2021 北京昌平高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

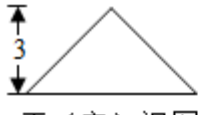
1.（4 分）已知集合 $A=\{-2，-1，0，1，2\}$，$B=\{x\mid x^2\geqslant 1\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A．$\{-1，0，1\}$　　B．$\{-2，-1，1，2\}$　　C．$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$　　D．$\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1\}$

2.（4 分）已知复数 $z=i(1-2i)$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为(　　)

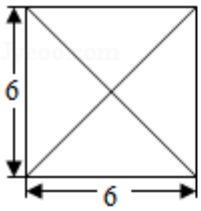
A．2　　B．1　　C．-1　　D．-2

3.（4 分）某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的体积是(　　)



正（主）视图


侧（左）视图



俯视图

A．24　　B．36　　C．54　　D．108

4.（4 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则其渐近线方程为(　　)

A．$y=\pm x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm\sqrt{3}x$　　D．$y=\pm 2x$

5.（4 分）下列函数中，最小正周期为 π 的奇函数是(　　)

A．$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$　　B．$y=\sin|x|$

C．$y=\cos^2 x-\sin^2 x$　　D．$y=\sin x\cos x$

6.（4 分）过原点且倾斜角为 $45°$ 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为(　　)

A．$2\sqrt{2}$　　B．3　　C．$4\sqrt{2}$　　D．8

7.（4 分）设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，则“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8.（4 分）中国历法推测遵循以测为辅，以算为主的原则．例如《周髀算经》里对二十四节气的晷影长的记录中，冬至和夏至的晷影长是实测得到的，其它节气的晷影长则是按照等差数列的规律计算得出的.

二十四节气中，从冬至到夏至的十三个节气依次为：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种、夏至．已知《周髀算经》中记录某年的冬至的晷影长为 13 尺，夏至的晷影长是 1.48 尺，按照上述规律，那么《周髀算经》中所记录的立夏的晷影长应为(　　)

A．3.4 尺　　B．4.36 尺　　C．5.32 尺　　D．21.64 尺

9．（4 分）将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象经过点 $(\frac{2\pi}{3},0)$，则 ω 的最小值是（　　）

A．$\frac{5}{4}$　　B．2　　C．$\frac{12}{5}$　　D．$\frac{13}{4}$

10．（4 分）已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M 是 BB_1 的中点，动点 P 在正方体内部或表面上，且 $MP//$ 平面 ABD_1，则动点 P 的轨迹所形成区域的面积是（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．2

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

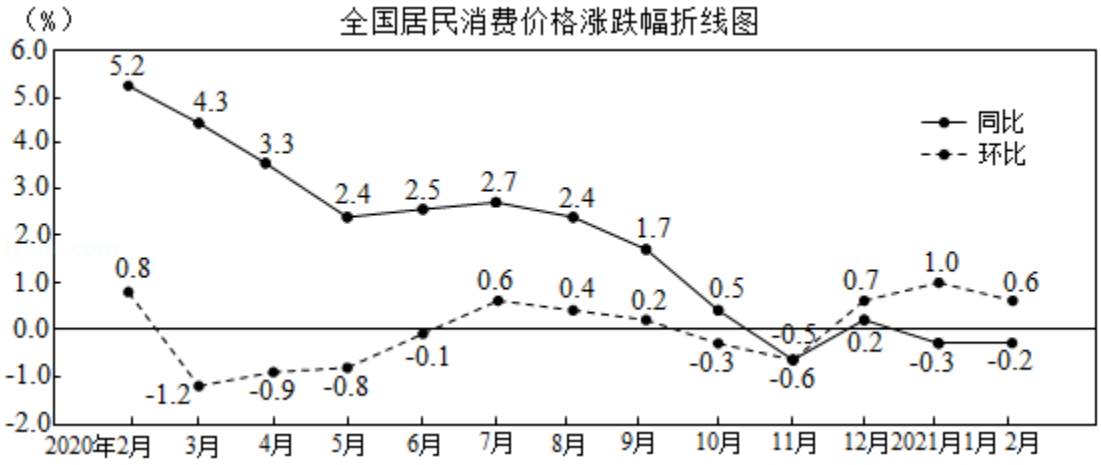
11．（5 分）已知向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$____.

12．（5 分）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为____.（用数字作答）

13．（5 分）在 ΔABC 中，$a=2\sqrt{7}$，$b=2$，$\angle A=60°$，则 $c=$____；$\frac{\sin 2A}{\sin C}=$____.

14．（5 分）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 与椭圆 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有一个公共焦点 F，则点 F 的坐标是____；若抛物线的准线与椭圆交于 A，B 两点，O 是坐标原点，且 ΔAOB 是直角三角形，则椭圆 D 的离心率 $e=$____.

15．（5 分）如图是国家统计局发布的 2020 年 2 月至 2021 年 2 月全国居民消费价格涨跌幅折线图.



说明：（1）在统计学中，同比是指本期统计数据与上一年同期统计数据相比较，例如 2021 年 2 月与 2020 年 2 月相比较；环比是指本期统计数据与上期统计数据相比较，例如 2020 年 4 月与 2020 年 3 月相比较.

（2）同比增长率 $=\frac{\text{本期数}-\text{同期数}}{\text{同期数}}\times 100\%$，环比增长率 $=\frac{\text{本期数}-\text{上期数}}{\text{上期数}}\times 100\%$.

给出下列三个结论：

①2020 年 11 月居民消费价格低于 2019 年同期；

②2020 年 3 月至 7 月居民的消费价格持续增长；

③2020 年 7 月的消费价格低于 2020 年 3 月的消费价格.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（13 分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$n\in N^*$，从条件①、条件②和条件③中选择两个作为已知，并完成解答：

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$满足$b_2=a_4$，$b_3=a_7$，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

条件①：$a_1=-3$；

条件②：$a_{n+1}-a_n=2$；

条件③：$S_2=-4$.

17.（13 分）某大学为了解学生对A，B两本数学图书的喜好程度，从这两本数学图书都阅读过的学生中随机抽取了 50 人，分别对这两本图书进行评分反馈，满分为 100 分，得到的相应数据整理如表.

分数	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
A图书频数	2	2	8	20	18
B图书频数	2	10	10	12	16

规定：学生对图书的“评价指数”如表.

分数	[50，70)	[70，90)	[90，100]
评价指数	1	2	3

（Ⅰ）从A，B两本图书都阅读过的学生中任选 1 人，试估计其对A图书“评价指数”为 2 的概率；

（Ⅱ）从对B图书“评价指数”为 1 的学生中任选 3 人进一步访谈，设X为 3 人中评分在[50，60)内的人数，求随机变量X的分布列及数学期望；

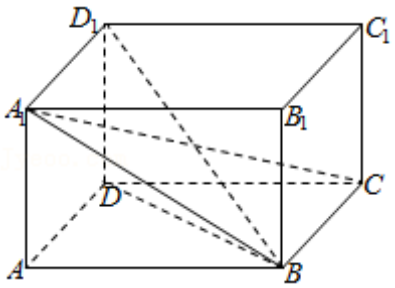
（Ⅲ）试估计学生更喜好A，B哪一本图书，并简述理由.

18.（14 分）如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是平行四边形，$AD\perp DB$，$AA_1=AD=\frac{1}{2}AB=1$.

（Ⅰ）求证：$AD\perp BD_1$；

（Ⅱ）求二面角A_1-BC-A的大小；

（Ⅲ）在线段BD_1上是否存在点M，使得$DM\perp$平面A_1BC？若存在，求$\frac{D_1M}{D_1B}$的值；若不存在，说明理由.



19.（15 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$P(0,1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）设直线$l:y=kx+m$与椭圆C有两个不同的交点A，B，当$|PA|=|PB|$时，求实数k的取值范围.

20．（15 分）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2+1$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，\ f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\geqslant 2$ 对于任意的 $x\in[0，\ 1]$ 都成立，求实数 a 的取值范围．

21．（15 分）对于有限数列 $\{a_n\}$，$n\leqslant N$，$N\geqslant 3$，$N\in N^*$，定义：对于任意的 $k\leqslant N$，$k\in N^*$，有

（1）$S^*(k)=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_k|$；

（2）对于 $c\in R$，记 $L(k)=|a_1-c|+|a_2-c|+|a_3-c|+\cdots+|a_k-c|$．

对于 $k\in N^*$，若存在非零常数 c，使得 $L(k)=S^*(k)$，则称常数 c 为数列 $\{a_n\}$ 的 k 阶 ω 系数．

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-2)^n$，计算 S^*（4），并判断 2 是否为数列的 4 阶 ω 系数；

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-39$，且数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数为 3，求 m 的值；

（Ⅲ）设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，满足 -1，2 均为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数，且 $S^*(m)=507$，求 m 的最大值．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【分析】求出集合 B，由此能求出 $A\bigcap B$.

【解答】解：∵集合 $A=\{-2，-1，0，1，2\}$，

$B=\{x\mid x^2\geqslant 1\}=\{x\mid x\leqslant -1或x\geqslant 1\}$，

$\therefore A\bigcap B=\{-2，-1，1，2\}$.

故选：B.

【点评】本题考查集合的运算，考查交集、不等式的性质等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是基础题.

2.【分析】利用复数代数形式的乘除运算化简，再由共轭复数的概念求得 $\overline{z}$，则答案可求.

【解答】解：∵$z=i(1-2i)=i-2i^2=2+i$，

$\therefore \overline{z}=2-i$，

则 $\overline{z}$ 的虚部为 -1.

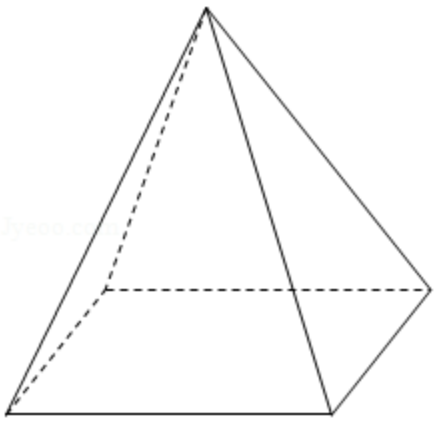
故选：C.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

3.【分析】首先把三视图转换为几何体的直观图，进一步利用体积公式的应用求出结果.

【解答】解：根据三视图和直观图之间的转换：该几何体为底面边长为 6，高为 3 的正四棱锥；

如图所示：



所以 $V=\frac{1}{3}\times 6\times 6\times 3=36$.

故选：B.

【点评】本题考查的知识要点：三视图和几何体的直观图之间的转换，几何体的体积公式，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

4.【分析】运用双曲线的离心率公式和 a，b，c 的关系可得 $b=\sqrt{2}a$，再由近线方程 $y=\pm x$，即可得到所求方程.

【解答】解：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，

可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，即有 $c=\sqrt{2}a$，

由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $b^2=a^2$，

即 $b=a$，

则渐近线方程为 $y=\pm x$，

故选：A．

【点评】本题考查双曲线的渐近线方程的求法，注意运用离心率公式和 a，b，c 的关系，考查运算能力，属于基础题．

5.【分析】由题意利用二倍角公式化简函数的解析式，利用三角函数的周期性和奇偶性，得出结论．

【解答】解：由于 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 是非奇非偶函数，故排除 A；

由于 $y=\sin|x|$ 是偶函数，没有周期性，故排除 B；

由 $y=\cos^2-\sin^2 x=\cos 2x$ 是偶函数，故排除 C；

由于 $y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ 是奇函数，且周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 D 满足条件，

故选：D．

【点评】本题主要考查二倍角公式、三角函数的周期性和奇偶性，属于基础题．

6.【分析】求出直线的方程为 $y=x$，即 $x-y=0$，化简圆方程得圆心为 $(0,2)$ 且半径 $r=2$．利用点到直线的距离公式算出圆心到直线的距离，结合垂径定理即可得出直线截圆所得弦长．

【解答】解：$\because$ 直线的倾斜角为 $45°$，$\therefore$ 直线的斜率 $k=\tan 45°=1$，

结合直线过原点，得直线方程为 $y=x$，即 $x-y=0$

$\because$ 圆 $x^2+y^2-4y=0$，即 $x^2+(y-2)^2=4$，

得圆心为 $(0,2)$，半径 $r=2$，

$\therefore$ 圆心到直线的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 可得直线截圆得弦长为：$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$．

故选：A．

【点评】本题给出直线与圆的方程，求直线被圆截得的弦长．着重考查了直线的方程、圆的方程和直线与圆的位置关系等知识，属于中档题．

7.【分析】$\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”展开，进而判断出结论．

【解答】解：$\vec{a}$，$\vec{b}$ 为非零向量，“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”展开为：$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$．

$\therefore$ “$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的充要条件．

故选：C．

【点评】本题考查了向量数量积运算性质、向量垂直与数量积的关系、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

8.【分析】由题意可得等差数列的 $a_1=13$，$a_{13}=1.48$，求解公差，再由通项公式求 a_{10}．

【解答】解：由题意，冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种、夏至的晷影长

构成以 $a_1=13$，$a_{13}=1.48$ 的等差数列，设公差为 d，则 $d=\frac{a_{13}-a_1}{13-1}=\frac{1.48-13}{12}=-0.96$，

立夏的晷影长为 $a_{10}=a_1+9d=13+9\times(-0.96)=4.36$．

故选：B．

【点评】本题考查等差数列的通项公式，是基础的计算题．

9．【分析】由题意利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的图象的对称性，求得 ω 的最小值．

【解答】解：将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得 $y=\sin(\omega x-\frac{\omega\pi}{6})$ 的图象，

再根据所得图象经过点 $(\frac{2\pi}{3},0)$，可得 $\omega\times\frac{2\pi}{3}-\frac{\omega\pi}{6}=k\pi$，求得 $\omega=2k$，$k\in Z$，

则 ω 的最小值为 2，

故选：B．

【点评】本题主要考查函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的图象的对称性，属于中档题．

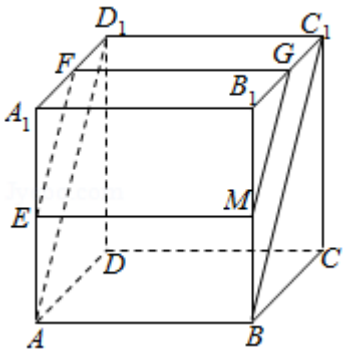
10．【分析】画出几何体的直观图，判断 P 的轨迹图形，然后求解面积即可．

【解答】解：棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M 是 BB_1 的中点，动点 P 在正方体内部或表面上，且 $MP//$ 平面 ABD_1，

如图，P 的轨迹是 $MEFG$，其中 M，E，F，G 是所在棱的中点，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以动点 P 的轨迹所形成区域的面积是：$1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：A．



【点评】本题考查棱柱的结构特征，轨迹的判断，考查空间想象能力，转化思想以及计算能力，是中档题．

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．【分析】根据平面向量的线性表示与坐标运算，计算即可．

【解答】解：$\because$ 向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，

$\therefore\vec{a}+2\vec{b}=(3,-1)$，

$\therefore|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，

故答案为：$\sqrt{10}$．

【点评】本题考查了平面向量的线性表示与坐标运算问题，以及模长的计算，是基础题．

12．【分析】由二项展开式的通项公式即可求解．

【解答】解：在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为 $C_5^3(-2)^3=-80$.

故答案为：-80 .

【点评】本题主要考查二项式定理，考查运算求解能力，属于基础题.

13.【分析】由已知结合余弦定理先求出 c ，然后结合正弦定理即可直接求解.

【解答】解：由余弦定理得，$\cos A=\frac{1}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+c^2-28}{4c}$ ，

整理得 $c^2-2c-24=0$ ，

解得 $c=6$ 或 $c=-4$（舍），

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ ，

所以 $\sin C=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$ ，

所以 $\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{21}}{14}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

故答案为：6，$\frac{\sqrt{7}}{3}$.

【点评】本题主要考查了余弦定理，正弦定理在求解三角形中的应用，考查了数学运算的核心素养，属于基础题.

14.【分析】求出抛物线的焦点坐标得到第一问；求出 AB 坐标，代入椭圆方程，求解离心率即可.

【解答】解：抛物线 $C:y^2=4x$ 与椭圆 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有一个公共焦点 F ，则点 F 的坐标是 $(1,0)$ ，

抛物线的准线与椭圆交于 A ，B 两点，O 是坐标原点，且 ΔAOB 是直角三角形，

所以 $A(-1.1)$ ，$B(-1,-1)$ ，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ ，$a^2-b^2=1$ ，$b^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$a^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，

所以，离心率为：$e=\sqrt{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【点评】本题考查抛物线的简单性质，椭圆的简单性质的应用，是中档题.

15.【分析】直接利用频率分布折线图，消费价格的关系式的应用判断①②③的结论.

【解答】解：根据题意：对于①，从 2020 年 11 月的同比增长率为 -0.5 ，由同比增长率的计算公式知 2020 年 11 月居民消费价格低于 2019 年同期的，故①正确；

对于②，由图可知，2020 年 3 月至 6 月的环比增长率为负值，由环比增长率的计算公式可知消费价格下降，故②错误；

对于③，设2020年3月的居民消费价格为 a_3 ，2020年4月的居民消费价格为 a_4 ，2020年5月的居民消费价格为 a_5 ，

2020年6月的居民消费价格为a_6，2020年7月的居民消费价格为a_7，

所以$\frac{a_4-a_3}{a_3}\times100\%=-0.9\%$，解得$a_4=0.991a_3$，

$\frac{a_5-a_4}{a_4}\times100\%=-0.8\%$，解得$a_5\approx0.983a_4$，

$\frac{a_6-a_5}{a_5}\times100\%=-0.1\%$，解得$a_6\approx0.982a_3$，

$\frac{a_7-a_6}{a_6}\times100\%=0.6\%$，解得$a_7\approx0.988a_3$，

所以$a_7<a_3$，

所以2020年7月的消费价格低于2020年3月的消费价格，故③正确.

故答案为：①③.

【点评】本题考查的知识要点：频率分布折线图，消费价格的关系式的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【分析】（Ⅰ）由题意，不能选择①③作为已知条件，否则题目条件不完善，当选择①②和②③作为已知条件时，都可得到数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，再求出首项，即可求得数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=2n-5$，设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，则b_2，b_3可求，进一步求得公比与首项，可得等比数列$\{b_n\}$的通项公式，再由数列的分组求和及等差数列与等比数列的前n项和公式求解数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

【解答】解：（Ⅰ）由题意，不能选择①③作为已知条件，否则题目条件不完善.

若选择①②作为已知条件.

$\because a_1=-3$，$a_{n+1}-a_n=2$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以$a_1=-3$为首项，公差$d=2$的等差数列.

$\therefore a_n=2n-5$.

若选择②③作为已知条件.

$\because a_{n+1}-a_n=2$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以a_1为首项，公差为$d=2$的等差数列.

$\because S_2=-4$，$\therefore a_1+a_2=-4$，则$2a_1+d=-4$，

解得$a_1=-3$，$\therefore a_n=2n-5$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=2n-5$，

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，则$b_2=a_4=3$，$b_3=a_7=9$，

$\therefore q=\frac{b_3}{b_2}=3$，$b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{3}{3}=1$.

$\therefore$等比数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

可得$a_n+b_n=(2n-5)+3^{n-1}$.

$\therefore T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=[-3+(-1)+\cdots+(2n-5)]+(1+3+\cdots+3^{n-1})$

$=\dfrac{n\times[-3+(2n-5)]}{2}+\dfrac{1-3^n}{1-3}=n^2-4n+\dfrac{1}{2}(3^n-1)$.

【点评】本题考查等差数列与等比数列的通项公式及前 n 项和，训练了数列的分组求和，考查运算求解能力，是中档题.

17.【分析】（Ⅰ）由评分频数分布表可知，利用古典概型概率公式求解即可.

（Ⅱ） X 的所有可能值为 0，1，2. 求出故选得到分布列，然后求解期望.

（Ⅲ）设学生对 A 图书的“评价指数”为 ξ，对 B 图书的“评价指数”为 η. 分别求解分布列与期望，即可判断结果.

【解答】解：（Ⅰ）由评分频数分布表可知，对 A 图书评分的学生中，“评价指数为 2”的学生所占的频率为 $\dfrac{8+20}{50}=\dfrac{14}{25}$，

所以从 A， B 两本图书都阅读过的学生中任选 1 人，估计其对 A 图书“评价指数”为 2 的概率为 $\dfrac{14}{25}$.

（Ⅱ）由题意，所以 X 的所有可能值为 0，1，2.

$P(X=0)=\dfrac{C_2^0C_{10}^3}{C_{12}^3}=\dfrac{12}{22}=\dfrac{6}{11}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_{10}^2}{C_{12}^3}=\dfrac{9}{22}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_{10}^1}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{6}{11}$	$\dfrac{9}{22}$	$\dfrac{1}{22}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{6}{11}+1\times\dfrac{9}{22}+2\times\dfrac{1}{22}=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅲ）设学生对 A 图书的“评价指数”为 ξ，对 B 图书的“评价指数”为 η. 由题意，从阅读过两本图书的学生中任取一位，

估计 ξ 的分布列分别为

ξ	1	2	3
P	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{14}{25}$	$\dfrac{9}{25}$

所以 $E(\xi)=1\times\dfrac{2}{25}+2\times\dfrac{14}{25}+3\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{57}{25}$.

估计 η 的分布列分别为

η	1	2	3
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{8}{25}$

所以 $E(\eta)=1\times\frac{6}{25}+2\times\frac{11}{25}+3\times\frac{8}{25}=\frac{52}{25}$.

因为 $E(\xi)>E(\eta)$，所以学生更喜好图书 A.

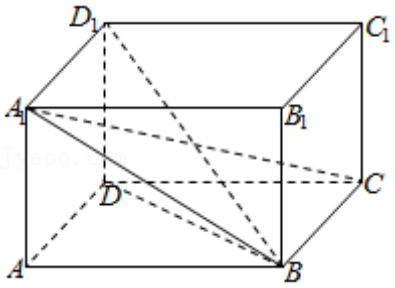
【点评】本题考查离散型随机变量的分布列的分布列以及期望的求法，考查转化思想以及计算能力，是中档题.

18.【分析】(I) 证明 $DD_1\perp AD$，结合 $AD\perp BD$，推出 $AD\perp$ 平面 BDD_1．然后证明 $AD\perp BD_1$.

（Ⅱ） DA， DB， DD_1 两两垂直．建立空间直角坐标系 $D-xyz$，求出平面 A_1BC 的法向量，面 $ABCD$ 的一个法向量利用空间向量的数量积求解二面角 A_1-BC-A 的大小即可.

（Ⅲ）由 (II) 知平面 A_1BC 的一个法向量利用向量共线，转化求解因为 $DM\perp$ 平面 A_1BC， $\frac{D_1M}{D_1B}$ 的值即可.

【解答】(I) 证明：在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



$DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，

因为 $AD\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $DD_1\perp AD$.

因为 $AD\perp BD$， $BD\bigcap DD_1=D$，

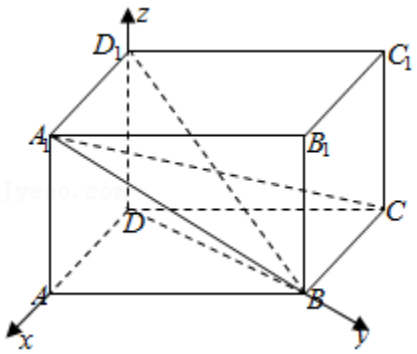
所以 $AD\perp$ 平面 BDD_1.

因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1，

所以 $AD\perp BD_1$.

（Ⅱ）解：因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AD\perp DB$，所以 DA， DB， DD_1 两两垂直.

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D(0，0，0)$， $A(1，0，0)$， $B(0,\sqrt{3},0)$， $C(-1,\sqrt{3},0)$， $A_1(1，0，1)$， $D_1(0，0，1)$.



设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{m}=(x，\ y，\ z).\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CA_1}=(2,-\sqrt{3},1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{CA_1}\cdot\vec{m}=0\cdot\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=0,\\ 2x-\sqrt{3}y+z=0\cdot\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $z=\sqrt{3}$，

所以 $\vec{m}=(0,1,\sqrt{3})$．

因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(0，\ 0，\ 1)$．

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

由题可知二面角 A_1-BC-A 为锐角，

所以二面角 A_1-BC-A 的大小为 $30°$．

（Ⅲ）解：设 $\overrightarrow{D_1M}=\lambda\overrightarrow{D_1B},\lambda\in[0,1]$．

因为 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1M}=\overrightarrow{DD_1}+\lambda\overrightarrow{D_1B}=(0,0,1)+\lambda\ (0,\sqrt{3},-1)=(0,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$，

由 (II) 知平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,1,\sqrt{3})$，

因为 $DM\perp$ 平面 A_1BC，可得 $\overrightarrow{DM}//\vec{m}$．

所以 $\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{1}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{3}}$．解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}\in[0,1]$．

所以，在线段 BD_1 上存在点 M 使得 $DM\perp$ 平面 A_1BC，$\dfrac{D_1M}{D_1B}$ 的值是 $\dfrac{1}{4}$．

【点评】本题考查直线与平面垂直的判断定理的应用，二面角的平面角的求法，考查转化思想以及计算能力，是中档题．

19.【分析】（Ⅰ）求出 b，结合离心率求解 a，推出椭圆方程．

（Ⅱ）解法1:（1）当 $k=0$ 时，显然成立．（2）当 $k\neq0$ 时，①$m=0$ 时，显然不成立．②当 $m\neq0$，即 $mk\neq0$ 时，联立直线与椭圆方程，设 $A(x_1，\ y_1)$，$B(x_2，\ y_2)$，利用韦达定理，结合中点坐标，求解直线 MP 的斜率，通过 $MP\perp AB$．转化求解即可．

解法 2：联立直线与椭圆方程，设 $A(x_1，\ y_1)$，$B(x_2，\ y_2)$．结合韦达定理，通过 $|PA|=|PB|$，推出 $k(3m+4k^2+1)=0$．然后转化求解实数 k 的取值范围．

【解答】解：（Ⅰ）依题意得 $b^2=1$．

由 $\begin{cases}c^2=a^2-b^2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得 $a^2=4$．

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……（5 分）

（Ⅱ）解法1:（1）当 $k=0$ 时，显然成立．

（2）当 $k\neq0$ 时，

①$m=0$时，显然不成立.

②当$m\neq 0$，即$mk\neq 0$时，

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$

得$(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$.

因为直线l与椭圆C的有两个交点，

所以$\triangle=64m^2k^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$.

即$4k^2+1-m^2>0$. (*).

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+1}$.

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{-8k^2m}{4k^2+1}+2m=\dfrac{2m}{4k^2+1}$.

所以线段AB的中点$M(\dfrac{-4mk}{4k^2+1},\dfrac{m}{4k^2+1})$.

直线MP的斜率$k_{MP}=\dfrac{\dfrac{m}{4k^2+1}-1}{\dfrac{-4mk}{4k^2+1}}=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}$，

由$|PA|=|PB|$，得$MP\perp AB$.

所以$k_{MP}\cdot k=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}\cdot k=-1$

解得$m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$.

将$m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$代入到(*)中，得$4k^2+1-\dfrac{(4k^2+1)^2}{9}>0$，

即$\dfrac{(4k^2+1)(8-4k^2)}{9}>0$，

所以$8-4k^2>0$.

解得$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，且$k\neq 0$.

综上所述，实数k的取值范围是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ……（15分）

解法2：由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$得$(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$.

因为直线l与椭圆C的有两个交点，

所以$\triangle=64m^2k^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$

即$4k^2+1-m^2>0$（1）.

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$. 则$x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+1}$.

由$|PA|=|PB|$得，$x_1^{\ 2}+(y_1-1)^2=x_2^{\ 2}+(y_2-1)^2$.

即 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2-2)=0$.

即 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+k(x_1-x_2)[k(x_1+x_2)+(2m-2)]=0$.

从而 $(x_1-x_2)[(k^2+1)(x_1+x_2)+2k(m-1)]=0$.

由 $x_1\neq x_2$ 得 $(k^2+1)(x_1+x_2)+2k(m-1)=0$.

所以 $\frac{-8mk(k^2+1)}{4k^2+1}+2k(m-1)=0$.

即 $k(3m+4k^2+1)=0$.

解得 $k=0$或$m=-\frac{4k^2+1}{3}$.

将 $m=-\frac{4k^2+1}{3}$ 代入到（1）中，得 $4k^2+1-\frac{(4k^2+1)^2}{9}>0$，

即 $\frac{(4k^2+1)(8-4k^2)}{9}>0$，

所以 $8-4k^2>0$.

解得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$.

所以实数 k 的取值范围是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ……（15 分）

【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系的应用，考查分析问题解决问题的能力，是难题.

20.【分析】（Ⅰ）求得 $f(x)$ 的导数，可得切线的斜率和切点，由直线的斜截式方程，可得切线的方程；

（Ⅱ）解法 1、运用参数分离和构造函数，求得导数和单调性、最值，可得所求范围；

解法二、设 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$，讨论当 $a\leqslant 0$ 时，推得不等式恒成立；考虑 $a>0$，求得极值点，讨论当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，

$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$， $a\geqslant\frac{e}{2}$ 时，判断 $g(x)$ 的单调性，求得最值，可得所求范围.

【解答】解：（Ⅰ） $f'(x)=e^x-2ax$，

所以切线的斜率 $k=f'(0)=1$，

因为 $f(0)=e^0+1=2$，

所以切线的方程 $y=x+2$；

（Ⅱ）解法 1：由已知，对于任意的 $x\in[0,\ 1]$， $e^x-ax^2+1\geqslant 2$ 都成立，

即对于任意的 $x\in[0,\ 1]$， $ax^2\leqslant e^x-1$ 都成立.

当 $x=0$ 时， $ax^2\leqslant e^x-1$ 显然成立.

当 $x\neq 0$ 时，对于任意的 $x\in(0,\ 1]$， $a\leqslant\frac{e^x-1}{x^2}$ 都成立.

设 $g(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$，则 $a\leqslant g(x)_{min}$.

而 $g'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-2x(e^x-1)}{x^4}=\frac{(x-2)e^x+2}{x^3}$.

设 $h(x)=(x-2)e^x+2$，则 $h'(x)=(x-1)e^x$．

由 $x\in(0，1]$，得 $h'(x)\leqslant 0$ 在区间 $(0，1]$ 上恒成立，

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0，1]$ 上是减函数，且 $h(0)=0$．

所以 $h(x)<0$ 在区间 $(0，1]$ 上恒成立．

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0，1]$ 上是减函数．

所以当 $x=1$ 时，$g(x)_{min}=g（1）=e-1$．

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty，e-1]$．

解法 2：设 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$，则 $g'(x)=e^x-2a$．

（1）当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在区间 $[0，1]$ 上是增函数．

当 $x=0$ 时，$g(x)_{min}=1>0$，

所以 $g(x)\geqslant 0$ 在区间 $[0，1]$ 上恒成立．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0，1]$ 上是增函数．

所以 $f(x)_{min}=f(0)=2$．

即 $f(x)\geqslant 2$ 对于任意的 $x\in[0，1]$ 都成立．

（2）当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，即 $e^x=2a$，解得 $x=ln2a$．

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$ln2a\leqslant 0$，则 $g'(x)\geqslant 0$．

从而函数 $g(x)$ 在区间 $[0，1]$ 上是增函数．

当 $x=0$ 时，$g(x)_{min}=1>0$，

所以 $g(x)\geqslant 0$ 在区间 $[0，1]$ 上恒成立．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0，1]$ 上是增函数．

所以 $f(x)_{min}=f(0)=2$．

即 $f(x)\geqslant 2$ 对于任意的 $x\in[0，1]$ 都成立．

②当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，$0<ln2a<1$．

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,ln2a)$	$ln2a$	$(ln2a,1)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=ln2a$ 时，$g(x)_{min}=e^{ln2a}-2aln2a=2a(1-ln2a)\geqslant 0$．

所以 $g(x)\geqslant 0$ 在区间 $[0，1]$ 上恒成立．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0，1]$ 上是增函数．

所以 $f(x)_{min}=f(0)=2$．

即 $f(x)\geqslant 2$ 对于任意的 $x\in[0，1]$ 都成立．

③当 $a \geqslant \frac{e}{2}$ 时， $ln2a \geqslant 1$.

所以 $g'(x) < 0$ 在区间[0 ， 1]上恒成立.

所以函数 $g(x)$ 在区间[0 ， 1]上是减函数.

因为 $g(0) = 1 > 0$ ， g （1） $= e - 2a < 0$ ，

所以 $\exists x_0 \in (0,1)$ ，使 $g(x_0) = 0$ ，即 $f'(x_0) = 0$.

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	0	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0$ ， 1)	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2	↗	极大值	↘	$e - a + 1$

当 f （1） $= e - a + 1 \geqslant 2$ ，即 $a \leqslant e - 1$ 时， $f(x) \geqslant 2$ 对于任意 $x \in [0$ ， 1] 都成立.

所以 $\frac{e}{2} \leqslant a \leqslant e - 1$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty$ ， $e - 1]$.

【点评】本题考查导数的运用：求切线的方程和单调性、极值和最值，以及不等式恒成立问题解法，考查分类讨论思想和运算能力、推理能力，属于中档题.

21.【分析】（Ⅰ）根据 k 阶 ω 系数的定义进行判断.

（Ⅱ）根据 4 阶 ω 系数的定义进行验证

（Ⅲ）根据 m 阶 ω 系数的定义建立方程进行求解.

【解答】解：(I) 因数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n = (-2)^n$ ，所以数列 $\{|a_n|\}$ 为等比数列，且 $|a_n| = 2^n$.

得 S^* （4） $= |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 30$.

数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n = (-2)^n$ ，所以当 $c = 2$ 时， L （4） $= |a_1 - 2| + |a_2 - 2| + |a_3 - 2| + |a_4 - 2| = -(a_1 - 2) + (a_2 - 2) - (a_3 - 2) + (a_4 - 2) = |a_1| + 2 + |a_2| - 2 + |a_3| + 2 + |a_4| - 2 = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = S^*(4)$.

所以 2 是数列 $\{a_n\}$ 的 4 阶 ω 系数.

(II) 因为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数为 3，所以当 $c = 3$ 时，存在 m ，使 $L(m) = S^*(m)$ 成立.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_n = -39n + \frac{3n(n+1)}{2}$.

令 $a_n \geqslant 0$ ，则 $n \geqslant 13$.

所以， $S^*(n) = \begin{cases} 39n - \frac{3n(n+1)}{2}, n \leqslant 13, \\ -39n + \frac{3n(n+1)}{2} + 468, n \geqslant 14. \end{cases}$

设等差数列 $\{a_n - 3\}$ 的前 n 项和为 T_n ， $a_n - 3 = 3n - 42$ ，

则 $T_n = -42n + \frac{3n(n+1)}{2}$.

令 $a_n - 3 \geqslant 0$ ，则 $n \geqslant 14$.

所以， $L(n)=\begin{cases}42n-\dfrac{3n(n+1)}{2},n\leqslant 13,\\ -42n+\dfrac{3n(n+1)}{2}+546,n\geqslant 14.\end{cases}$

当 $m\leqslant 13$ 时， $L(m)\neq S^*(m)$，

当 $m\geqslant 14$ 时， $L(m)=S^*(m)$，

则 $-39m+\dfrac{3m(m+1)}{2}+468=-42m+\dfrac{3m(m+1)}{2}+546$，解得 $m=26$．

(III) 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，满足 -1，2 均为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数， $S^*(m)=507$，

则存在 $k\in N^*$，使 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_m|=|a_1+1|+|a_2+1|+|a_3+1|+\cdots+|a_m+1|=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+\cdots+|a_m-2|=507$ 成立．

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，构造函数 $f(x)=|x-d|+|x-2d|+|x-3d|+\cdots+|x-md|-507$．

由已知得 $f(a_m+d)=|a_m|+|a_m-d|+|a_m-2d|+\cdots+|a_m-(m-1)d|-507=|a_m|+|a_{m-1}|+|a_{m-2}|+\cdots+|a_1|-507=0$．

所以，函数 $f(x)$ 至少有三个零点 a_m+d， a_m+d+1， a_m+d-2．

由函数 $f(x)$ 的图象与性质，可知 m 为偶数，且满足 $\begin{cases}\dfrac{m}{2}d\leqslant a_m+d-2<a_m+d<a_m+d+1\leqslant(\dfrac{m}{2}+1)d,\\ f(\dfrac{(m+1)d}{2})=0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}d\geqslant 3,\\ \dfrac{m^2d}{4}=507.\end{cases}$

所以 $3m^2\leqslant 4\times 507$，解得 $m\leqslant 26$．

构造等差数列 $\{a_n\}$ 为：-37，-34，-33，…，38．

可知当 $m=26$ 时命题成立，即 m 的最大值为 26．

【点评】本题主要考查数列的综合运用，根据 k 阶 ω 系数的定义建立方程是解决本题的关键，综合性较强，难度较大。