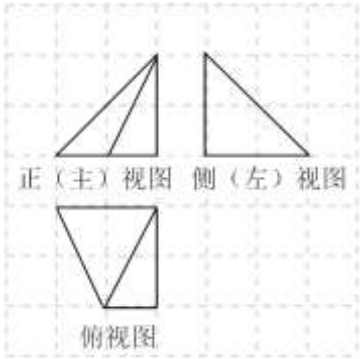
4.（4 分）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的表达式为(　　)



A．$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　B．$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

C．$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$　　D．$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

5.（4 分）某四棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，则该四棱锥的 5 个面的面积中，最大的是(　　)



A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．3

6.（4 分）设 $x>0$，$y>0$，则“$x+y=1$”是“$xy\leqslant\frac{1}{4}$”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7.（4 分）某地对生活垃圾使用填埋和环保两种方式处理．该地 2020 年产生的生活垃圾为 20 万吨，其中 15 万吨以填埋方式处理，5 万吨以环保方式处理．预计每年生活垃圾的总量比前一年增加 1 万吨，同时，因垃圾处理技术越

来越进步，要求从 2021 年起每年通过环保方式处理的生活垃圾量是前一年的 q 倍，若要使得 2024 年通过填埋方式处理的生活垃圾量不高于当年生活垃圾总量的 50%，则 q 的值至少为(　　)

A．$\sqrt[5]{2.4}$　　B．$\sqrt[5]{2.5}$　　C．$\sqrt[4]{2.4}$　　D．$\sqrt[4]{2.5}$

8．（4 分）若圆 $O: x^2+y^2=1$ 上存在点 P，直线 $l: y=k(x+2)$ 上存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QO}$，则实数 k 的取值范围为(　　)

A．$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$　　B．$[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$　　C．$\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$　　D．$\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$

9．（4 分）集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的所有三个元素的子集记为 B_1，B_2，…，$B_n(n\in N^*)$．记 b_i 为集合 $B_i(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ 中的最大元素，则 $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=$(　　)

A．10　　B．40　　C．45　　D．50

10．（4 分）已知抛物线 C 的焦点 F 到准线 l 的距离为 2，点 P 是直线 l 上的动点．若点 A 在抛物线 C 上，且 $|AF|=5$，过点 A 作直线 PF 的垂线，垂足为 H，则 $|PH|\cdot|PF|$ 的最小值为(　　)

A．$2\sqrt{5}$　　B．6　　C．$\sqrt{41}$　　D．$2\sqrt{13}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

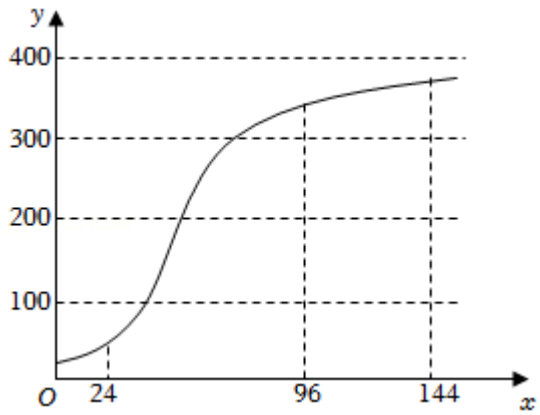
11．（5 分）已知向量 $\vec{a}=(2, m)$，$\vec{b}=(-1, 2)$，且 $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$，则 $m=$____．

12．（5 分）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2=5$，$a_5=2$，则 $a_3+a_5+a_7+a_9=$____．

13．（5 分）已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=$____．

14．（5 分）已知函数 $f(x)=3^x$，$g(x)=|x+a|-2(a\in R)$．若函数 $y=f(g(x))$ 是偶函数，则 $a=$____；若函数 $y=g(f(x))$ 存在两个零点，则 a 的一个取值是____．

15．（5 分）“S”型函数是统计分析、生态学、人工智能等领域常见的函数模型，其图象形似英文字母“S”，所以其图象也被称为“S“型曲线．某校生物兴趣小组在 0.5 毫升培养液中放入 5 个大草履虫，每隔一段时间统计一次大草履虫的数量，经过反复试验得到大草履虫的数量 y（单位：个）与时间 t（单位：小时）的关系近似为一个“S“型函数 $y=\frac{375}{1+74e^{-0.08t}}$．已知函数 $f(t)=\frac{375}{1+74e^{-0.08t}}(t\geqslant 0)$ 的部分图象如图所示，$f'(t)$ 为 (t) 的导函数．



给出下列四个结论：

①对任意 $t_1\in(0, 24)$，$t_3\in(96, 144)$，存在 $t_2\in(24, 96)$，使得 $f'(t_2)>\frac{f'(t_1)+f'(t_3)}{2}$；

②对任意$t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，存在$t_2\in(24,96)$，使得$f'(t_2)=\dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$；

③对任意$t_2\in(24,96)$，存在$t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，使得$f(t_2)>\dfrac{f(t_1)+f(t_3)}{2}$；

④对任意$t_2\in(24,96)$，存在$t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，使得$f'(t_2)=\dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$.

其中所有正确结论的序号是____.

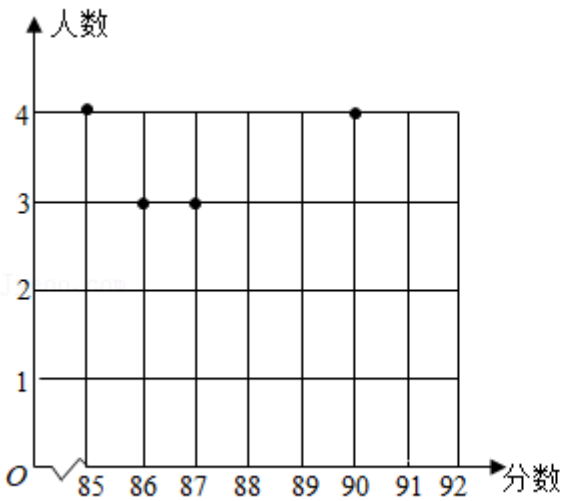
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（13 分）在ΔABC中，$b^2+c^2-a^2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

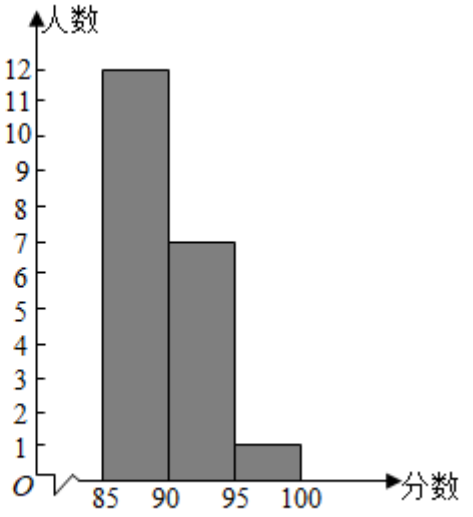
（Ⅰ）求$\tan A$的值；

（Ⅱ）若$3c\sin A=\sqrt{2}a\sin B$，且ΔABC的面积$S=2\sqrt{2}$，求c的值.

17.（14 分）为迎接 2022 年冬奥会，某地区高一、高二年级学生参加了冬奥知识竞赛．为了解知识竞赛成绩优秀（不低于 85 分）学生的得分情况，从高一、高二这两个年级知识竞赛成绩优秀的学生中分别随机抽取容量为 15、20 的样本，得分情况统计如图所示（满分 100 分，得分均为整数），其中高二年级学生得分按[85，90)，[90，95)，[95，100]分组.



高一年级成绩优秀学生得分分布



高二年级成绩优秀学生得分分布

（Ⅰ）从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人，求其得分不低于 90 分的概率；

（Ⅱ）从该地区高二年级参加知识竞赛成绩优秀的学生中随机抽取 3 人，用频率估计概率，记为取出的 3 人中得分不低于 90 分的人数，求X的分布列及数学期望；

（Ⅲ）由于高二年级学生样本原始数据丢失，请根据统计图信息，判断高二年级学生样本得分的最高分至少为多少分时，高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级学生样本得分的平均分，并说明理由.

18.（13 分）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，四边形AA_1C_1C是边长为 4 的正方形，$AB=3$．再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知，并作答.

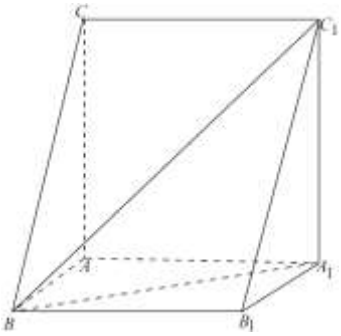
（Ⅰ）求证：$AB\perp$平面AA_1C_1C；

（Ⅱ）求直线BC与平面A_1BC_1所成角的正弦值.

条件①：$BC=5$；

条件②：$AB \perp AA_1$；

条件③：平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C .



19.（15 分）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+1(a\in R)$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f\ (1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 的极值点的个数，并说明理由；

（Ⅲ）若对任意 $x\in R$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（15 分）已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点，直线 $l:y=k(x-2)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N .

（Ⅰ）当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，求 ΔFMN 的面积；

（Ⅱ）设直线 FM，FN 分别与直线 $x=1$ 交于两点 P、Q，线段 MN，PQ 的中点分别为 G，H、点 $A(\frac{1}{5}$，$0)$．当 k 变化时，证明 A，G，H 三点共线.

21.（15 分）已知各项均为整数的数列 $A_N:a_1$，a_2，…，$a_N(N\geqslant 3,N\in N^*)$ 满足 $a_1a_N<0$，且对任意 $i=2$，3，…，N，都有 $|a_i-a_{i-1}|\leqslant 1$．记 $S(A_N)=a_1+a_2+\ldots+a_N$.

（Ⅰ）若 $a_1=3$，写出一个符合要求的 A_6；

（Ⅱ）证明：数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$；

（Ⅲ）若 $S(A_N)$ 是 N 的整数倍，证明：数列 A_N 中存在 a_r，使得 $S(A_N)=N\cdot a_r$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【分析】利用复数的运算法则、几何意义即可得出.

【解答】解：在复平面内，复数 $z=(1-i)^2+1=-2i+1$ 对应的点 $(1,-2)$ 位于第四象限，

故选：D.

【点评】本题考查了复数的运算法则、几何意义，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

2.【分析】根据题意，依次分析选项中函数的奇偶性，综合可得答案.

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，$y=\cos x$，是余弦函数，是偶函数，不符合题意，

对于 B，$y=x^2$，是二次函数，是偶函数，不符合题意，

对于 C，$y=ln|x|$，其定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，有 $ln|-x|=lnx$，是偶函数，不符合题意，

对于 D，$y=e^x-e^{-x}$，其定义域为 R，$e^x-e^{-x}=-(y=e^x-e^{-x})$，则函数为奇函数，符合题意，

故选：D.

【点评】本题考查函数奇偶性的判断，注意函数奇偶性的定义，属于基础题.

3.【分析】利用双曲线的焦点坐标，求解 c，然后求解 b，即可求解双曲线的渐近线方程.

【解答】解：双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 $(-2,0)$，所以 $c=2$，因为 $a=1$，所以 $b=\sqrt{3}$，

所以双曲线的渐近线方程为：$\sqrt{3}x\pm y=0$.

故选：B.

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，是基础题.

4.【分析】根据函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，求出 T、ω 和 φ 的值，即可得出 $f(x)$ 的解析式.

【解答】解：由函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象知，

$\frac{1}{2}T=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\pi$，

解得 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$；

又 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$；

解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$；

由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{6}$ 满足题意，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

故选：A.

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质的应用问题，也考查了数形结合思想，是基础题.

5.【分析】首先把三视图和几何体的直观图之间进行转换，进一步利用几何体的表面积公式的应用求出结果.

【解答】解：根据几何体的三视图转换为直观图为：该几何体为四棱锥体；

如图所示：

求出：$BC=1$，$CD=2$，$AD=2$，$AB=\sqrt{5}$，$PC=2\sqrt{2}$，$PD=2$，$AP=2\sqrt{2}$，$PB=3$，

在ΔABP中，

利用余弦定理：$\cos\angle BAP=\dfrac{8+5-9}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，

故$S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=3$，

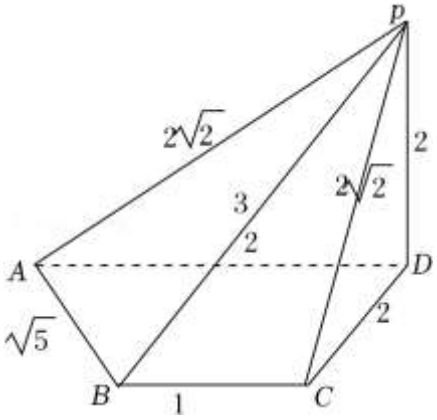
$S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}\times2\times(2+1)=3$，

$S_{\Delta CDP}=S_{\Delta ADP}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，

$S_{\Delta BCP}=\dfrac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

故最大面积为3.

故选：D.



【点评】本题考查的知识要点：三视图和几何体的直观图之间的转换，几何体的表面积公式的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

6.【分析】根据基本不等式的性质和举实例，再结合充分条件和必要条件的定义即可得到结论.

【解答】解：①当$x+y=1$时，$\because x>0$，$y>0$，$\therefore x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，$\therefore xy\leqslant\dfrac{1}{4}$，

当且仅当$x=y$时取等号，$\therefore xy\leqslant\dfrac{1}{4}$，$\therefore$充分性成立，

②当$xy\leqslant\dfrac{1}{4}$时，比如$x=1$，$y=\dfrac{1}{5}$时，$xy\leqslant\dfrac{1}{4}$成立，但$x+y=1$不成立，

$\therefore$必要性不成立，

$\therefore x+y=1$是$xy\leqslant\dfrac{1}{4}$的充分不必要条件.

故选：A.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据基本不等式的性质是解决本题的关键.

7.【分析】由题意分析可知，2024 年的生活垃圾为 24 万吨，根据题意列出不等关系，即可解出.

【解答】解：由题意可知 2024 年的生活垃圾为 24 万吨，

有题意可知 2024 年通过环保方式处理的生活垃圾量为 $5\times q^4$（万吨），

$\therefore 24-5\times q^4\leqslant 24\times\frac{1}{2}$，

解得：$q\geqslant\sqrt[4]{2.4}$，

故选：C.

【点评】本题考查了函数的实际应用，方程思想，学生的数学运算能力，属于基础题.

8.【分析】利用已知条件推出直线与圆相交，转化为圆的到直线的距离小于等于半径，转化求解即可.

【解答】解：圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 P，直线 $l:y=k(x+2)$ 上存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QO}$，

可得：$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$，

解得 $k\in[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

故选：B.

【点评】本题考查直线与圆的位置关系的应用，考查转化思想以及计算能力，是中档题.

9.【分析】本题可以用列举法分析问题，但是用排列组合知识求解更简单.

【解答】解：由题意知：集合 A 中含三个元素的子集共 $C_5^3=10$ 个，$\therefore n=10$，

则在集合 B_i 中含最大元素为 3 的共有 1 个，

在集合 B_i 中含最大元素为 4 的共有 $C_3^2=3$ 个，

在集合 B_i 中含最大元素为 5 的共有 $C_4^2=6$ 个，

$\therefore 3\times1+4\times3+5\times6=45$，

故选：C.

【点评】本题考查子集的问题，借助排列组合知识来分析求解更好.

10.【分析】方法一：由题意首先求得抛物线的方程，设出直线 PF 与 AH 的方程，求出点 H 的坐标，根据点与点的距离公式，结合二次函数的性质即可求出.

方法二：由方法一可得 $A(4,4)$，$F(1,0)$，设 $P(-1,t)$，根据向量的投影的定义即可求出.

【解答】解：方法一：$\because$ 抛物线 C 的焦点 F 到准线 l 的距离为 2，

$\therefore p=2$，

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=4x$，

$\therefore F_1(1,0)$，准线 $x=-1$，

设 $A(x_1,\ y_1)$，

$\because$ 点 A 在抛物线 C 上，且 $|AF|=5$，

$\therefore x_1+\frac{p}{2}=5$，

$\therefore x_1=4$，

$\therefore A(4,4)$，

设直线 $PF: x=my+1$，①，

直线 $AH: y-4=-m(x-4)$，②，

联立方程①②可得 $y_H=\dfrac{4+3m}{1+m^2}$，

$\therefore |PH|=\sqrt{1+m^2}\cdot|-\dfrac{2}{m}-\dfrac{4+3m}{1+m^2}|$，

$|PF|=\sqrt{1+m^2}\cdot|-\dfrac{2}{m}|$，

$\therefore |PH|\cdot|PF|=(1+m^2)\cdot|\dfrac{2(1+m^2)+m(4+3m)}{m(1+m^2)}|\cdot|\dfrac{2}{m}|=2|5+\dfrac{4}{m}+\dfrac{2}{m^2}|$，

设 $\dfrac{1}{m}=t$，

则 $|PH|\cdot|PF|=2|2t^2+4t+5|=2|2(t+1)^2+3|=4(t+1)^2+6$，

当 $t=-1$，即 $m=-1$ 时，$|PH|\cdot|PF|$ 取得的最小值 6，

方法二：由方法一可得 $A(4,4)$，$F(1,0)$，

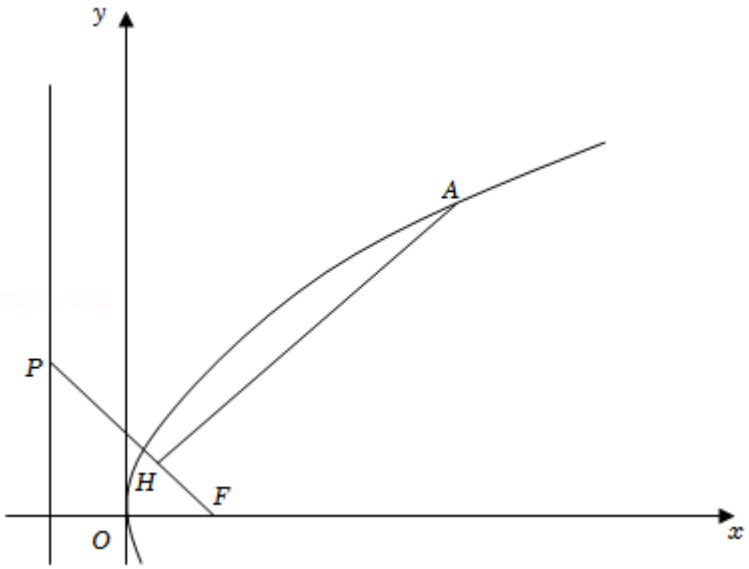
设 $P(-1,t)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(5,4-t)$，$\overrightarrow{PF}=(2,-t)$，

$\therefore |\overrightarrow{PH}|\cdot|\overrightarrow{PF}|=|\overrightarrow{PA}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PF}|}\cdot|\overrightarrow{PF}|=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}=10-t(4-t)=t^2-4t+10=(t-2)^2+6\geqslant 6$，

当且仅当 $t=2$ 时，取得最小值，最小值为 6.

故选：B.



【点评】本题考查了根据抛物线的弦长求参数，抛物线中最短距离，意在考查学生的计算能力和转化能力，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.【分析】根据向量的运算性质计算即可.

【解答】解：$\because \vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(-1,2)$，且$\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$，

$\therefore \vec{a}+2\vec{b}=(2，\ m)+2(-1，\ 2)=(0，\ m+4)=\vec{0}$，

$\therefore m+4=0$，解得：$m=-4$，

故答案为：-4．

【点评】本题考查了向量的坐标运算，是基础题．

12．【分析】直接利用已知条件建立方程组求出数列的通项公式．

【解答】解：（1）设等差数列$\{a_n\}$公差为d，

$\because a_2=5$，$a_5=2$，

$\therefore \begin{cases}a_1+d=5\\a_1+4d=2\end{cases}$，

解得$a_1=6$，$d=-1$，

$\therefore a_n=7-n$，

$\therefore a_3+a_5+a_7+a_9=4a_6=4$，

故答案为：4．

【点评】本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法及应用，属于基础题．

13．【分析】由已知利用诱导公式，二倍角公式化简所求即可得解．

【解答】解：因为$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

所以$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$．

故答案为：$\frac{7}{9}$．

【点评】本题主要考查了诱导公式，二倍角公式在三角函数化简求值中的应用，考查了转化思想，属于基础题．

14．【分析】$f(g(x))=3^{|x+a|-2}$为偶函数，则$|x+a|=|-x+a|$，由此解得a的值；$g(f(x))=|3^x+a|-2$，$a\geqslant 0$时，显然不合题意，则$a<0$，故$g(f(x))=\begin{cases}-3^x-a-2,x<log_3(-a)\\3^x+a-2,x\geqslant log_3(-a)\end{cases}$，则$g(f(x))_{min}=g(\log_3(-a))=-2<0$，

【解答】解：$f(g(x))=3^{|x+a|-2}$为偶函数，则$f(g(-x))=3^{|-x+a|-2}=f(g(x))$，

$\therefore |x+a|=|-x+a|$，则$a=0$；

$g(f(x))=|3^x+a|-2$，

①若$a\geqslant 0$，则$g(f(x))=3^x+a-2$在R上为增函数，至多有一个零点，不合题意；

②若$a<0$，则$g(f(x))=\begin{cases}-3^x-a-2,x<log_3(-a)\\3^x+a-2,x\geqslant log_3(-a)\end{cases}$，则$g(f(x))_{min}=g(\log_3(-a))=-2<0$，

又$x<\log_3(-a)$时，$-3^x-a<-a$，

$\therefore -a-2>0$，解得$a<-2$，

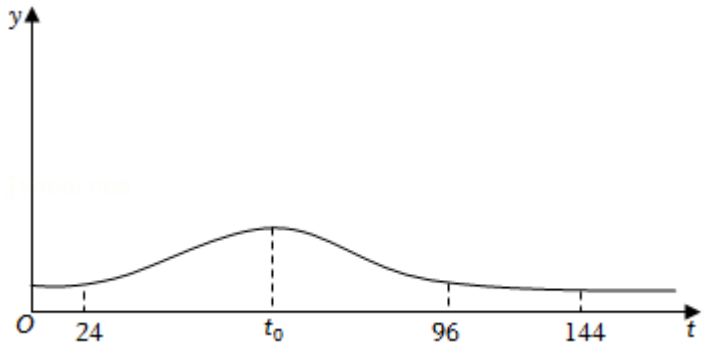
$\therefore a$的一个取值可以是-3（答案不唯一）．

故答案为：0；-3．

【点评】本题考查函数零点与方程根的关系，考查偶函数的定义，考查分类讨论思想及运算求解能力，属于中档题.

15.【分析】根据函数的图象作出导数的图象，根据切线的变化刻画出导数的图象、研究导数与原函数的性质，数形结合能求出结果.

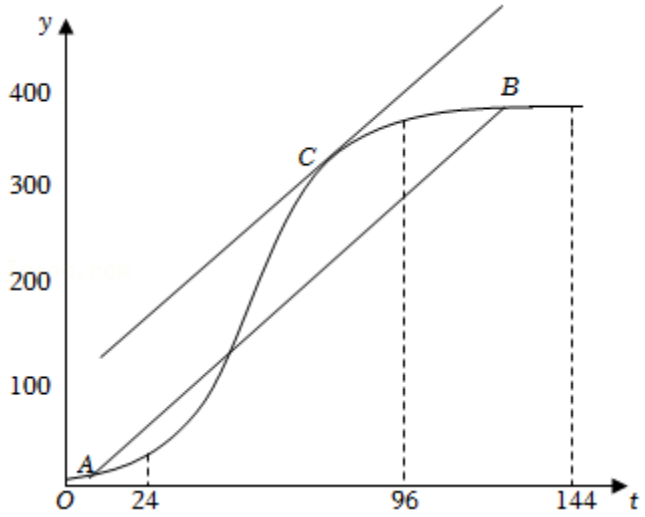
【解答】解：根据函数的图象知导数的图象如下图所示：



设导数 $f'(t)$ 在 $t=t_0$ 取最大值，结合 $f(t)$ 的图象可知 $24<t_0<96$，

且当 $t\in(0,t_0)$ 时，$f'(t)$ 为增函数，在 $(t_0，+\infty)$ 上 $f'(t)$ 为减函数，

对于①，任意 $t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，取 $t_2=t_0$，则 $f'(t_2)>\dfrac{f'(t_1)+f'(t_3)}{2}$，故①成立；

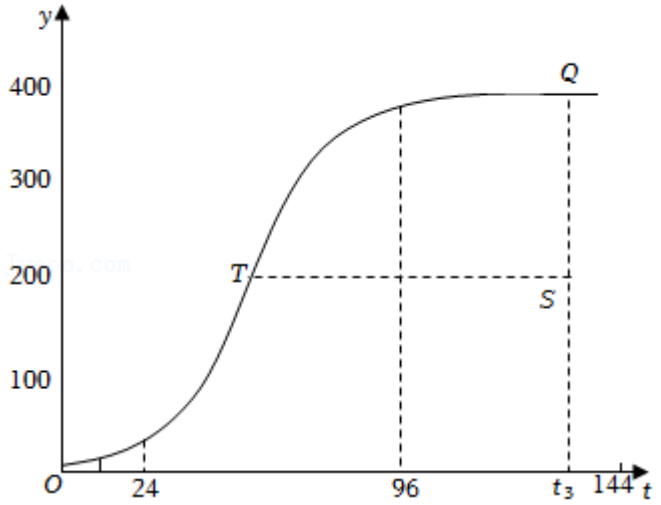


对于②，设 $A(t_1，f(t_1))$，$B(t_2，f(t_2))$，

由 $f(t)$ 的图象的性质可平移直线 B 至 C 处，

此时平移后的直线与 $f(t)$ 图象相切，且 $x_C\in(24,96)$，取 $t_2=x_C$，

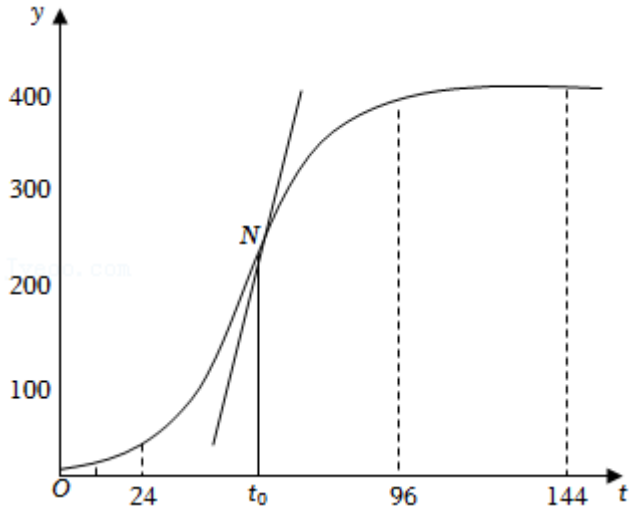
$\therefore f'(t_2)=\dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$，故②正确；



对于③，取如图所示的t_3，设$Q(t_3，\ f(t_3))$，$S(t_3，\ \frac{f(t_3)}{2})$，

过S作横轴的平行线，交$f(t)$的图象于T，由函数的图象特征可得$x_T \in (24,96)$，

取$t_2 = x_T$，则$2f(t_2) = f(t_3) < f(t_1) + f(t_3)$，故③不成立；



对于④，取$N(t_0，\ f(t_0))$，（t_0为①中$f'(t)$最大值点），

则过N的切线“穿过”曲线$y = f(x)$，

曲线上不存在与该切线平行的割线，

否则与导数存在唯一的最大值点矛盾，故④错误．

故答案为：①②．

【点评】本题考查命题真假的判断，考查导数的原函数的图象、切线的变化刻画出导数的图象、研究导数与原函数的性质等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力等数学核心素养，是难题．

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【分析】（Ⅰ）由已知利用余弦定理可求$\cos A$的值，结合范围$A \in (0,\pi)$，利用同角三角函数基本关系式即可求解．

（Ⅱ）由已知利用正弦定理可求$b = \frac{3\sqrt{2}}{2}c$，进而根据三角形的面积公式即可求解c的值．

【解答】解：（Ⅰ）因为$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}bc$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-cos^2A}=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}$，可得 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

（Ⅱ）因为 $3c\sin A=\sqrt{2}a\sin B$，

由正弦定理可得 $3ac=\sqrt{2}ab$，所以 $b=\frac{3\sqrt{2}}{2}c$，

因为 ΔABC 的面积 $S=2\sqrt{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$，可得 $\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}c^2}{2}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$，

所以 $c^2=8$，

所以 $c=2\sqrt{2}$.

【点评】本题主要考查了余弦定理，同角三角函数基本关系式，正弦定理，三角形的面积公式在解三角形中的综合应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

17.【分析】（Ⅰ）设事件 A：从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人，其得分不低于 90 分．利用古典概率计算公式即可得出 P（A）.

(II) 由 (I) 可知：从该地区高二年级参加知识竞赛成绩优秀的学生中随机抽取 1 人，其得分不低于 90 分的概率为 0.4.

由题意可得：$X\sim B(3,0.4)$，X 的可能取值为 0，1，2，3．利用二项分布列概率计算公式即可得出分布列，进而得出数学期望.

(III) 由题意可得：高一年级学生样本得分的平均分 $=87.5$．设高二年级学生样本得分的最高分为 m，由图可知：要使得高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级样本得分的平均分，只需 $\frac{85\times12+90\times7+m}{20}>87.4$，解得 m 即可得出结论.

【解答】解：（Ⅰ）设事件 A：从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人，其得分不低于 90 分．则 P（A）$=\frac{7+1}{20}=\frac{2}{5}$.

$\therefore$ 从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人，其得分不低于 90 分的概率为 $\frac{2}{5}$.

(II) 由 (I) 可知：从该地区高二年级参加知识竞赛成绩优秀的学生中随机抽取 1 人，其得分不低于 90 分的概率为 0.4.

由题意可得：$X\sim B(3,0.4)$，X 的可能取值为 0，1，2，3.

$\therefore P(X=0)=C_3^0\times0.4^0\times0.6^3=0.216$；$P(X=1)=C_3^1\times0.4^1\times0.6^2=0.432$；$P(X=2)=C_3^2\times0.4^2\times0.6=0.288$；

$P(X=3)=C_3^3\times0.4^3=0.064$.

可得 X 分布列：

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

$E(X)=3\times0.4=1.2$.

(*III*) 由题意可得：高一年级学生样本得分的平均分 $=\dfrac{85\times4+86\times3+87\times3+90\times4+92}{15}=\dfrac{1311}{15}=87.5$.

设高二年级学生样本得分的最高分为 m ，

由图可知：要使得高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级样本得分的平均分，只需 $\dfrac{85\times12+90\times7+m}{20}>87.4$ ，解得 $m>98$.

∴高二年级学生样本得分的最高分至少为99分时，高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级学生样本得分的平均分.

【点评】本题考查了二项分布列及其数学期望的计算公式、平均分计算公式、古典概率计算公式、频率分布直方图的应用，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

18.【分析】（Ⅰ）若选择①②，先由勾股定理可得 $AB\perp AC$ ，再结合 $AB\perp AA_1$ ， $AC\bigcap AA_1=A$ ，即可得证；若选择①③，先由勾股定理可得 $AB\perp AC$ ，再利用面面垂直的性质定理即可得证；

（Ⅱ）建立空间直角坐标系，求得各点的坐标，进而求得平面 A_1BC_1 的法向量，再利用向量的夹角公式求解即可.

【解答】解：若选择①②，

（Ⅰ）证明：∵ $AC=4$ ， $AB=3$ ， $BC=5$ ，

∴ $AB\perp AC$ ，

又∵ $AB\perp AA_1$ ， $AC\bigcap AA_1=A$ ，

∴ $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C ；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知， $AB\perp AC$ ， $AB\perp AA_1$ ，

∵四边形 AA_1C_1C 是正方形，

∴ $AC\perp AA_1$ ，

如图，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $A(0，0，0)$ ， $B(3，0，0)$ ， $C(0，0，4)$ ， $A_1(0，4，0)$ ， $C_1(0，4，4)$ ，

∴ $\overrightarrow{A_1B}=(3,-4,0),\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,4),\overrightarrow{BC}=(-3,0,4)$ ，

设平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=3x-4y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=4z=0\end{cases}$ ，则可取 $\vec{n}=(4,3,0)$ ，

设直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}||\vec{n}|}=\dfrac{12}{25}$ ，

∴直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{12}{25}$.

若选择①③，

（Ⅰ）证明：∵ $AC=4$ ， $AB=3$ ， $BC=5$ ，

∴ $AB\perp AC$ ，

又∵平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C ，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1C_1C=AC$ ，

∴ $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C ；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知， $AB\perp AC$ ， $AB\perp AA_1$ ，

∵四边形 AA_1C_1C 是正方形，

∴ $AC \perp AA_1$，

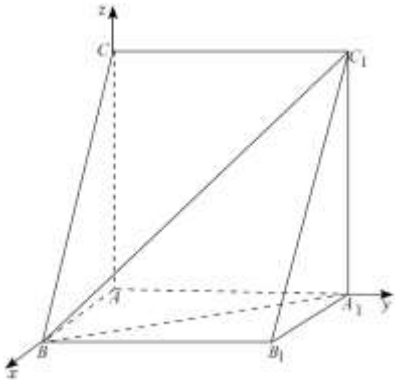
如图，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $A(0，0，0)$，$B(3，0，0)$，$C(0，0，4)$，$A_1(0，4，0)$，$C_1(0，4，4)$，

∴ $\overrightarrow{A_1B}=(3,-4,0),\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,4),\overrightarrow{BC}=(-3,0,4)$，

设平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=3x-4y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=4z=0\end{cases}$，则可取 $\vec{n}=(4,3,0)$，

设直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}||\vec{n}|}=\frac{12}{25}$，

∴直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{12}{25}$．



【点评】本题考查线面垂直的判定以及利用空间向量求解线面角的正弦值，考查逻辑推理能力以及运算求解能力，属于中档题．

19．【分析】（Ⅰ）代入 a 的值，求出函数的导数，计算 f（1），f'（1），求出切线方程即可；

（Ⅱ）求出函数的导数，通过讨论 a 的范围，求出函数的单调区间，求出函数的极值点的个数即可；

（Ⅲ）通过讨论 a 的范围，求出函数的最小值，确定 a 的取值范围即可．

【解答】解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)e^x+1$，f（1）$=1$，

又 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$，故 f'（1）$=e$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f$（1）$)$ 处的切线方程是 $ex-y+1-e=0$；

（Ⅱ）∵ $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+1$，

∴ $f'(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$，

(i) 当 $a\leqslant 0$ 时，有 $e^x-a>0$，令 $f'(x)=0$，解得：$x=0$，

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	递减	极小值	递增

∴当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 只有 1 个极值点，

(ii) 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=0$ 或 $x=lna$，

①当 $0<a<1$ 时，$lna<0$，

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下：

x	$(-\infty,lna)$	lna	$(lna,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

故当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，

②当 $a=1$ 时，$f'(x)=x(e^x-1)\geqslant 0$ 恒成立，

故 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

故当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点，

③当 $a>1$ 时，$lna>0$，

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,lna)$	lna	$(lna,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

故当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，

综上：当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 有 1 个极值点，

当 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；

（Ⅲ）（1）若 $a\leqslant 0$，由（Ⅱ）可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减，在 $(0,+\infty)$ 递增，

故 $f(x)\geqslant f(x)_{min}=f(0)=0$，

故 $a\leqslant 0$ 符合题意，

（2）若 $a>0$，当 $x<0$ 时，$\because (x-1)e^x<0$，

$\therefore f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+1<-\frac{1}{2}ax^2+1$，

又 $f(-\sqrt{\frac{2}{a}})<-\frac{1}{2}a(-\sqrt{\frac{2}{a}})^2+1=0$，

故 $f(x)\geqslant 0$ 不恒成立，故 $a>0$ 不合题意，

综上：a 的取值范围是 $(-\infty,\ 0]$.

【点评】本题考查了切线方程问题，考查函数的单调性，极值，最值问题，考查导数的应用以及分类讨论思想，转化思想，是难题.

20.【分析】（Ⅰ）联立直线方程和椭圆方程，解得交点 M，N，$|MN|$，结合点到直线的距离公式和三角形 大面积公式，可得所求值；

（Ⅱ）联立直线 l 的方程和椭圆方程，运用判别式大于 0 和韦达定理，结合直线的斜率公式和中点坐标公式，三点

共线的条件，即可得证.

【解答】解：（Ⅰ）当$k=-\frac{1}{2}$时，由$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}(x-2)\\x^2+2y^2=2\end{cases}$，解得$M(0,1)$，$N(\frac{4}{3}，\frac{1}{3})$，

$|MN|=\sqrt{\frac{16}{9}+(1-\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

因为$F(-1,0)$到直线$y=-\frac{1}{2}(x-2)$的距离为$d=\frac{3}{\sqrt{5}}$，

所以ΔFMN的面积为$\frac{1}{2}|MN|d=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=1$；

（Ⅱ）证明：设$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-2)\\x^2+2y^2=2\end{cases}$，可得$(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$，

由$\triangle=(-8k^2)2-4(1+2k^2)(8k^2-2)>0$，解得$k^2<\frac{1}{2}$，

所以$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$，

$y_1y_2=k(x_1+x_2-4)=-\frac{4k}{1+2k^2}$，

所以$G(\frac{4k^2}{1+2k^2}，\frac{-2k}{1+2k^2})$，

由题意可得$k^2\neq\frac{1}{18}$，直线AG的斜率$k_{AG}=\frac{\frac{-2k}{1+2k^2}-0}{\frac{4k^2}{1+2k^2}-\frac{1}{5}}=\frac{-10k}{18k^2-1}$，

直线FM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，

则点P的坐标为$(1,\frac{2y_1}{1+x_1})$，

同理可得$Q(1,\frac{2y_2}{1+x_2})$，

因为$\frac{2y_1}{x_1+1}+\frac{2y_2}{x_2+1}=\frac{2k[(x_1-2)(x_2+1)+(x_2-2)(x_1+1)]}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{2k[2x_1x_2-(x_1+x_2)-4]}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}$

$=\frac{-16k}{18k^2-1}$，

所以$H(1,\frac{-8k}{18k^2-1})$，所以直线AH的斜率$k_{AH}=\frac{\frac{-8k}{18k^2-1}-0}{1-\frac{1}{5}}=\frac{-10k}{18k^2-1}$，

因为$k_{AG}=k_{AH}$，

所以 A， G， H 三点共线.

【点评】本题考查椭圆的方程和性质，以及直线和椭圆的位置关系，考查方程思想和运算能力，属于中档题.

21.【分析】（Ⅰ）3，2，1，1，0，–1.（答案不唯一）.

（Ⅱ） a_1， a_N 异号，假设 $a_1<0$， $a_N>0$，设 $T=\{i\mid a_1<0$， $i\in\{1$，2，3，…， $N\}$，设 T 中的最大数为 m，$(1\leqslant m\leqslant N-1)$，令 $k=m+1$，则 $a_k\geqslant 0$，推导出 $a_k=0$，若数列 $A_N:a_1$， a_2，…， $a_N(N\geqslant 3)$ 满足 $a_1<0$， $a_N>0$，且对任意 $i=2$，3，…， N，

都有 $|a_k-a_{k-1}|\leqslant 1$，则存在 a_k，使得 $a_k=0$，由此能证明数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$.

（Ⅲ）设 $t=\dfrac{S(A_N)}{N}$，则 $t\in Z$，设数列 $A_N:a_1$， a_2，…， a_N 中最大的值为 $M>0$，最小值为 $m<0$，则 $m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$，设在数列 A_N 中，$a_i=m$，$a_j=M$，设数列 $B:a_i-t$， $a_{i+1}-t$，…， a_j-t，则数列 B 至少有 3 项，由此入手能证明若 $S(A_N)$ 是 N 的整数倍，则数列 A_N 中存在 a_r，使得 $S(A_N)=N\cdot a_r$.

【解答】解：（Ⅰ）3，2，1，1，0，–1.（答案不唯一）.

（Ⅱ）证明：$\because a_1a_N<0$，$\therefore a_1$， a_N 异号，

假设 $a_1<0$， $a_N>0$，

设 $T=\{i\mid a_1<0$， $i\in\{1$，2，3，…， $N\}$，$\because a_1<0$，$\therefore T\neq\varnothing$，

又 $\because T$ 是有限自然数集，$\therefore$ 可设 T 中的最大数为 m，$(1\leqslant m\leqslant N-1)$，

令 $k=m+1$，则 $a_k\geqslant 0$，

$\because |a_k-a_{k-1}|=a_k-a_{k-1}\leqslant 1$，$\therefore a_k\leqslant 1+a_{k-1}=1+a_m<1$，

$\because 0\leqslant a_k<1$，且 a_k 为整数，$\therefore a_k=0$，

$\therefore$ 若数列 $A_N:a_1$， a_2，…， $a_N(N\geqslant 3)$ 满足 $a_1<0$， $a_N>0$，且对任意 $i=2$，3，…， N，

都有 $|a_k-a_{k-1}|\leqslant 1$，则存在 a_k，使得 $a_k=0$，

若 $a_1>0$， $a_N<0$，则数列 $-a_1$， $-a_2$，…， $-a_N$ 满足 $-a_1<0$， $-a_N>0$，

且对任意 $k=2$，3，…， N，都有 $|(-a_k)-(-a_{k-1})|=|a_k-a_{k-1}|\leqslant 1$，

$\therefore$ 存在 $-a_k$，使得 $-a_k=0$，即存在 a_k，使得 $a_k=0$，

$\therefore$ 数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$.

（Ⅲ）证明：设 $t=\dfrac{S(A_N)}{N}$，则 $t\in Z$，

设数列 $A_N:a_1$， a_2，…， a_N 中最大的值为 $M>0$，最小值为 $m<0$，

$\because N_m<S(A_N)<N_M$，$\therefore m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$，

设在数列 A_N 中，$a_i=m$，$a_j=M$，

若 $i<j$，$\because |a_i-a_j|=M-m\geqslant 1-(-1)=2$，$\therefore j\geqslant i+2$，

设数列 $B:a_i-t$， $a_{i+1}-t$，…， a_j-t，则数列 B 至少有 3 项，

$\because (a_i-t)(a_j-t)=(m-t)(M-t)<0$，且对任意 $k=1$，2，…， $j-1$，

都有$|(a_{i+k}-t))-(a_{i+k-1}-t)|=|a_{i+k}-a_{i+k-1}|\leqslant 1$，

$\therefore$由（Ⅱ）可知存在a_r-t，使得$a_r-t=0(r\in\{i+1，\ i+2，\ \cdots，\ j-1\}$，即$t=\dfrac{S(A_N)}{N}=a_r$，

若$i>j$，设数列$t-a_j$，$t-a_{j+1}$，$\cdots$，$t-a_i$，

同理，存在$t-a_r$，使得$t-a_r=0(r\in\{j+1，\ j+2，\ \cdots，\ i-1\}$，即$t=\dfrac{S(A_N)}{N}=a_r$，

综上，若$S(A_N)$是N的整数倍，则数列A_N中存在a_r，使得$S(A_N)=N\cdot a_r$.

【点评】本题考查数列的求法，考查数列性质的证明，考查运算求解能力、推理论证能力等数学核心素养，是难题。