2021 北京房山高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.（4 分）已知全集$U=\{1，2，3，4\}$，集合$A=\{x\in Z\mid(x-1)(x-3)\leqslant 0\}$，$B=\{2，3\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$(　　)

A．{3}　　B．{4}　　C．{3，4}　　D．{1，3，4}

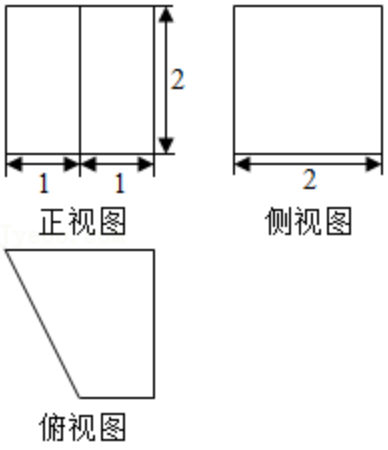
2.（4 分）若复数$z=(x^2+x-2)+(x-1)i$(i 为虚数单位）为纯虚数，则实数 x 的值为(　　)

A．1　　B．2　　C．–2　　D．1 或–2

3.（4 分）在ΔABC 中，$BC=6$，$A=\frac{\pi}{3}$，$\sin B=2\sin C$，则ΔABC 的面积为(　　)

A．$6\sqrt{3}$　　B．6　　C．$9\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{2}$

4.（4 分）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是(　　)



A．6　　B．$10+2\sqrt{3}$　　C．$10+2\sqrt{5}$　　D．$16+2\sqrt{5}$

5.（4 分）某公司购买一批机器投入生产，若每台机器生产的产品可获得的总利润 s（万元）与机器运转时间 t（年数，$t\in N^*$) 的关系为$s=-t^2+23t-64$．要使年平均利润最大．则每台机器运转的年数 t 为(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

6.（4 分）已知角 α 的终边经过点 $(3,4)$，把角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边，则 $\tan\beta$ 等于(　　)

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．$\frac{3}{4}$

7.（4分）设 F_1，F_2 是双曲线$C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$的两个焦点，O 为坐标原点，点 P 在双曲线 C 上，且$|OP|=|OF_1|$，则△PF_1F_2 的面积为(　　)

A．$\frac{5}{2}$　　B．2　　C．$\frac{3}{2}$　　D．1

8.（4分）20 世纪 30 年代，里克特制定了一种表明地震能量大小的尺度，就是使用地震仪衡量地震能量的等级，地震能量越大，测震仪记录的地震曲线的振幅就越大，这就是我们常说的里氏震级 M，其计算公式为$M=lgA-lgA_0$，

其中 A 是被测地震的最大振幅，A_0 是标准地震的振幅.2008 年 5 月 12 日，我国四川汶川发生了地震，速报震级为里氏 7.8 级，修订后的震级为里氏 8.0 级，则修订后的震级与速报震级的最大振幅之比为(　　)

A．$10^{-0.2}$　　B．$10^{0.2}$　　C．$lg\frac{40}{39}$　　D．$\frac{40}{39}$

9．（4 分）“$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)=\begin{cases}lnx, x>0\\ -2^x+a, x\leqslant 0\end{cases}$ 有且只有一个零点”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．（4 分）为了庆祝中国共产党成立 100 周年，某校举行了以“重温时代经典，唱响回声嘹亮”为主题的“红歌”歌咏比赛．该校高三年级有 1，2，3，4 四个班参加了比赛，其中有两个班获奖．比赛结果揭晓之前，甲同学说：“两个获奖班级在 2 班、3 班、4 班中”，乙同学说：“2 班没有获奖，3 班获奖了”，丙同学说：“1 班，4 班中有且只有一个班获奖”，丁同学说：“乙说得对”．已知这四人中有且只有两人的说法是正确的，则这两人是(　　)

A．乙，丁　　B．甲，丙　　C．甲，丁　　D．乙，丙

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．（5 分）函数 $y=\sin 2x\cos 2x$ 的最小正周期是____.

12．（5 分）若三个点 $M(3，2\sqrt{6})$，$N(2，2\sqrt{3})$，$Q(3,-2\sqrt{6})$ 中恰有两个点在抛物线 $y^2=2px$ 上，则该抛物线的方程为____.

13．（5 分）已知 $(1+2x)^n$ 的展开式中，二项式系数之和为 32，则各项系数之和为____.

14．（5 分）已知单位向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 60°，$\vec{a}-k\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，则 $k=$____.

15．（5 分）设 $m\in R$，过定点 M 的直线 $l_1:x+my-3m-1=0$ 与过定点 N 的直线 $l_2:mx-y-3m+1=0$ 相交于点 P，线段 AB 是圆 $C:(x+1)^2+(y+1)^2=4$ 的一条动弦．且 $|AB|=2\sqrt{2}$．给出下列四个结论：

①l_1 一定垂直 l_2；

②$|PM|+|PN|$ 的最大值为 4；

③点 P 的轨迹方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$；

④$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$．

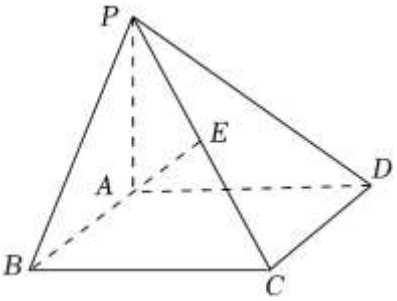
其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．（14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，点 E 为 PC 的中点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=2$．

（Ⅰ）求证：$CD\perp PD$；

（Ⅱ）求异面直线 BC 与 AE 所成角的大小．



17.（14 分）已知数列$\{a_n\}$是一个公比为$q(q>0,q\neq 1)$的等比数列，$a_1=1$，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，再从条件①、②、③这三个条件中选择一个作为已知，解答下列问题：

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）令$b_n=2\log_2 a_n-7$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n的最小值．

条件①：$4a_2$，$3a_3$，$2a_4$成等差数列；

条件②：$S_n=2a_n-1$；

条件③：$S_3=7$．

18.（14 分）为了提高中小学生的身体素质，某地区开展了中小学生跳绳比赛系列活动．活动结束后，利用简单随机抽样的方法，抽取了部分学生的成绩，按照不同年龄段分组记录如表：

组别	男生		女生	
	合格	不合格	合格	不合格
第一组	90	10	80	20
第二组	88	12	72	28
第三组	60	40	58	42
第四组	80	20	62	38
第五组	82	18	78	22
合计	400	100	350	150

假设每个中小学生跳绳成绩是否合格相互独立．

（Ⅰ）从样本中的中小学生随机抽取 1 人，求该同学跳绳成绩合格的概率；

（Ⅱ）从该地区众多小学的男生、女生中各随机抽取 1 人，记这 2 人中恰有X人跳绳成绩合格，求X的分布列与数学期望；

（Ⅲ）假设该地区中小学生跳绳成绩合格的概率与表格中该地区中小学生跳绳成绩合格的频率相等，用“$\xi_k=1$”表示第k组同学跳绳成绩合格，“$\xi_k=0$”表示第k组同学跳绳成绩不合格$(k=1$，2，3，4，$5)$，试确定方差$D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$，$D\xi_5$中哪个最大？哪个最小？（只需写出结论）

19.（15 分）已知函数$f(x)=e^x\cos x$，$g(x)=ax$．

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$在点$(0$，$f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）设$F(x)=g(x)-f(x)$，当$a\geqslant 0$时，求函数$F(x)$在区间$[\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值；

（Ⅲ）当 $x\in[\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}]$时，试写出一个实数 a 的值，使得 $y=f(x)$ 的图象在 $y=g(x)$ 的图象下方．（不需要说明理由）

20．（14 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，O 为坐标原点，F 是椭圆 C 的右焦点，A 为椭圆 C 上一点，且 $AF\perp x$ 轴，$|AF|=\frac{3}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过椭圆 C 上一点 $P(x_0$，$y_0)(y_0\neq 0)$ 的直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 与直线 AF 相交于点 M，与直线 $x=4$ 相交于点 N．证明：$\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值．

21．（14 分）已知数集 $A=\{a_1$，a_2，a_3，…，$a_n\}(1\leqslant a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$，$n\geqslant 2$，$n\in N^*)$．如果对任意的 i，$j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ 且 i，j，$n\in N^*)$，a_ia_j 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A，则称数集 A 具有性质 P．

（Ⅰ）分别判断数集 $\{2$，3，$6\}$，$\{1$，3，4，$12\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（Ⅱ）设数集 $A=\{a_1$，a_2，a_3，…，$a_n\}(1\leqslant a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$，$n\geqslant 2$，$n\in N^*)$ 具有性质 P．

①若 $a_k\in N^*(k=1$，2，3，…)，证明：对任意 $1\leqslant i\leqslant n(i,n\in N^*)$ 都有 a_i 是 a_n 的因数；

②证明：$a_n^n=a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdot\ldots\cdot a_n^2$．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】可求出集合 A，然后进行并集和补集的运算即可.

【解答】解：$\because U=\{1，2，3，4\}$，$A=\{x\in Z\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}=\{1，2，3\}$，$B=\{2，3\}$，

$\therefore A\bigcup B=\{1，2，3\}$，$\complement_U(A\bigcup B)=\{4\}$.

故选：B.

【点评】本题考查了集合的描述法和列举法的定义，一元二次不等式的解法，并集和补集的定义及运算，全集的定义，考查了计算能力，属于基础题.

2.【分析】直接利用纯虚数的概念即可直接得答案.

【解答】解：因为 $z=(x^2+x-2)+(x-1)i$（i 为虚数单位）为纯虚数，

所以 $\begin{cases}x^2+x-2=0\\x-1\neq 0\end{cases}$，

解得 $x=-2$.

故选：C.

【点评】本题主要考查了复数的基本概念，属于基础题.

3.【分析】求出 C，再求出 B，求出 AB，从而求出三角形的面积.

【解答】解：$\because \sin B=2\sin C$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \sin(\dfrac{\pi}{3}+C)=2\sin C$，解得：$C=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore B=\dfrac{\pi}{2}$，又 $BC=6$，$\therefore AB=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=6\sqrt{3}$，

故选：A.

【点评】本题考查了两角和的正弦公式以及三角函数求值问题，考查求三角形的面积问题，是基础题.

4.【分析】先确定该几何体为直四棱柱，计算出底面周长，然后在底面周长上乘以高，可得出该几何体的侧面积，并计算出底面积，再将侧面积与两个底面积相加可得出表面积.

【解答】解：该几何体是一个直四棱柱，底面为直角梯形，斜腰长为 $\sqrt{(2-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，底面周长为 $2+2+1+\sqrt{5}=5+\sqrt{5}$，

该直四棱柱的侧面积为 $2\times(5+\sqrt{5})=10+2\sqrt{5}$，底面积为 $\dfrac{(2+1)\times 2}{2}=3$，

因此，该几何体的表面积为 $10+2\sqrt{5}+2\times 3=16+2\sqrt{5}$.

故选：D.

【点评】本题考查几何体表面积的计算，解决本题的关键在于由三视图还原为实物体，考查计算能力，属于中等题.

5.【分析】先求出年平均利润的关系式，再利用基本不等式即可求解.

【解答】解：由已知可得年平均利润为 $Z=\frac{s}{t}=\frac{-t^2+32t-64}{t}=-t-\frac{64}{t}+23$，$(t>0)$，

所以 $Z=-(t+\frac{64}{t})+23\leqslant -2\sqrt{t\cdot\frac{64}{t}}+23=-16+23=7$，

当且仅当 $\frac{64}{t}=t$，即 $t=8$ 时取等号，

此时年平均利润的最大值为 7，

故选：D．

【点评】本题考查了函数的实际应用，涉及到利用基本不等式求解最值的问题，属于中档题．

6．【分析】根据三角函数的定义，结合诱导公式进行化简求解即可．

【解答】解：因为角 α 的终边经过点 $(3,4)$，

则 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，

把角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边，则 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$，

所以 $\tan\beta=\tan(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\cot\alpha=-\frac{3}{4}$．

故选：C．

【点评】本题主要考查三角函数值的计算，根据三角函数的定义以及诱导公式进行化简是解决本题的关键，属于基础题．

7．【分析】先判断△ PF_1F_2 为直角三角形，再根据双曲线的定义和直角三角形的性质即可求出．

【解答】解：由题意可得 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，

$\therefore|F_1F_2|=2c=4$，

$\because|OP|=|OF_1|$，

$\therefore|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，

$\therefore$△ PF_1F_2 为直角三角形，

$\therefore PF_1\perp PF_2$，

$\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2=16$，

$\because||PF_1|-|PF_2||=2a=2\sqrt{3}$，

$\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=12$，

$\therefore|PF_1|\cdot|PF_2|=2$，

$\therefore$△ PF_1F_2 的面积为 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=1$，

故选：D．

【点评】本题考查了双曲线的性质，直角三角形的性质，双曲线的定义，三角形的面积，属于中档题．

8．【分析】先根据 $M=lgA-lgA_0$ 求得地震最大振幅关于 M 的函数，将震级代入分别求出最大振幅，最后求出两次

地震的最大振幅之比即可.

【解答】解：由 $M=lgA-lgA_0$ 可得 $M=lg\frac{A}{A_0}$，即 $\frac{A}{A_0}=10^M$，$A=A_0\cdot10^M$.

当 $M=8$ 时，地震的最大振幅为 $A_1=A_0\cdot10^8$，

当 $M=7.8$ 时，地震的最大振幅为 $A_2=A_0\cdot10^{7.8}$，

所以，两次地震的最大振幅之比是 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_0\cdot10^8}{A_0\cdot10^{7.8}}=10^{8-7.8}=10^{0.2}$.

故选：B.

【点评】本题主要考查了对数函数的应用，以及对数的运算，考查运算求解能力等数学核心素养，是基础题.

9.【分析】根据函数零点的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】解：当 $x>0$ 时，令 $f(x)=0$，则 $lnx=0$，$\therefore x=1$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)$ 有一个零点为 1，

$\because$ 函数 $f(x)$ 只有一个零点，

$\therefore$ 当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=-2^x+a$ 无零点，即 $a>2^x$ 或 $a<2^x$，

$\because$ 当 $x\leqslant0$ 时，$2^x\in(0，1]$，$\therefore a>1$ 或 $a\leqslant0$，

$\therefore a\leqslant0$ 是函数 $f(x)$ 只有一个零点的充分不必要条件，

故选：A.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合函数零点的条件以及指数函数的性质求出 a 的取值范围是解决本题的关键.

10.【分析】由乙与丁的说法同时正确或同时错误，分情况讨论，即可判断出结果.

【解答】解：假设乙的说法是正确的，则丁也是正确的，那么甲，丙的说法都是错误的，

由丙的说法错误可知，1 班，4 班都获奖或 1 班，4 班都没有获奖，与乙的说法正确矛盾，

所以乙的说法是错误的，则丁也是错误的，所以 2 班获奖，3 班没获奖，

进而推断出 1 班，4 班中有且只有一个班获奖，所以丙的说法正确，

要使甲的说法也正确，则获奖的班级为 2 班，4 班，

故选：B.

【点评】本题主要考查了简单的合情推理，考查了学生的逻辑推理能力，是基础题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【分析】先利用二倍角公式化简函数，再求函数的周期.

【解答】解：函数 $y=\sin2x\cos2x=\frac{1}{2}\sin4x$，

$\therefore$ 函数 $y=\sin2x\cos2x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

故答案为：$\frac{\pi}{2}$.

【点评】本题考查二倍角公式，考查三角函数的周期，考查学生的计算能力，正确化简函数是关键.

12.【分析】利用已知条件，判断 M、Q 在抛物线上，转化求抛物线 C 的标准方程.

【解答】解：因为抛物线$C:y^2=2px$关于x轴对称，

$M(3，2\sqrt{6})$，$N(2，2\sqrt{3})$，$Q(3,-2\sqrt{6})$两点在C上，只能是M、Q两点，

代入坐标易得$p=4$，所以抛物线C的标准方程为$y^2=8x$.

故答案为：$y^2=8x$.

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系的应用，考查转化思想以及计算能力，是基础题.

13.【分析】由题意利用二项式系数之和为$2^n=32$，求得$n=5$，再令$x=1$，可得各项系数之和.

【解答】解：$\because (1+2x)^n$的展开式中，二项式系数之和为$2^n=32$，$\therefore n=5$，

再令$x=1$，可得各项系数之和为$3^n=3^5=243$，

故答案为：243.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，注意根据题意，分析所给代数式的特点，通过给二项式的x赋值，求展开式的系数和，可以简便的求出答案，属于基础题.

14.【分析】利用向量垂直、向量数量积公式直接求解.

【解答】解：$\because$两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60°$，$\vec{a}-k\vec{b}$与$\vec{b}$垂直，

$\therefore (\vec{a}-k\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-k\vec{b}^2$

$=1\times1\times\cos60°-k\times1=0$，

解得$k=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查实数值的求法，考查向量垂直、向量数量积公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

15.【分析】利用已知条件判断两条直线的位置关系判断①；在ΔMNP中，设$\angle PMN=\theta$，表示出$|PM|+|PN|$，利用三角函数的最值判断②；求出P的轨迹，判断③；推出轨迹，利用向量的平行四边形法则，求解$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最小值判断选项④.

【解答】解：直线$l_1:x+my-3m-1=0$与$l_2:mx-y-3m+1=0$垂直，满足$1\cdot m+m\cdot(-1)=0$，所以①正确；

l_2过定点$M(3,1)$，l_1过定点$N(1,3)$，

在ΔMNP中，设$\angle PMN=\theta$，

则$|PM|+|PN|=2\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta=4\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant4$，所以②正确；

由$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，可得点$P$轨迹方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2(x\neq3)$．所以③不正确；

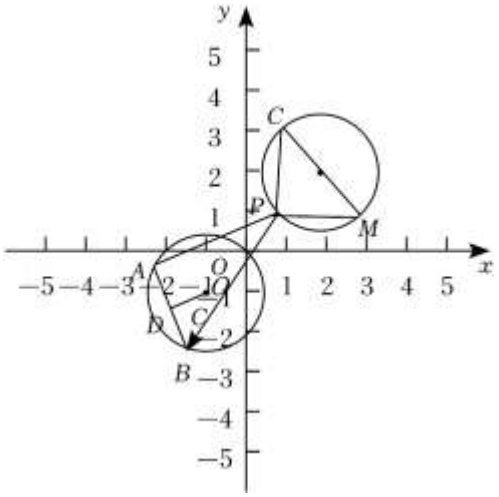
作$CD\perp AB$，则$CD=\sqrt{2}$，

$\therefore$点D轨迹方程为$(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

$\because|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2|\overrightarrow{PD}|$，$|\overrightarrow{PD}|$的最小值为$\sqrt{2}$，

$\therefore|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最小值为$2\sqrt{2}$，所以④不正确.

故答案为：①②.



【点评】本题考查命题的真假的判断与应用，考查轨迹方程的求法，向量的数量积的应用，考查分析问题解决问题的能力，是中档题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.【分析】（Ⅰ）推导出 $CD \perp AD$，$CD \perp PA$，从而 $CD \perp$ 平面 PAD，由此能证明 $CD \perp PD$；

（Ⅱ）以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出异面直线 BC 与 AE 所成角.

【解答】解：（Ⅰ）证明：$\because$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，点 E 为 PC 的中点，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore CD \perp AD$，$CD \perp PA$，

$\because PA \cap AD = A$，PA、$AD \subset$ 平面 PAD，

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD，

$\because PD \subset$ 平面 PAD，$\therefore CD \perp PD$；

（Ⅱ）以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(2，0，0)$，$C(2，2\sqrt{2}，0)$，$A(0，0，0)$，$P(0，0，2)$，$E(1，\sqrt{2}，1)$，

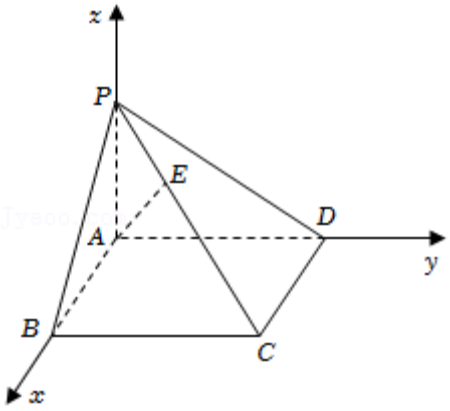
$\overrightarrow{BC} = (0，2\sqrt{2}，0)$，$\overrightarrow{AE} = (1，\sqrt{2}，1)$，

设异面直线 BC 与 AE 所成角为 θ，

则 $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AE}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore$ 异面直线 BC 与 AE 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$.



【点评】本题考查线线垂直的证明，考查异面直线所成的角的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力等数学核心素养，是基础题.

17.【分析】（Ⅰ）选①②③主要利用关系式的应用求出数列的通项公式；

（Ⅱ）利用对数的运算求出数列的和，进一步利用二次函数性质的应用求出结果.

【解答】解：（Ⅰ）选条件①，设数列的公比为q，由于$4a_2$，$3a_3$，$2a_4$成等差数列；

所以$\begin{cases} a_1=1 \\ 6a_3=4a_2+2a_4 \end{cases}$，整理得$6q^2=4q+2q^3$，

解得$q=2$或1（舍去），

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，

选条件②：$S_n=2a_n-1$①；

当$n=1$时，$a_1=1$，

当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$②

所以①－②得：$a_n=2a_{n-1}$，

故数列$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列，

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，（首项符合通项），

所以$a_n=2^{n-1}$.

选条件③：$S_3=7$.

所以$\begin{cases} a_1=1 \\ S_3=7 \end{cases}$，整理得$\begin{cases} a_1=1 \\ S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7 \end{cases}$，

解得$q=2$，

所以$a_n=2^{n-1}$.

（Ⅱ）令$b_n=2\log_2 a_n-7=2(n-1)-7=2n-9$，

所以$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=\dfrac{n(-7+2n-9)}{2}=n(n-8)=(n-4)^2-16$，

当$n=4$时，最小值为-16.

【点评】本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法及应用，数列的求和的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

18.【分析】（Ⅰ）根据表格中的数据，求出男女生跳绳合格的人数以及总的人数，利用古典概型的概率公式求解即可；

（Ⅱ）根据相互独立事件的概率求出分布列，由数学期望的计算公式求解即可；

（Ⅲ）根据表格中所给的数据，由方差的意义即可得到答案.

【解答】解：（Ⅰ）设事件 A 为“从样本中的中小学生随机抽取 1 人，该同学跳绳成绩合格”，

样本中男生跳绳成绩合格的有：$90+88+60+80+82=400$ 人，

样本中女生跳绳成绩合格的有：$80+72+58+62+78=350$ 人，

样本中男、女跳绳成绩合格的共有：$400+350=750$ 人，

样本中的男生总人数为：$400+100=500$ 人，

样本中男、女生总人数为：$500+500=1000$，

所以 P（A）$=\dfrac{400+350}{500+500}=\dfrac{3}{4}$；

（Ⅱ）设事件 B 为“从该地区众多中小学的男生中随机抽取 1 人，该生跳绳成绩合格”，则 P（B）$=\dfrac{400}{500}=\dfrac{4}{5}$，

设事件 C 为“从该地区众多中小学的女生中随机抽取 1 人，该生跳绳成绩合格”，P（C）$=\dfrac{350}{500}=\dfrac{7}{10}$，

由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，

则 $P(X=0)=P(\bar{B}\bar{C})=P(\bar{B})P(\bar{C})=(1-\dfrac{4}{5})\times(1-\dfrac{7}{10})=\dfrac{3}{50}$，

$P(X=1)=P(\bar{B}C\bigcup B\bar{C})=P(\bar{B})P(C)\bigcup P(B)P(\bar{C})=(1-\dfrac{4}{5})\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{4}{5}\times(1-\dfrac{7}{10})=\dfrac{19}{50}$，

$P(X=2)=P(BC)=P(B)P(C)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{14}{25}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{3}{50}$	$\dfrac{19}{50}$	$\dfrac{14}{25}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{3}{50}+1\times\dfrac{19}{50}+2\times\dfrac{14}{25}=\dfrac{3}{2}$；

（Ⅲ）$D\xi_1$ 最小，$D\xi_3$ 最大.

【点评】本题考查了古典概型概率公式的应用，离散型随机变量及其分布列和离散型随机变量期望的求解，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于中档题.

19.【分析】（Ⅰ）先求出导函数 $f'(x)$，再利用导数的几何意义求出 $k=f'(0)=1$，再求出切点坐标，根据点斜式即可得到切线方程.

（Ⅱ）先求出导函数 $F'(x)=a+\sqrt{2}e^x\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$，所以当 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$\sqrt{2}e^x\sin(x-\dfrac{\pi}{4})\geqslant 0$，又 $a\geqslant 0$，所以 $F(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增，从而求出函数 $F(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

（Ⅲ）写出 $a>\frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}$ 的任意一个实数即可.

【解答】解：（Ⅰ）∵ $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，$k=f'(0)=1$，

又∵ $f(0)=1$，

∴切点坐标为 $(0,1)$，

∴曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为：$y=x+1$.

（Ⅱ）$F(x)=ax-e^x\cos x$，

$\therefore F'(x)=a-e^x\cos x+e^x\sin x=a+e^x(\sin x-\cos x)=a+\sqrt{2}e^x\sin(x-\frac{\pi}{4})$，

当 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时，$x-\frac{\pi}{4}\in[0,\frac{\pi}{4}]$，此时 $\sqrt{2}e^x\sin(x-\frac{\pi}{4})\geqslant 0$，

又∵ $a\geqslant 0$，$\therefore F'(x)\geqslant 0$，

∴ $F(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

$\therefore F(x)_{max}=F(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi a}{2}$，$F(x)_{min}=F(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi a}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

（Ⅲ）$a=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}+1$.（写出 $a>\frac{2\sqrt{2}}{\pi}e^{\frac{\pi}{4}}$ 的任意一个实数即可）.

【点评】本题主要考查了导数的几何意义，考查了利用导数求函数的最值，同时考查了学生的计算能力，是中档题.

20.【分析】（Ⅰ）根据题意求得 a，b，c 的值，由此可得椭圆方程；

（Ⅱ）求出 M，N 两点的坐标，表示出 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$，再由 $P(x_0，y_0)$ 是 C 上一点，得 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1, y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$，代入化简即可得证.

【解答】解：（Ⅰ）设 $F(c,0)$，$A(c,y_0)$，则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

又因为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，

因为 $|AF|=\frac{3}{2}$，

所以 $|AF|=|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{2}$，解得 $b=\sqrt{3}$，

由 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1(y_0\neq 0)$，即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}(y_0\neq 0)$，

因为直线 AF 的方程为 $x=1$，

所以直线 l 与 AF 的交点为 $M(1,\frac{12-3x_0}{4y_0})$，

直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N(4,\frac{3-3x_0}{y_0})$，

则 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(\frac{12-3x_0}{4y_0})^2}{9+(\frac{3-3x_0}{y_0})^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^{\ 2}+16(1-x_0)^2}$ ①，

又 $P(x_0,\ y_0)$ 是 C 上一点，则 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+\frac{y_0^{\ 2}}{3}=1, y_0^{\ 2}=3-\frac{3x_0^{\ 2}}{4}$，

代入①得，$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^{\ 2}+16-32x_0+16x_0^{\ 2}}=\frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^{\ 2}-8x_0+16)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2}=\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}$ 为定值.

【点评】本题考查椭圆方程的求法，考查直线与椭圆的位置关系，考查圆锥曲线中的证明问题，考查推理能力及运算能力，属于中档题.

21.【分析】解：（Ⅰ）由 $6\times 6=36$ 与 $6\div 6=1$ 均不属于数集 $\{2,\ 3,\ 6\}$，得到数集 $\{2,\ 3,\ 6\}$ 不具有性质 P，由 1×1，1×3，1×4，1×12，$\frac{1}{1},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{12}{12},\frac{12}{3},\frac{12}{4}$ 均属于数集 $\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$，得到数集 $\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$ 具有性质 P.

（Ⅱ）①数集 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$，$(1\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n,\ n\geqslant 2)$ 具有性质 P，数集 A 中各个元素都是整数，假设存在一个数 a_i 不是 a_n 的因数，则 $a_i\cdot a_n>a_n$，从而 $a_ia_n\notin A$，a_i 不是 a_n 的因数，$\frac{a_n}{a_i}$ 不是整数，$\frac{a_n}{a_i}\notin A$，这与数集 A 具有性质 P 相矛盾，假设不成立，从而对任意 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有 a_i 是 a_n 的因数.

②由 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 具有性质 P，得到 a_na_n 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于 A，且 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$，从而 $1=a_1<a_2<\cdots<a_n$，$a_ka_n>a_n$，$a_ka_n\notin A(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，

由 A 具有性质 P 知 $\frac{a_n}{a_k}\in A$，$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，由此能证明 $a_n^n=a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdot\ldots\cdot a_n^2$.

【解答】解：（Ⅰ）∵ $6\times 6=36$ 与 $6\div 6=1$ 均不属于数集 $\{2,\ 3,\ 6\}$，

∴数集 $\{2,\ 3,\ 6\}$ 不具有性质 P，

∵1×1，1×3，1×4，1×12，$\frac{1}{1},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{12}{12},\frac{12}{3},\frac{12}{4}$ 均属于数集 $\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$，

∴数集 $\{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$ 具有性质 P.

（Ⅱ）①证明：∵数集 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$，$(1\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n,\ n\geqslant 2)$ 具有性质 P，

若 $a_k \in N^*(k=1，2，3，\cdots)$，即数集 A 中各个元素都是整数，

假设存在一个数 a_i 不是 a_n 的因数，

$\because a_i$ 为整数，且不是 a_n 的因数，

$\therefore a_i > 1$，则 $a_i \cdot a_n > a_n$，$\therefore a_i a_n \notin A$，

$\because a_i$ 不是 a_n 的因数，$\frac{a_n}{a_i}$ 不是整数，$\frac{a_n}{a_i} \notin A$，

这与数集 A 具有性质 P 相矛盾，

$\therefore$ 假设不成立，

$\therefore$ 对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都有 a_i 是 a_n 的因数．

②证明：$\because A=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$ 具有性质 P，

$\therefore a_n a_n$ 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于 A，且 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，

$\therefore a_n a_n > a_n$，$\therefore a_n a_n \notin A$，$\therefore 1=\frac{a_n}{a_n} \in A$，

$\therefore a_1 = 1$，$\therefore 1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，

$\therefore a_k a_n > a_n$，$\therefore a_k a_n \notin A(k=2，3，\cdots，n)$，

由 A 具有性质 P 知 $\frac{a_n}{a_k} \in A$，$(k=1，2，3，\cdots，n)$，

又 $\frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \cdots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}$，

$\therefore \frac{a_n}{a_n}=a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}}=a_2$，$\cdots$，$\frac{a_n}{a_2}=a_{n-1}$，$\frac{a_n}{a_1}=a_n$，

$\frac{a_n}{a_n} \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_2} \times \frac{a_n}{a_1} = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n$，

$\frac{{a_n}^2}{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n} = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n$，

$\therefore a_n^n = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2$．

【点评】本题考查数集的性质的判断，考查数列的性质的证明，考查运算求解能力、推理论证能力等数学核心素养，是难题。