2021 北京丰台高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（4 分）在复平面内，复数 $z=\frac{i}{2-i}$ 对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2.（4 分）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是(　　)

A．$y=(\frac{1}{2})^x$　　B．$y=x^{-1}$　　C．$y=(x-1)^2$　　D．$y=lnx$

3.（4 分）已知向量 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(2,m)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$(　　)

A．–4　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．4

4.（4 分）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，它的终边与以原点 O 为圆心的单位圆的交点为 $P(\frac{2}{3},\ y_0)$，则 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$(　　)

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$-\frac{\sqrt{5}}{3}$

5.（4 分）已知 α，β，γ 是三个不同的平面，a，b 是两条不同的直线，下列命题中正确的是(　　)

A．若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$　　B．若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a//b$

C．若 $a//\alpha$，$b//\alpha$，则 $a//b$　　D．若 $a//\alpha$，$a//\beta$，则 $\alpha//\beta$

6.（4 分）“$a=1$”是“直线 $x+ay-1=0$ 与直线 $ax-y+1=0$ 相互垂直”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7.（4 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则 $a=$(　　)

A．3　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

8.（4 分）将函数 $y=\log_2(2x+2)$ 的图象向下平移 1 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$(　　)

A．$\log_2(2x+1)-1$　　B．$\log_2(2x+1)+1$　　C．$\log_2 x-1$　　D．$\log_2 x$

9.（4 分）某中学举行“十八而志，青春万岁”成人礼，现在需要从 4 个语言类节目和 6 个歌唱类节目中各选 2 个节目进行展演，则语言类节目 A 和歌唱类节目 B 至少有一个被选中的不同选法种数是(　　)

A．15　　B．45　　C．60　　D．75

10.（4 分）如图，半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0)$ 与半椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1(x\leqslant 0)$ 组成的曲线称为“果圆”，其中 $a^2=b^2+c^2$，

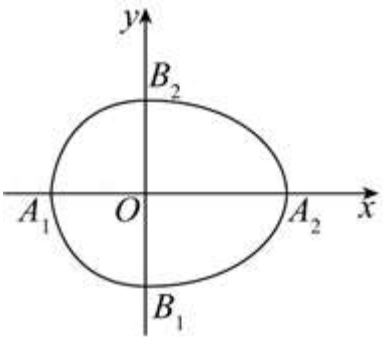
$a>0$，$b>c>0$．A_1，A_2和B_1，B_2分别是“果圆”与x轴，y轴的交点．给出下列三个结论：

①$\sqrt{2}c<a<\sqrt{2}b$；

②若$|A_1A_2|=|B_1B_2|$，则$a:b:c=5:4:3$；

③若在“果圆”y轴右侧部分上存在点P，使得$\angle A_1PA_2=90°$，则$\frac{1}{2}<\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．

其中，所有正确结论的序号是(　　)



A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11．（5分）函数$f(x)=\sin x+\cos x$的值域为____.

12．（5分）能够说明“若a，b，m均为正数，则$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$”是假命题的一组整数$a$，$b$的值依次为____.

13．（5分）已知点$P(x_0$，$y_0)$为抛物线$C:x^2=4y$上的点，且点P到抛物线C焦点的距离为3，则$|x_0|=$____.

14．（5分）赵爽是我国古代数学家，大约在公元222年，他为《周髀算经》一书作序时，介绍了“赵爽弦图”——由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如图1所示．类比“赵爽弦图”，可构造如图2所示的图形，它是由3个全等的三角形与中间一个小等边三角形拼成的一个大等边三角形．在ΔABC中，若$AF=1$，$FD=2$，则$AB=$____.

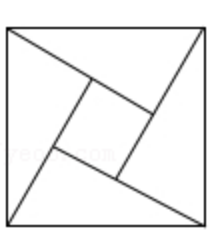


图1

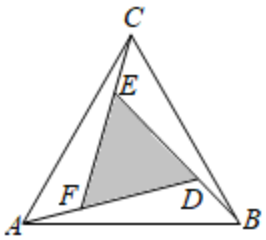


图2

15．（5分）函数$f(x)$是定义域为R的奇函数，满足$f(\frac{\pi}{2}-x)=f(\frac{\pi}{2}+x)$，且当$x\in[0$，$\pi)$时，$f(x)=\frac{\sin x}{x^2-\pi x+\pi}$，

给出下列四个结论：

①$f(\pi)=0$；

②π是函数$f(x)$的周期；

③函数$f(x)$在区间$(-1,1)$上单调递增；

④函数$g(x)=f(x)-\sin 1(x\in[-10$，$10])$所有零点之和为$3\pi$．

其中，正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（13 分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且满足_____．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{a_n+2^{n-1}\}$的前n项和S_n．

从①$a_{n+1}=2a_n(n\in N^*)$；②$a_{n+1}-a_n=2(n\in N^*)$；③$a_{n+1}+a_n=2(n\in N^*)$这三个条件中选择一个，补充在上面的问题中并作答．

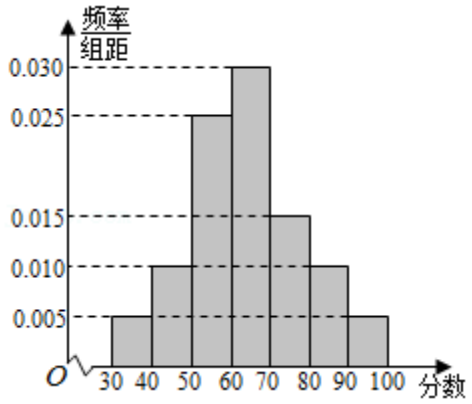
17．（14 分）某公司开发了一款手机应用软件，为了解用户对这款软件的满意度，推出该软件 3 个月后，从使用该软件的用户中随机抽查了 1000 名，将所得的满意度的分数分成 7 组：[30，40)，[40，50)，…，[90，100]，整理得到如图频率分布直方图．

根据所得的满意度的分数，将用户的满意度分为两个等级：

满意度的分数	[30，60)	[60，100]
满意度的等级	不满意	满意

（Ⅰ）从使用该软件的用户中随机抽取 1 人，估计其满意度的等级为“满意”的概率；

（Ⅱ）用频率估计概率，从使用该软件的所有用户中随机抽取 2 人，以X表示这 2 人中满意度的等级为“满意”的人数，求X的分布列和数学期望．

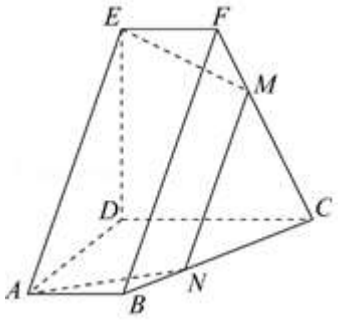


18．（14 分）如图，在多面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$和$CDEF$都是直角梯形，$AB//CD$，$CD//EF$，$AB=EF=1$，$DA=DC=DE=2$，$\angle ADE=\angle ADC=\angle EDC=\frac{\pi}{2}$，点$M$为棱$CF$上一点，平面$AEM$与棱$BC$交于点$N$．

（Ⅰ）求证：$ED\perp$平面$ABCD$；

（Ⅱ）求证：$AE//MN$；

（Ⅲ）若平面AEM与平面$CDEF$所成锐二面角的余弦值为$\frac{2}{3}$，求$\frac{FM}{FC}$的值．



19.（15 分）已知函数 $f(x)=(x^2-2ax)lnx-\frac{1}{2}x^2+2ax(a\in R)$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

20.（15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$，过点 $(-1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 A，B.

（Ⅰ）当直线 l 与 x 轴垂直时，求 $|AB|$；

（Ⅱ）在 x 轴上是否存在定点 P，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值？若存在，求点 P 的坐标及 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值；若不存在，说明理由.

21.（14 分）设数集 S 满足：①任意 $x\in S$，有 $x\geqslant 0$；②任意 x，$y\in S$，有 $x+y\in S$ 或 $|x-y|\in S$，则称数集 S 具有性质 P.

（Ⅰ）判断数集 $A=\{0，1，2，4\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（Ⅱ）若数集 $B=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$ 且 $a_i<a_{i+1}(i=1，2，\cdots，n-1)$ 具有性质 P.

（ⅰ）当 $n=2021$ 时，求证：a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是等差数列；

（ⅱ）当 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 不是等差数列时，写出 n 的最大值.（结论不需要证明）

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【分析】利用复数代数形式的乘除运算化简，求得 z 的坐标得答案.

【解答】解：$\because z=\frac{i}{2-i}=\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{i^2+2i}{2^2+1^2}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$，

$\therefore$ 复数 $z=\frac{i}{2-i}$ 对应的点的坐标为 $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$，位于第二象限.

故选：B.

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

2.【分析】根据题意，依次分析选项中函数的单调性，即可得答案.

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，$y=(\frac{1}{2})^x$，是指数函数，在 R 上为减函数，不符合题意，

对于 B，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$，是反比例函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数，不符合题意，

对于 C，$y=(x-1)^2$，是二次函数，在区间 $(0,1)$ 上为减函数，不符合题意，

对于 D，$y=lnx$，是对数函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意，

故选：D.

【点评】本题考查函数单调性的判断，注意常见函数的单调性，属于基础题.

3.【分析】由题意利用两个向量共线的性质，两个向量坐标形式的运算，求得 m 的值.

【解答】解：$\because$ 向量 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(2,m)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，

则 $-m-4=0$，求得 $m=-4$，

故选：A.

【点评】本题主要考查两个向量共线的性质，两个向量坐标形式的运算，属于基础题.

4.【分析】由题意利用任意角的三角函数的定义，诱导公式，计算求得结果.

【解答】解：在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，

它的终边与以原点 O 为圆心的单位圆的交点为 $P(\frac{2}{3},\ y_0)$，

则 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha=\frac{2}{3}$，

故选：A.

【点评】本题主要考查任意角的三角函数的定义、诱导公式，属于基础题.

5.【分析】直接利用线面的位置关系的应用，面面位置关系的应用，法向量的应用判断 A、B、C、D 的结论.

【解答】解：对于 A：若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$ 或 α 和 β 相交，故 A 错误；

对于 B：若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 a 和 b 相当于平面 α 的法向量，故 $a//b$，故 B 正确；

对于 C：若 $a//\alpha$，$b//\alpha$，则 $a//b$ 或 a 和 b 相交或 a 和 b 异面，故 C 错误；

对于 D：若 $a//\alpha$，$a//\beta$，则 α 和 β 可能平行或相交，故 D 错误；

故选：B．

【点评】本题考查的知识要点：线面的位置关系的应用，面面位置关系的应用，法向量，主要考查学生的空间想象能力，属于基础题．

6．【分析】根据充分条件和必要条件的定义结合直线垂直的等价条件进行判断即可．

【解答】解：①当$a=1$时，两方程可化为$x+y-1=0$，$x-y+1=0$，斜率分别为-1和1，$\therefore$两直线垂直，$\therefore$充分性成立，

②当直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$垂直时，则$1\times a+a\times(-1)=0$，$\therefore a\in R$，$\therefore$必要性不成立，

$\therefore a=1$是直线$x+ay-1=0$与直线$ax-y+1=0$垂直充分不必要条件．

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件，结合直线垂直的等价条件是解决本题的关键．

7．【分析】由双曲线方程求得其一条渐近线方程，根据圆的方程求得圆心与半径，由题意可得：圆心到渐近线的距离等于半径，根据点到直线的距离公式，即可求得a的值．

【解答】解：由双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线为$ay=-x$，即$ay+x=0$，

圆$x^2+(y-2)^2=1$的圆心为$(0,2)$，半径为1，

由题意可知：圆心到渐近线的距离等于半径，即$\frac{|2a|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，

由$a>0$，解得：$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：C．

【点评】本题考查双曲线的渐近线方程、直线与圆相切的性质、点到直线的距离公式，考查计算能力，属于基础题．

8．【分析】根据函数平移变换进行求解即可．

【解答】解：将函数$y=\log_2(2x+2)$的图象向下平移1个单位长度，

得到$y=\log_2(2x+2)-1$，

再向右平移1个单位长度，得到函数$g(x)$的图象，

级$g(x)=\log_2[2(x-1)+2]-1=\log_2 2x-1=1+\log_2 x-1=\log_2 x$，

故选：D．

【点评】本题主要考查函数的图象变换，根据平移关系是解决本题的关键，是基础题．

9．【分析】根据题意，按A、B是否入选分3种情况讨论，求出每种情况下的选法数目，由加法原理计算可得答案．

【解答】解：根据题意，分3种情况讨论：

①A入选而B没有入选，有$C_3^1C_5^2=30$种选法，

②A没有入选而B入选，有$C_3^2C_5^1=15$种选法，

③A、B都入选，有$C_3^1C_5^1=15$种选法，

则有$30+15+15=60$种选法，

故选：C．

【点评】本题考查排列组合的应用，涉及分类计数原理的应用，属于基础题．

10.【分析】①用放缩不等式法判断；②解方程组，求解判断；③用椭圆的参数方程，解不等式组，求解判断.

【解答】解：对于①，因为$a^2=b^2+c^2$，$a>0$，$b>c>0$，所以中$2c^2<a^2<2b^2$，所以$\sqrt{2}c<a<\sqrt{2}b$，所以①对；

对于②，因为$|A_1A_2|=|B_1B_2|$，所以$2b=c+a$，又因为$a^2=b^2+c^2$，所以$3a^2-2ac-5c^2=0$，

于是$(a+c)(3a-5c)=0$，所以$\frac{a}{c}=\frac{5}{3}$，令$a=5t$，$c=3t$，则$b=4t$，所以$a:b:c=5:4:3$，所以②对；

对于③，设$P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，$\cos\theta\in(0,1)$，$\overrightarrow{A_1P}=(a\cos\theta+c,b\sin\theta)$，$\overrightarrow{A_2P}=(a\cos\theta-a,b\sin\theta)$，

因为$\angle A_1PA_2=90°$，所以，$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_2P}=0$，所以$(a\cos\theta+c)(a\cos\theta-a)+b^2\sin^2\theta=0$，令$\frac{c}{a}=t$，则

$\cos\theta=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1$，因为$\cos\theta\in(0,1)$，所以$0<1-t-t^2<t^2$，解得$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以③对；

故选：D.

【点评】本题以命题真假为载体，考查了椭圆的性质，属于中档题.

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11.【分析】利用辅助角公式，化简函数的解析式，然后求解即可.

【解答】解：函数$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$.

故答案为：$[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$.

【点评】本题考查了辅助角公式和三角函数的值域的求法，是基础题.

12.【分析】先确定原命题的否定，再确定假命题条件下正整数a，b的取值.

【解答】解：因为当a，b，m均为正数时，$\frac{b+m}{a+m}\leqslant\frac{b}{a}\Leftrightarrow ab+am\leqslant ba+bm\Leftrightarrow am\leqslant bm\Leftrightarrow a\leqslant b$，

所以“若a，b，m均为正数，则$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$”是假命题的一组整数$a$，$b$的值依次为1，2（只要$a$、$b$为整数且$a\leqslant b$即可）.

故答案为：1，2（答案不唯一）.

【点评】本题考查了命题真假的概念，考查了不等式的基本性质，属于基础题.

13.【分析】求出抛物线的准线方程，利用抛物线的性质求解P的纵坐标，然后求解$|x_0|$即可.

【解答】解：抛物线的准线方程，$y=-1$，

点$P(x_0，y_0)$为抛物线$C:x^2=4y$上的点，且点P到抛物线C焦点的距离为3，

可得$y_0=2$，所以$x_0^2=4y_0=8$，可得$|x_0|=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用，考查转化思想以及计算能力，是基础题.

14.【分析】根据题意，在ΔABD中，利用余弦定理即可求出AB的值.

【解答】解：ΔABD中，$BD=AF=1$，$AD=AF+FD=1+2=3$，$\angle ADB=180°-60°=120°$，

由余弦定理得，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos120°=13$，

解得$AB=\sqrt{13}$.

故答案为：$\sqrt{13}$.

【点评】本题考查了三角形中简单的几何计算问题，也考查了数学建模能力与运算求解能力，是基础题.

15.【分析】①根据 $f(\frac{\pi}{2}-x)=f(\frac{\pi}{2}+x)$ 计算 $f(\pi)$ 判断；②用反证法判断；③用导数判断；④用周期函数性质判断.

【解答】解：对于①，因为 $f(\pi)=f(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=f(0)=0$，所以①对；

对于②，假设 π 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})$，又因为 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，所以 $f(-\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2})$，

于是 $f(\frac{\pi}{2})=0$，

与 $f(\frac{\pi}{2})\neq 0$ 矛盾，所以②错；

对于③，因为 $f'(x)=\frac{\cos x(x^2-\pi x+\pi)+\sin x(\pi-2x)}{(x^2-\pi x+\pi)^2}>0$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时成立，所以函数 $f(x)$ 在 $[0，1)$ 上单调递增，

又因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，所以③对；

对于④，由③知 $f(x)$ 在区间 $[0，\frac{\pi}{2})$ 上单调递，又因为满足 $f(\frac{\pi}{2}-x)=f(\frac{\pi}{2}+x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，

$f(x+2\pi)=f(\frac{\pi}{2}+(\frac{3\pi}{2}+x))=f(\frac{\pi}{2}-(\frac{3\pi}{2}+x))=-f(\pi+x)=-f(\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{2}+x))=-f(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}+x))=-f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 以 2π 为周期，

在一个周期内函数 $g(x)=f(x)-\sin 1$ 两个零点之和为 π，

在 $[-10，10]$ 内有三个周期，所以所有零点之和为 3π，所以④对.

故答案为：①③④.

【点评】本题以命题真假判断载体，考查了三角函数的基本性质，属于中档题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【分析】分别运用等比数列和等差数列的通项公式，可得（Ⅰ）；再由数列的分组求和，结合等比数列的求和公式，可得所求和.

【解答】解：选① $a_{n+1}=2a_n(n\in N^*)$.

（Ⅰ）因为 $a_{n+1}=2a_n(n\in N^*)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$；

（Ⅱ） $a_n+2^{n-1}=2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$，

所以数列 $\{a_n+2^{n-1}\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $S_n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2\times(2^n-1)=2^{n+1}-2$.

选② $a_{n+1}-a_n=2(n\in N^*)$.

（Ⅰ）因为 $a_{n+1}-a_n=2(n\in N^*)$，

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，2为公差的等差数列.

所以$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$；

（Ⅱ）$a_n+2^{n-1}=2n-1+2^{n-1}$，

所以$S_n=(1+3+\cdots+2n-1)+(1+2+\cdots+2^{n-1})=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=n^2+2^n-1$.

选③$a_{n+1}+a_n=2(n\in N^*)$.

（Ⅰ）因为$a_{n+1}+a_n=2(n\in N^*)$，

所以$a_n+a_{n-1}=2,(n\geqslant 2,n\in N^*)$.

两式相减得$a_{n+1}-a_{n-1}=0,(n\geqslant 2,n\in N^*)$，

即$a_{n+1}=a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in N^*)$.

又因为$a_1=a_2=1$，

所以数列$\{a_n\}$是常数列.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1(n\in N^*)$.

（Ⅱ）$a_n+2^{n-1}=1+2^{n-1}$，

所以$S_n=n+\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=n+2^n-1$.

【点评】本题考查等差数列和等比数列的通项公式和求和公式的运用，以及数列的分组求和，考查运算能力，属于中档题.

17.【分析】（Ⅰ）根据频率分布直方图，求出样本中[60，100]的频率，即可得到结果.

（Ⅱ）X的所有可能取值为0，1，2．求出概率，得到分布列，然后求解期望即可.

【解答】解：（Ⅰ）根据频率分布直方图可知，样本中[60，100]的频率为：$(0.030+0.015+0.010+0.005)\times 10=0.6$，

所以从使用该软件的用户中随机抽取1人，其满意度的等级为“满意”的概率约为0.6.

（Ⅱ）用频率估计概率，则“满意”的概率为$\frac{3}{5}$，“不满意”的概率为$\frac{2}{5}$.

X的所有可能取值为0，1，2.

$P(X=0)=C_2^0(\frac{3}{5})^0(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$；

$P(X=1)=C_2^1(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})=\frac{12}{25}$；

$P(X=2)=C_2^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^0=\frac{9}{25}$.

所以X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

数学期望$E(X)=0\times\frac{4}{25}+1\times\frac{12}{25}+2\times\frac{9}{25}=\frac{6}{5}$……（14分）

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列以及期望的求法，考查分析问题解决问题的能力，是中档题.

18.【分析】（Ⅰ）证明 $ED \perp AD$， $ED \perp DC$．然后推出 $ED \perp$ 平面 $ABCD$．

（Ⅱ）证明四边形 $ABFE$ 是平行四边形．得到 $AE//BF$．推出 $AE//$ 平面 BCF．然后证明 $AE//MN$．

（Ⅲ）建立空间直角坐标系 $D-xyz$，求出平面 AEM 的法向量，平面 $CDEF$ 的法向量，利用空间向量的数列；就求解二面角的平面角的余弦函数值，即可推出结果.

【解答】（Ⅰ）证明：因为 $\angle ADE = \angle EDC = \frac{\pi}{2}$，

所以 $ED \perp AD$， $ED \perp DC$．

因为 $AD \bigcap DC = D$， AD， $DC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $ED \perp$ 平面 $ABCD$．……（4 分）

（Ⅱ）证明：因为 $AB//CD$， $CD//EF$，

所以 $AB//EF$．

因为 $AB = EF$，

所以四边形 $ABFE$ 是平行四边形.

所以 $AE//BF$．

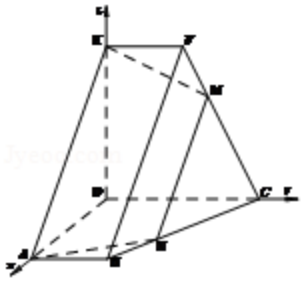
因为 $AE \not\subset$ 平面 BCF， $BF \subset$ 平面 BCF，

所以 $AE//$ 平面 BCF．

因为 $AE \subset$ 平面 AEM，平面 $AEM \bigcap$ 平面 $BCF = MN$，

所以 $AE//MN$．……（8 分）

（Ⅲ）解：因为 $ED \perp AD$， $ED \perp DC$， $AD \perp DC$，所以如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，



由 $AB = EF = 1$， $DA = DC = DE = 2$，

可知 $D(0，0，0)$， $A(2，0，0)$， $B(2，1，0)$， $C(0，2，0)$， $E(0，0，2)$， $F(0，1，2)$，

$\overrightarrow{AE} = (-2,0,2)$， $\overrightarrow{FC} = (0,1,-2)$，

设 $\frac{FM}{FC} = \lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$，

则 $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{EF} + \lambda \overrightarrow{FC} = (0，1，0) + \lambda (0，1，-2) = (0，1+\lambda，-2\lambda)$，

设 $\vec{m} = (x，y，z)$ 是平面 AEM 的法向量，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -x + z = 0 \\ (1+\lambda) y - 2\lambda z = 0 \end{cases}$，

所以 $\vec{m} = (1+\lambda，2\lambda，1+\lambda)$．

因为$\vec{n}=(1，0，0)$是平面$CDEF$的法向量，

所以$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1+\lambda}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(2\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}=\frac{2}{3}$.

因为$0\leqslant\lambda\leqslant1$，解得$\lambda=\frac{1}{3}$.

所以平面AEM与平面$CDEF$所成锐二面角的余弦值为$\frac{2}{3}$时，$\frac{FM}{FC}=\frac{1}{3}$．……（14分）

【点评】本题考查直线与平面垂直的判断定理的应用，直线与平面平行的判断定理的应用，二面角的平面角的求法与应用，是中档题.

19.【分析】（Ⅰ）求出$f(x)$的导数，令$f'(x)=0$，可得$f(x)$的极值点，可得随x的变化，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况，从而可求得$f(x)$的最小值；

（Ⅱ）对$f(x)$求导，再对a分类讨论，由导数与单调性的关系即可求解单调区间.

【解答】（本小题15分）

解：（Ⅰ）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

若$a=0$，则$f(x)=x^2lnx-\frac{1}{2}x^2$，$f'(x)=2xlnx$，

令$f'(x)=0$，得$x=1$，

随x的变化，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表所示

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值f（1）	单调递增

所以$a=0$时，$f(x)$的最小值为$f(1)=-\frac{1}{2}$．……（6分）

（Ⅱ）因为$f'(x)=2(x-a)lnx(x>0)$，

当$a\leqslant0$时，$x-a>0$，

令$f'(x)>0$，得$lnx>0$，所以$x>1$，$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，

令$f'(x)<0$，得$lnx>0$，所以$0<x<1$，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递减.

当$0<a<1$时，令$f'(x)=0$，得$x=1$或$x=a$，

随x的变化，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表所示

x	$(0,a)$	a	$(a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	f（a）	单调递减	f（1）	单调递增

所以$f(x)$在区间$(0,a)$上单调递增，在区间$(a,1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增.

当$a=1$时，因为$f'(x)=2(x-1)lnx\geqslant0$，当且仅当$x=1$时，$f'(x)=0$，

所以$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=a$，

随 x 的变化，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表所示

x	$(0,1)$	1	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	单调递增	f（1）	单调递减	f（a）	单调递增

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,a)$ 上单调递减，在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,a)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(a,1)$；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(a,+\infty)$，单调递减区间为 $(1,a)$.

……（15 分）

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的单调性与最值，考查分类讨论思想与运算求解能力，属于难题.

20.【分析】（Ⅰ）当直线 l 斜率不存在时，其方程为 $x=-1$．联立直线与椭圆方程，求出 AB 坐标，然后求解距离即可.

（Ⅱ）假设存在 $P(m,0)$，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值.

①当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为：$y=k(x+1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，联立直线与椭圆方程，结合韦达定理利用向量的数量积 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为常数，求出 $m=-\frac{5}{3}$，说明存在点 $P(-\frac{5}{3},0)$，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 $-\frac{2}{9}$.

②当直线 l 与 x 轴垂直时，不妨设 $A(-1,\frac{\sqrt{6}}{3}),B(-1,-\frac{\sqrt{6}}{3})$，验证即可.

【解答】解：（Ⅰ）当直线 l 斜率不存在时，其方程为 $x=-1$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1,\\ x=-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3}.\end{cases}$

所以 $|AB|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）假设存在 $P(m,0)$，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值.

①当直线 l 斜率存在时，

设直线 l 的方程为：$y=k(x+1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

由 $\begin{cases}x^2+3y^2=3,\\ y=k(x+1)\end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-3=0$.

则 $x_1+x_2=-\frac{6k^2}{1+3k^2},x_1x_2=\frac{3k^2-3}{1+3k^2}$.

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-m,y_1)\cdot(x_2-m,y_2)$

$=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2$

$= x_1x_2 - m(x_1+x_2) + m^2 + k^2(x_1+1)(x_2+1)$

$= x_1x_2 - m(x_1+x_2) + m^2 + k^2x_1x_2 + k^2(x_1+x_2) + k^2$

$= (k^2-m)(x_1+x_2) + (k^2+1)x_1x_2 + k^2 + m^2$，

$= \frac{(k^2-m)(-6k^2)}{1+3k^2} + \frac{(k^2+1)(3k^2-3)}{1+3k^2} + \frac{(k^2+m^2)(1+3k^2)}{1+3k^2}$

$= \frac{(3m^2+6m+1)k^2 + m^2 - 3}{1+3k^2}$.

若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为常数，只需 $\frac{3m^2+6m+1}{3} = \frac{m^2-3}{1}$，

解得 $m = -\frac{5}{3}$，此时 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = -\frac{2}{9}$.

所以存在点 $P(-\frac{5}{3},0)$，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 $-\frac{2}{9}$.

②当直线 l 与 x 轴垂直时，

不妨设 $A(-1,\frac{\sqrt{6}}{3}), B(-1,-\frac{\sqrt{6}}{3})$，

当点 P 坐标为 $P(-\frac{5}{3},0)$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (-1+\frac{5}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})\cdot(-1+\frac{5}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{4}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{2}{9}$.

综上，存在点 $P(-\frac{5}{3},0)$，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 $-\frac{2}{9}$. ……（15 分）

【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系的综合应用，考查转化思想以及计算能力，是难题.

21.【分析】（Ⅰ）推导出 $4+1\notin A$，$|4-1|\notin A$，由此推导出数集 A 不具有性质 P.

（Ⅱ）(i) 由 $a_{2021}+a_{2021} = 2a_{2021} > a_{2021}$，得 $a_{2021}+a_{2021}\notin B$，从而 $|a_{2021}-a_{2021}| = 0\in B$，则 $a_1 = 0$. 由 $a_i < a_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, 2020)$，得到 $a_{2021}+a_i\notin B(i = 2, 3, \cdots, 2020)$. $a_{2021}-a_i\in B(i = 2, 3, \cdots, 2020)$. 推导出 $a_{2021}-a_i = a_{2022-i}(i = 2, 3, \cdots, 2020)$，$a_{2020}-a_i = a_{2021-i}(i = 3, \cdots, 2019)$. 从而 $a_3-a_2 = a_4-a_3 = \cdots = a_{2019}-a_{2018} = a_2$. 由此能证明 a_1，a_2，…，a_n 是等差数列.

$(ii)n$ 的最大值是 4.

【解答】解：（Ⅰ）因为 $4+1\notin A$，$|4-1|\notin A$，所以数集 A 不具有性质 P；……（3 分）

（Ⅱ）(i) 证明：因为 $a_{2021}+a_{2021} = 2a_{2021} > a_{2021}$，所以 $a_{2021}+a_{2021}\notin B$.

所以 $|a_{2021}-a_{2021}| = 0\in B$，则 $a_1 = 0$.

因为 $a_i < a_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, 2020)$，

所以 $a_{2021}+a_{2020} > a_{2021}+a_{2019} > \cdots > a_{2021}+a_2 > a_{2021}$.

所以 $a_{2021}+a_i\notin B(i = 2, 3, \cdots, 2020)$.

所以 $a_{2021}-a_i\in B(i = 2, 3, \cdots, 2020)$.

因为 $0 < a_{2021}-a_{2020} < a_{2021}-a_{2019} < \cdots < a_{2021}-a_2 < a_{2021}$，

所以 $a_{2021}-a_i = a_{2022-i}(i = 2, 3, \cdots, 2020)$. ①

所以 $a_{2021}=a_{2020}+a_2$， $a_{2021}=a_{2019}+a_3$.

因为 $a_{2020}+a_{2019}>a_{2020}+a_{2018}>\cdots>a_{2020}+a_3>a_{2020}+a_2=a_{2021}$，

所以 $a_{2020}+a_i\notin B(i=3，4，\cdots，2019)$.

所以 $a_{2020}-a_i\in B(i=3，4，\cdots，2019)$.

因为 $0<a_{2020}-a_{2019}<a_{2020}-a_{2018}<\cdots<a_{2020}-a_3<a_{2020}$，

所以 $a_{2020}-a_{2019}=a_2$， $a_{2020}-a_3=a_{2018}$.

否则 $a_{2020}-a_{2019}=a_k(k\geqslant 3)$，得 $a_{2020}\geqslant a_3+a_{2019}=a_{2021}$ 矛盾.

$a_{2020}-a_3=a_i(i\geqslant 2019)$，得 $a_{2020}\geqslant a_3+a_{2019}=a_{2021}$ 矛盾.

所以 $a_{2020}-a_i=a_{2021-i}(i=3，\cdots，2019)$. ②

①－②得 $a_{2022-i}-a_{2021-i}=a_{2021}-a_{2020}=a_2(i=3，\cdots，2019)$，

即 $a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_{2019}-a_{2018}=a_2$.

所以 $a_{i+1}-a_i=a_2(i=1，2，\cdots，n-1)$.

所以 a_1， a_2，…， a_n 是等差数列. ……（12 分）

(*ii*)n 的最大值是 4. ……（14 分）

【点评】本题考查集合是否具有性质 P 的判断与理由，考查等差数列的证明，考查实数的最大值的求法，考查运算求解能力等数学核心素养，是中档题。