2021 北京东城高三二模

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．（4 分）已知集合 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$，那么 $\complement_R A=$（　　）

A．$(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$　　B．$(-\infty,\ 1]\bigcup[2,\ +\infty)$

C．$(-\infty,1)\bigcup[2,\ +\infty)$　　D．$(-\infty,\ 1]\bigcup(2,+\infty)$

2．（4 分）已知 $(2x+a)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 -40，那么 $a=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．（4 分）已知 $a=\log_{0.3}3$，$b=\log_{0.3}4$，$c=3^{0.3}$，那么（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

4．（4 分）已知 $a^2+b^2=2$，那么 $a+b$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

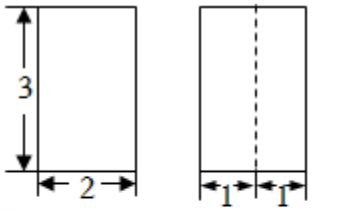
5．（4 分）在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=(2,2)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,5)$，$E$ 为 CD 的中点，那么 $\overrightarrow{BE}=$（　　）

A．$(-2,4)$　　B．$(-2,3)$　　C．$(-1,4)$　　D．$(-1,3)$

6．（4 分）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，当 $x\in[0,\ 2)$ 时，$f(x)=x$，那么 $f(21)=$（　　）

A．2^{10}　　B．2^{11}　　C．2^{20}　　D．2^{21}

7．（4 分）某三棱柱的三视图如图所示，该三棱柱的表面积为（　　）



正（主）视图　　侧（左）视图



俯视图

A．$8+3\sqrt{2}$　　B．$18+2\sqrt{3}$　　C．22　　D．$10+6\sqrt{5}$

8．（4 分）已知双曲线 $C:mx^2-ny^2=1(mn>0)$，那么“双曲线 C 的渐近线为 $y=\pm 2x$”是“$m=4n$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．（4 分）在 ΔABC 中，已知 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$2a-2c=b$，那么 $\dfrac{c}{a}=$（　　）

A．$\dfrac{3}{8}$　　B．$\dfrac{3}{7}$　　C．$\dfrac{7}{15}$　　D．$\dfrac{8}{15}$

10．（4 分）有三个因素会影响某种产品的产量，分别是温度（单位：$^{\circ}C$）、时间（单位：min）、催化剂用量（单位：

g)，三个因素对产量的影响彼此独立．其中温度有三个水平：80、85、90，时间有三个水平：90、120、150，催化剂用量有三个水平：5、6、7．按全面实验要求，需进行 27 种组合的实验，在数学上可以证明：通过特定的 9 次实验就能找到使产量达到最大的最优组合方案．如表给出了这 9 次实验的结果：

实验号	温度($^{\circ}$C)	时间(min)	催化剂用量(g)	产量(kg)
1	80	90	5	31
2	80	120	6	54
3	80	150	7	38
4	85	90	6	53
5	85	120	7	49
6	85	150	5	42
7	90	90	7	57
8	90	120	5	62
9	90	150	6	64

根据上表，三因素三水平的最优组合方案为(　　)

A．85°C$120min$ $7g$　　B．90°C$120min$ $6g$　　C．85°C$150min$ $6g$　　D．90°C$150min$ $7g$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．（5 分）复数$(2-i)^2$的实部为____．

12．（5 分）已知直线l不在平面α，β内，给出下列三个论断：

①$l\perp\alpha$；②$l//\beta$；③$\alpha\perp\beta$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：____．

13．（5 分）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$过点$M(4,4)$，那么抛物线C的准线方程为____，设N为平面直角坐标系xOy内一点，若线段MN的垂直平分线过抛物线C的焦点F，那么线段FN的长度为____．

14．（5 分）角α的终边与单位圆的交点A位于第一象限，其横坐标为$\frac{3}{5}$，那么$\sin\alpha=$____，点A沿单位圆逆时针运动到点B，所经过的弧长为$\frac{\pi}{4}$，则点B的横坐标为____．

15．（5 分）对于定义域为R的函数$y=g(x)$，设关于x的方程$g(x)=t$，对任意的实数t总有有限个根，记根的个数为$f_g(t)$，给出下列命题：

①存在函数$y=g(x)$满足：$f_g(t)>0$，且$y=g(x)$有最小值；

②设$h(x)=|g(x)|$，若$f_h(t)=f_g(t)$，则$g(x)\geqslant 0$；

③若$f_g(t)=1$，则$y=g(x)$为单调函数；

④设$h(x)=g(x+a)(a\in R)$，则$f_g(t)=f_h(t)$．

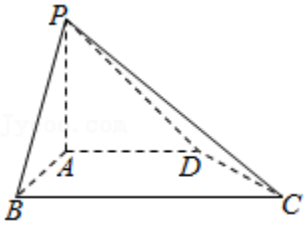
其中所有正确命题的序号为____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（13分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp BC$，$AD//BC$，$PA=AB=AD=1$，$BC=2$.

（Ⅰ）求证：$AD\perp$ 平面 PAB；

（Ⅱ）求二面角 $P-CD-A$ 的余弦值.



17.（13分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=3$，$a_4+a_5=24$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

条件①：设 $b_n=\log_2 a_{2n-1}$；

条件②：设 $b_n=a_n+2n$.

18.（14分）某市2019年一季度全市居民人均消费支出情况如表所示，全市居民分为城镇居民和农村居民，人均消费支出分为食品烟酒、衣着、居住、生活用品及服务、交通和通信、教育文化和娱乐、医疗保健、其他用品及服务共8类.

2019年一季度 单位：元

指标名称	全市居民		城镇居民	
	2019年一季度	增速(%)	2019年一季度	增速(%)
人均消费支出	10637	7.4	11440	7.4
食品烟酒	2292	8.2	2401	8.2
衣着	628	0.0	670	–1.0
居住	3846	5.7	4200	5.6
生活用品及服务	546	6.8	588	8.3
交通和通信	1219	11.0	1303	10.5
教育文化和娱乐	927	10.5	1020	11.0
医疗保健	874	14.2	920	13.6
其他用品及服务	305	1.0	338	2.7

（Ⅰ）从全市居民的8类人均消费支出中随机选取1类，求这类人均消费支出超过1000元概率；

（Ⅱ）从城镇居民的8类人均消费支出中随机选取3类，记 X 表示其中不超过2000元的数，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）请直接写出这8类人均消费支出中，农村居民人均消费支出增速大于城镇居民人均费支出增速的类别.

19.（15分）已知函数 $f(x)=\sin x-(x-a)\cos x$，其中 $a\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线过点 $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)>a^3-1$ 对 $x\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$ 恒成立，求 a 的取值范围．

20．（15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，左、右顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$|AF|=3|FB|$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过 $P(2,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N，过点 N 作 x 轴的垂线，与直线 BM 交于点 D，E 为线段 DN 的中点．证明：直线 BE 的斜率为定值．

21．（15 分）设数列 $A:x_1$，x_2，…，$x_n(n\geqslant 3)$．

定义集合 $S(A,k)=\{s\mid s=\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+....+x_{i_k}}{k}$，$1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n\}$，其中 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 为给定的正整数．

（Ⅰ）若 $A:0$，2，4，求 $S(A,2)$；

（Ⅱ）若 A 中的项 $x_i\in S(A，n-1)(i=1，2，\ldots，n)$，求证：$A$ 为常数列；

（Ⅲ）记集合 $S(A,k)$ 的最大元素为 s_k，求证：$s_{k+1}\leqslant s_k(2\leqslant k\leqslant n-1)$．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】利用补集的定义，求解即可.

【解答】解：∵集合 $A=\{x|1<x\leqslant 2\}$，

$\therefore \complement_R A=(-\infty,\ 1]\bigcup(2,+\infty)$.

故选：D.

【点评】本题考查集合补集的计算，注意集合补集的定义，属于基础题.

2.【分析】根据 x^2 系数为 $C_5^2\cdot 2^2\cdot a^3=-40$，解得 a 的值.

【解答】解：$(2x+a)^5$ 的展开式中的 x^2 系数为 $C_5^2\cdot 2^2\cdot a^3=-40$，$a^3=-1$，解得 $a=-1$，

故选：B.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，属于基础题.

3.【分析】可得出 $log_{0.3}4<log_{0.3}3<0,3^{0.3}>0$，然后即可得出 a，b，c 的大小关系.

【解答】解：∵$\log_{0.3}4<\log_{0.3}3<\log_{0.3}1=0$，$3^{0.3}>0$，

$\therefore b<a<c$.

故选：C.

【点评】本题考查了对数函数的单调性，指数函数的值域，对数的运算性质，考查了计算能力，属于基础题.

4.【分析】根据条件可得出 $(a+b)^2=2+2ab\leqslant 4$，这样即可得出 $a+b$ 的最大值.

【解答】解：∵$a^2+b^2=2$，

$\therefore (a+b)^2=2+2ab$，$2ab\leqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，

$\therefore (a+b)^2\leqslant 4$，

$\therefore -2\leqslant a+b\leqslant 2$，

$\therefore a+b$ 的最大值为 2.

故选：C.

【点评】本题考查了不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的应用，考查了计算能力，属于中档题.

5.【分析】$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，代入坐标即可求解.

【解答】解：$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-1,\ 5)-(1,\ 1)=(-2,\ 4)$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了向量加减的坐标表示，属于基础题.

6.【分析】利用函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，推导出 $f(21)=2^{10}f$（1），再由当 $x\in[0,\ 2)$ 时，$f(x)=x$，能求出 $f(21)$.

【解答】解：∵函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，当 $x\in[0,\ 2)$ 时，$f(x)=x$，

$\therefore f(21)=2f(19)=2^2f(17)=2^3f(15)=2^4f(13)$

$=2^5 f(11)=2^6 f$（9）$=2^7 f$（7）$=2^8 f$（5）

$=2^9 f$（3）$=2^{10} f$（1）$=2^{10}$.

故选：A.

【点评】本题考查函数值的求法，考查函数的性质等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是基础题.

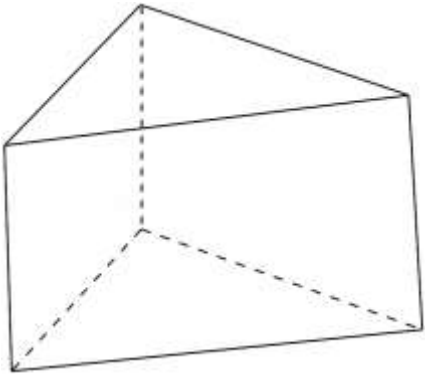
7.【分析】首先把三视图转换为几何体的直观图，进一步求出几何体的表面积.

【解答】解：根据几何体的三视图转换为直观图为：该几何体为底面为等腰三角形，高为 3 的三棱柱；

如图所示：

所以：$S_{表}=2\times\sqrt{1^2+2^2}\times3+2\times3+2\times\frac{1}{2}\times2\times2=10+6\sqrt{5}$.

故选：D.



【点评】本题考查的知识要点：三视图和几何体的直观图之间的转换，几何体的表面积公式，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

8.【分析】根据双曲线的方程和渐近线方程，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】解：①当$m>0$，$n>0$时，则双曲线焦点在x轴上，双曲线可化为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，

$\therefore a=\sqrt{\frac{1}{m}}$，$b=\sqrt{\frac{1}{n}}$，

$\because$双曲线的渐近线为$y=\pm2x$，则$\frac{b}{a}=2$，$\therefore\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=2$，$\therefore m=4n$，

②当$m<0$，$n<0$时，则双曲线焦点在y轴上，双曲线可化为$\frac{y^2}{-\frac{1}{n}}-\frac{x^2}{-\frac{1}{m}}=1$，

$\therefore a=\sqrt{-\frac{1}{n}}$，$b=\sqrt{-\frac{1}{m}}$，

$\because$双曲线的渐近线为$y=\pm2x$，则$\frac{a}{b}=2$，$\therefore\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-n}}=2$，$\therefore m=4n$，

综上，双曲线的渐近线为$y=\pm2x$是$m=4n$的充要条件.

故选：C.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合双曲线方程是解决本题的关键.

9.【分析】由已知结合余弦定理即可直接求解.

【解答】解：ΔABC 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$2a-2c=b$，

由余弦定理得 $\cos\angle A=\frac{1}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2a-2c)^2+c^2-a^2}{2(2a-2c)c}$，

整理得，$(3a-7c)(a-c)=0$，

因为 $a\neq c$，否则 $b=0$，

故 $3a=7c$，$\frac{c}{a}=\frac{3}{7}$.

故选：B.

【点评】本题主要考查了余弦定理在求解三角形中的应用，属于基础题.

10.【分析】利用题中的数据信息，分别对温度，时间，催化剂的量进行分析，即可得出.

【解答】解：利用数表分析可知，从不同的温度来看，温度对其影响比较大，几乎成正比关系；

其次催化剂的量对其影响比较大，从 9 组数据分析可知当催化剂为 6 克时，在组内产量都比较大；

再次，从时间上看，9 组数据显示，当时间为 120 分钟时，相对产量较高，

故选：B.

【点评】本题考查了函数模型的实际应用，学生数据处理能力，逻辑推理能力，属于基础题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.【分析】求出复数 $(2-i)^2=3-4i$. 由此能求出复数 $(2-i)^2$ 的实部.

【解答】解：复数 $(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$.

$\therefore$ 复数 $(2-i)^2$ 的实部为 3.

故答案为：3.

【点评】本题考查复数的实部的求法，考查复数的运算法则等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是基础题.

12.【分析】由空间中直线与直线、直线与平面的位置关系可知，在直线 l 不在平面 α，β 内的前提下，由①②可得③；由①③可得②.

【解答】解：若 $l\perp\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；

或若 $l\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $l//\beta$.

故答案为：若 $l\perp\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$（或若 $l\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $l//\beta$）.

【点评】本题考查空间中直线与直线、直线与平面位置关系的判定，考查空间想象能力与思维能力，是基础题.

13.【分析】将 M 的坐标代入抛物线的方程，求得 p，可得抛物线的方程和准线方程；再由线段的垂直平分线的性质和两点的距离公式，可得所求长度.

【解答】解：由抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 过点 $M(4,4)$，

可得 $4^2=8p$，解得 $p=2$，

则抛物线的方程为 $y^2=4x$，准线方程为 $x=-1$，

由线段 MN 的垂直平分线过抛物线 C 的焦点 $F(1,0)$，

可得$|FN|=|FM|=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}=5$.

故答案为：$x=-1$，5.

【点评】本题考查抛物线的方程和性质，以及线段的垂直平分线的性质，考查方程思想和运算能力，属于基础题.

14.【分析】先利用任意角的三角函数的定义求出$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，设点A沿单位圆逆时针运动到点B，所经过的圆心角为θ，利用弧长公式可求θ，进而利用两角和的余弦公式即可求解.

【解答】解：$\because$角α的终边与单位圆的交点A位于第一象限，其横坐标为$\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}}{1}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

设点A沿单位圆逆时针运动到点B，所经过的圆心角为θ，则$\theta=\frac{\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore$点B的横坐标$x=\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

故选：$\frac{4}{5}$，$-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【点评】本题主要考查了任意角的三角函数的定义，以及两角和的三角函数公式在三角函数求值中的应用，是基础题.

15.【分析】由于$t\in R$，即$g(x)\in R$，即$g(x)$不存在最小值，故①错误，假设$\exists x_1$使得$g(x_1)<0$，推出根的个数不同，故假设不成立，故②正确，说明$g(x)=t$只有一个根，不能推出函数单调，可假设反例，$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},x\neq0\\0,x=0\end{cases}$，即结论不成立，故③错误，结合图像平移后的图像形状相同，即可求解，故④正确.

【解答】①由题意可得，$g(x)=t$，对任意的实数t总有有限个根，

$\because t\in R$，

$\therefore g(x)\in R$，即$g(x)$不存在最小值，故①错误，

②$h(x)=|g(x)|$，可得$h(x)\geqslant0$，

设$\exists x_1$使得$g(x_1)<0$，

则$t=f(x_1)$，$f_h(t)=0$，$f_g(t)>0$，

$\because f_h(t)\neq f_g(t)$，

$\therefore g(x)\geqslant0$，故②正确，

③$f_g(t)=1$，说明$g(x)=t$只有一个根，不能推出函数单调，

例$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},x\neq0\\0,x=0\end{cases}$，该函数在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$上分别单调，

但是在整个区间R上不单调，故③错误，

④$h(x)=g(x+a)=t(a\in R)$，由函数的左加右减原则，

$h(x)$ 由 $g(x)$ 向左平移 a 个单位得到，平移过程中形状相同，

将 t 看成于平行于 x 轴的一条横线，与函数的交点横坐标即为根，

$\therefore h(x)=g(x+a)=t$，交点的横坐标值不相同，但交点的个数相同，即 $f_g(t)=f_h(t)$，

故④正确，

故答案为：②④.

【点评】本题考查了抽象函数，需要学生理解该函数的意义，对综合思维要求较高，难度系数高，属于难题.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】（Ⅰ）求出线线垂直，再根据线面垂直的判断定理证明即可；

（Ⅱ）建立空间直角坐标系 $A-xyz$，求出 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$ 的坐标，设平面 PCD 的法向量 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，求出 $\vec{m}$，求出二面角 $P-CD-A$ 的余弦值即可.

【解答】解：（Ⅰ）证明：$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AD$，

$\because AB\perp BC$，$AD//BC$，$\therefore AB\perp AD$，

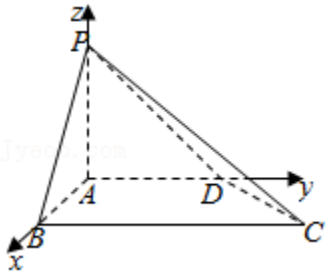
又 $\because PA$，$AB\subset$ 平面 PAB，$PA\bigcap AB=A$，

$\therefore AD\perp$ 平面 PAB；

（Ⅱ）$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AB$，

由（Ⅰ）知，$PA\perp AD$，$AB\perp AD$，

如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



$\because PA=AB=AD=1$，$BC=2$，

$\therefore A(0,\ 0,\ 0)$，$C(1,\ 2,\ 0)$，$D(0,\ 1,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 1)$，

$\overrightarrow{DC}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,\ -1,\ 1)$，

设平面 PCD 的法向量 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x+y=0\\ -y+z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则 $x=-1$，$z=1$，$\vec{m}=(-1,\ 1,\ 1)$，

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$，

设二面角 $P-CD-A$ 的大小为 θ，θ 为锐角，

$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\ \vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故二面角 $P-CD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【点评】本题考查了线面垂直的判定定理，考查求二面角的平面角，是中档题.

17.【分析】（Ⅰ）根据题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由等比数列的性质可得$q^3=\frac{a_4+a_5}{a_1+a_2}=8$，变形可得$q$的值，又由$a_1+a_2=a_1+a_1q=3$，则有$a_1$的值，由等比数列的通项公式计算可得答案；

（Ⅱ）若选择条件①：求出数列$\{b_n\}$的通项公式，由等差数列的前n项和公式计算可得答案；

若选择条件②：则$b_n=a_n+2n=2^{n-1}+2n$，由分组求和法分析可得答案.

【解答】解：（Ⅰ）根据题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

若$a_1+a_2=3$，$a_4+a_5=24$，则$q^3=\frac{a_4+a_5}{a_1+a_2}=8$，解可得$q=2$，

又由$a_1+a_2=a_1+a_1q=3$，则有$a_1=1$，

故$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，

（Ⅱ）根据题意，

若选择条件①：则$b_n=\log_2 a_{2n-1}=2n-2$，此时$S_n=0+2+4+6+\ldots\ldots+2n-2=\frac{(0+2n-2)\times n}{2}=n^2-n$；

若选择条件②：则$b_n=a_n+2n=2^{n-1}+2n$，

此时$S_n=(1+2)+(2+4)+(4+6)+\ldots\ldots+(2^{n-1}+2n)=(1+2+4+\ldots\ldots+2^{n-1})+(2+4+6+\ldots\ldots+2n)$

$=2^n-1+n^2+n$.

【点评】本题考查数列的求和，涉及等比数列的通项公式，属于中档题.

18.【分析】（Ⅰ）利用古典概型的概率公式求解即可；

（Ⅱ）先确定X的可能取值，再分别求出其对应的概率，列出分布表，由数学期望的求解公式计算即可；

（Ⅲ）直接根据题中表格中的数据进行分析，即可得到答案.

【解答】解：（Ⅰ）记事件A为“从全市居民的 8 类人均消费支出中随机选取 1 类，求这类人均消费支出超过 1000 元”，

从全市居民的 8 类人均消费支出中随机选取 1 类，共有 8 种等可能的取法，其中有 3 类人均消费支出超过 1000 元，

所以P（A）$=\frac{3}{8}$；

（Ⅱ）X的可能取值为 1，2，3，

则$P(X=1)=\frac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^1C_6^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，

$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$，

则X的分布列为：

X	1	2	3

P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

所以 $E(X)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$；

（Ⅲ）这 8 类人均消费支出中，农村居民人均消费支出增速大于城镇居民人均费支出增速的类别为：衣着，居住，交通和通信，医疗保健.

【点评】本题考查了古典概型概率公式的应用，离散型随机变量及其分布列和离散型随机变量期望的求解，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于中档题.

19.【分析】（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导，进而求得在 $x=a$ 处的切线方程，结合题意即可求得实数 a 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=\sin x-(x-a)\cos x-a^3+1, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，对 $g(x)$ 求导，然后分 $-\frac{\pi}{2}<a<0$ 及 $0\leqslant a<\frac{\pi}{2}$ 讨论即可得出结果.

【解答】解：（Ⅰ） $f'(x)=\cos x-\cos x+(x-a)\sin x=(x-a)\sin x$，

$\therefore$ 切线的斜率 $k=f'$（a）$=0$，又切点为 $(a,\sin a)$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线方程为 $y=\sin a$，

$\because$ 切线过 $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\therefore y=f(a)=\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $a\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$，$\therefore a=\frac{\pi}{3}$；

（Ⅱ）设 $g(x)=\sin x-(x-a)\cos x-a^3+1, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，则 $g'(x)=(x-a)\sin x$，

令 $g'(x)=0$，解得 $x_1=a$ 或 $x_2=0$，

①当 $-\frac{\pi}{2}<a<0$ 时，令 $g'(x)>0$ 解得 $x\in(-\frac{\pi}{2},a)\bigcup(0,\frac{\pi}{2})$，令 $g'(x)<0$ 解得 $x\in(a,0)$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},a),(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，在 $(a,0)$ 单调递减，

$\therefore g(x)_{min}=g(0)=-a^3+a+1$，

设 h（a）$=-a^3+a+1$，令 h'（a）$=-3a^2+1=0$，解得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore h$（a）在 $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单减，在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$ 上递增，

$\therefore h(a)_{min}=h(-\frac{\sqrt{3}}{3})=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，

$\therefore g(0)>0$，

$\therefore$ 当 $-\frac{\pi}{2}<a<0$ 时，$f(x)>a^3-1$ 恒成立；

②当 $0\leqslant a<\frac{\pi}{2}$ 时，$\because g(-\frac{\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})-(-\frac{\pi}{2}-a)\cos(-\frac{\pi}{2})-a^3+1=-a^3\leqslant 0$，

$\therefore$ 当 $0\leqslant a<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>a^3-1$ 并非恒成立.

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\frac{\pi}{2},0)$.

【点评】本题考查导数的几何意义，考查利用导数研究函数的单调性，极值及最值，考查不等式的恒成立问题，考查运算求解能力，属于中档题.

20.【分析】（Ⅰ）根据题意求得 c ， a ，进而求得 b ，由此可得椭圆方程；

（Ⅱ）先表示出点 E 的坐标，再计算直线的斜率，化简后为定值即得证.

【解答】解：（Ⅰ）$\because A(-2,0)$ ， $B(2,0)$ ，

$\therefore |AB|=4$ ，

又 $|AF|=3|FB|$ ，且 $a>b>0$ ， F 在线段 AB 上，

$\therefore |AF|=3|FB|=3$ ， $F(1,0)$ ，

$\therefore c=1$ ，

又 $a=|OA|=2$ ，

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ；

（Ⅱ）证明：显然直线 l 的斜率存在，设直线 l 方程为 $y=k(x-2)+1$ ， $M(x_1,\ y_1)$ ， $N(x_2,\ y_2)$ ，

联立直线 l 与椭圆方程有 $\begin{cases} y=k(x-2)+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ ，消 y 并整理可得 $(4k^2+3)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k-8=0$ ，

则 $x_1+x_2=\frac{8k(2k-1)}{4k^2+3}, x_1x_2=\frac{8(2k^2-2k-1)}{4k^2+3}$ ，

且由于 k 存在，则 $x_1x_2\neq 2$ ，

$\because B(2,0)$ ， $M(x_1,\ y_1)$ ，

$\therefore$ 直线 $BM: y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$ ，

又直线 $DN: x=x_2$ ，

$\therefore D(x_2,\frac{y_1}{x_1-2}(x_2-2))$ ，

又 $N(x_2,\ y_2)$ ，

$\therefore E(x_2,\frac{1}{2}[\frac{y_1}{x_1-2}(x_2-2)+y_2])$ ，

又 $B(2,0)$ ，

$\therefore k_{BE}=\frac{y_E-0}{x_2-2}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2kx_1x_2+(1-4k)(x_1+x_2)+4(2k-1)}{2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]}$ ，

代入 $x_1+x_2=\frac{8k(2k-1)}{4k^2+3}, x_1x_2=\frac{8(2k^2-2k-1)}{4k^2+3}$ ，

得 $k_{BE}=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$ 为定值.

【点评】本题考查椭圆方程的求法，考查直线与椭圆的位置关系，考查圆锥曲线中的证明问题，考查推理能力及运算能力，属于中档题.

21.【分析】（Ⅰ）可直接利用元素与集合的关系求解；

（Ⅱ）可根据常数列的性质直接推导；

（Ⅲ）直接构建出S_{k+1}的表达式，通过放缩法即可证出.

【解答】解：（Ⅰ）由题意，

$S(A,K)=\{s\mid s=\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k}}{k}$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\}$，

其中$k(2\leqslant k\leqslant n)$为给定的正整数.

若若$A:0$，2，4，则$S(A,2)=\{1$，2，$3\}$.

（Ⅱ）由$A:x_1$，x_2，…，$x_n(n\geqslant 3)$.

不妨设$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，$(n\geqslant 3)$，

令$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，

则$S(A,n-1)$中的元素为：$\frac{S_n-x_1}{n-1},\frac{S_n-x_2}{n-1},\cdots,\frac{S_n-x_n}{n-1}$，

$\because x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，$(n\geqslant 3)$，

$\therefore\frac{S_n-x_n}{n-1}\leqslant\frac{S_n-x_{n-1}}{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\frac{S_n-x_1}{n-1}$，

$\because x_i\in S(A$，$n-1)(i=1$，2，…，$n)$，

$\therefore\frac{S_n-x_n}{n-1}\leqslant x_1\leqslant x_n\leqslant\frac{S_n-x_1}{n-1}$.

化简可得：$(n-2)x_n\leqslant(n-2)x_1$，

从而可得$x_1=x_n$，

$\therefore$数列A为常数列.

（Ⅲ）对任意的i_1，i_2，…，i_k，i_{k+1}，有：

$$\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_l}+x_i+\ldots}{k+1}$$

$$=\frac{(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k})+(x_{i_1}+\ldots+x_{i_{k-1}}+x_{i_{k+1}})+\ldots+(x_{i_2}+\ldots+x_{i_{k+1}})}{k(k+1)}$$

$$=(\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k}}{k}+\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_{k-1}}+x_{i_{k+1}}}{k}+\frac{x_{i_2}+\ldots+x_{i_{k+1}}}{k})\cdot\frac{1}{k+1}$$

$$\leqslant\frac{(k+1)S_k}{k+1}=S_k$$，

$\therefore S_{k+1}\leqslant S_k(2\leqslant k\leqslant n-1)$

【点评】本题考查了元素与集合的关系，常数列的求法，以及在数列中不等式的证明。