2020 北京海淀高三二模

数　　学

2020.6

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,x<1\}$，$B=\{x\,|\,x>-1\}$，则

（A）$A\subseteq B$　　（B）$B\subseteq A$

（C）$B\subseteq \complement_U A$　　（D）$\complement_U A\subseteq B$

（2）下列函数中，值域为 $[0,+\infty)$ 且为偶函数的是

（A）$y=x^2$　　（B）$y=|x-1|$

（C）$y=\cos x$　　（D）$y=\ln x$

（3）若抛物线 $y^2=12x$ 的焦点为 F，点 P 在此抛物线上且横坐标为 3，则 $|PF|$ 等于

（A）4　　（B）6　　（C）8　　（D）10

（4）已知三条不同的直线 l,m,n 和两个不同的平面 α，β，下列四个命题中正确的为

（A）若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　　（B）若 $l//m$，$m\subset\alpha$，则 $l//\alpha$

（C）若 $l//\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　（D）若 $l//\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

（5）在△ABC 中，若 $a=7$，$b=8$，$\cos B=-\frac{1}{7}$，则 $\angle A$ 的大小为

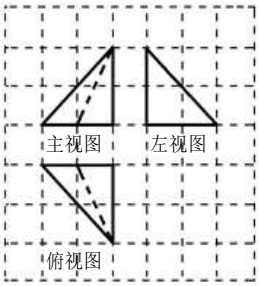
（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

（6）将函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

（A）$\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　（B）$\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$

（C）$\cos 2x$　　（D）$-\cos 2x$

（7）某三棱锥的三视图如图所示，如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该三棱锥的体积为



（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{4}{3}$

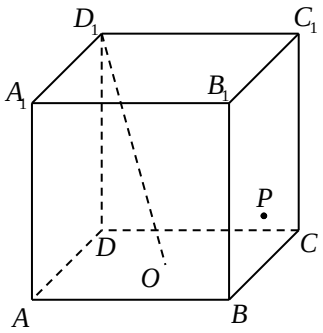
（C）2　　（D）4

（8）对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，“ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2$ ”是“ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

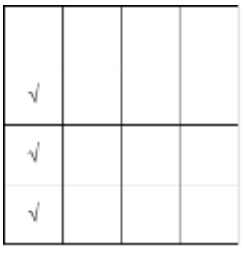
（9）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面 BB_1C_1C 的边界及其内部运动．若 $D_1O\perp OP$，则△ D_1C_1P 面积的最大值为



（A）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

（C）$\sqrt{5}$　　（D）$2\sqrt{5}$

（10）为了预防新型冠状病毒的传染，人员之间需要保持一米以上的安全距离．某公司会议室共有四行四列座椅，并且相邻两个座椅之间的距离超过一米，为了保证更加安全，公司规定在此会议室开会时，每一行、每一列均不能有连续三人就座．例如下图中第一列所示情况不满足条件（其中“ √ ”表示就座人员）．根据该公司要求，该会议室最多可容纳的就座人数为



（A）9　　（B）10　　（C）11　　（D）12

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若复数 $(2-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 为纯虚数，则实数 $a=$_____.

（12）已知双曲线 E 的一条渐近线方程为 $y=x$，且焦距大于 4，则双曲线 E 的标准方程可以为_____.（写出一个即可）

（13）数列 a_n 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$. 若其前 k 项和为 126，则 $k=$_____.

（14）已知点 $A(2,0)$，$B(1,2)$，$C(2,2)$，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，$O$ 为坐标原点，则 $|\overrightarrow{AP}|=$_____，$\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 夹角的取值范围是_____.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\le 0,\\ |\ln x|, & x>0.\end{cases}$ 给出下列三个结论：

① 当 $a=-2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$；

② 若函数 $f(x)$ 无最小值，则 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$；

③ 若 $a<1$ 且 $a\neq 0$，则 $\exists b\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f(x)-b$ 恰有 3 个零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1x_2x_3=-1$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题共 14 分）

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列，其前 n 项和为 S_n. 又_____，且 $S_5=40$，是否存在大于 1 的正整数 k，使得 $S_k=S_1$？若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

从① $a_1=4$，② $d=-2$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

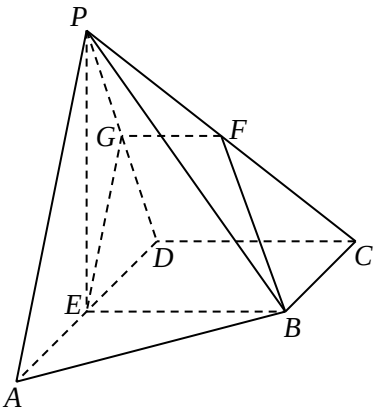
注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分。

（17）（本小题共 14 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC//AD$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，E 为线段 AD 的中点．$PE\perp$ 底面 $ABCD$，点 F 是棱 PC 的中点，平面 BEF 与棱 PD 相交于点 G．

（Ⅰ）求证：$BE//FG$；

（Ⅱ）若 PC 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，求直线 PB 与平面 BEF 所成角的正弦值．



（18）（本小题共 14 分）

为了推进分级诊疗，实现“基层首诊、双向转诊、急慢分治、上下联动”的诊疗模式，某地区自 2016 年起全面推行家庭医生签约服务. 已知该地区居民约为 2000 万，从 1 岁到 101 岁的居民年龄结构的频率分布直方图如图 1 所示. 为了解各年龄段居民签约家庭医生的情况，现调查了 1000 名年满 18 周岁的居民，各年龄段被访者签约率如图 2 所示.

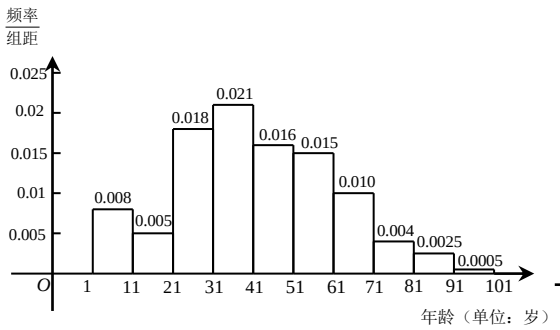


图 1

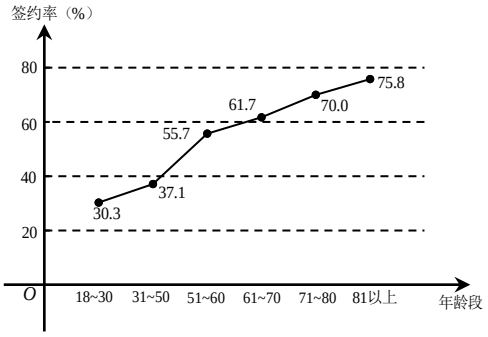


图 2

（Ⅰ）估计该地区年龄在 71~80 岁且已签约家庭医生的居民人数；

（Ⅱ）若以图 2 中年龄在 71~80 岁居民签约率作为此地区该年龄段每个居民签约家庭医生的概率，则从该地区年龄在 71~80 岁居民中随机抽取两人，求这两人中恰有 1 人已签约家庭医生的概率；

（Ⅲ）据统计，该地区被访者的签约率约为 44%. 为把该地区年满 18 周岁居民的签约率提高到 55%以上，应着重提高图 2 中哪个年龄段的签约率？并结合数据对你的结论作出解释.

（19）（本小题共 15 分）

已知椭圆 $W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过 $A(0,1)$, $B(0,-1)$ 两点，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 W 的方程；

（Ⅱ）过点 A 的直线 l 与椭圆 W 的另一个交点为 C，直线 l 交直线 $y=2$ 于点 M，记直线 BC，BM 的斜率分别为 k_1，k_2，求 k_1k_2 的值.

（20）（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(\sin x+\cos x)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）求证：曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有且只有一条斜率为 2 的切线.

（21）（本小题共 14 分）

在平面直角坐标系中，O 为坐标原点. 对任意的点 $P(x,y)$，定义 $\|OP\|=|x|+|y|$. 任取点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，记 $A'(x_1,y_2),B'(x_2,y_1)$，若此时 $\|OA\|^2+\|OB\|^2\geq\|OA'\|^2+\|OB'\|^2$ 成立，则称点 A,B 相关.

（Ⅰ）分别判断下面各组中两点是否相关，并说明理由；

① $A(-2,1),B(3,2)$；　② $C(4,-3),\ D(2,4)$.

（Ⅱ）给定 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 3$，点集 $\Omega_n=\{(x,y)\,|\,-n\leq x\leq n,-n\leq y\leq n,x,y\in\mathbf{Z}\}$.

（ⅰ）求集合 Ω_n 中与点 $A(1,1)$ 相关的点的个数；

（ⅱ）若 $S\subseteq\Omega_n$，且对于任意的 $A,B\in S$，点 A,B 相关，求 S 中元素个数的最大值.

2020 北京海淀高三二模数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	D	C	C	A	B	C	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	11	12	13	14	15
答案	$-\frac{1}{2}$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$	6	1，$[0,\frac{\pi}{6}]$	②③

注：第 12 题答案不唯一，写出一个形如$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$（$a^2>2$）的方程即可；第 14 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题共 14 分）

解：选择条件①，不存在正整数$k(k>1)$, 使得$S_k=S_1$.

解法 1

理由如下：

在等差数列$\{a_n\}$中，$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=5a_1+10d$

又$a_1=4$，$S_5=40$.

所以由$\begin{cases}a_1=4,\\5a_1+10d=40\end{cases}$得 $d=2.$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4+2(n-1)=2n+2$.

又因为$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}>0$，

所以数列$\{S_n\}$为递增数列. 即$\forall k>1$，都有$S_k>S_1$.

所以不存在正整数 $k(k>1)$，使得 $S_k=S_1$.

解法 2

理由如下：

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_5=5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=5a_1+10d$

又 $a_1=4$，$S_5=40$.

所以由 $\begin{cases}a_1=4,\\5a_1+10d=40\end{cases}$ 得 $d=2.$

所以 $S_k=ka_1+\dfrac{k(k-1)}{2}d=4k+\dfrac{k(k-1)}{2}\times2=k^2+3k$.

令 $S_k=S_1=4$，即 $k^2+3k-4=0$.

解得 $k=1$ 或 $k=-4$.

因为 $k>1$，所以 $k=1$ 与 $k=-4$ 均不符合要求.

所以不存在正整数 $k(k>1)$，使得 $S_k=S_1$.

选择条件②，存在正整数 $k=12$，使得 $S_k=S_1$.

理由如下：

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_5=5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=5a_1+10d$

又 $d=-2$，$S_5=40$.

所以由 $\begin{cases}d=-2,\\5a_1+10d=40\end{cases}$ 得 $a_1=12.$

所以 $S_k=ka_1+\dfrac{k(k-1)}{2}d=12k+\dfrac{k(k-1)}{2}\times(-2)=-k^2+13k$.

令 $S_k=S_1=12$，即 $-k^2+13k=12$.

整理得 $k^2-13k+12=0$. 解得 $k=1$ 或 $k=12$.

因为 $k>1$，所以 $k=12$.

所以当 $k=12$ 时，$S_k=S_1$.

（17）（本小题共 14 分）

（Ⅰ）证明：因为 E 为 AD 中点，所以 $DE=\frac{1}{2}AD=1$.

又因为 $BC=1$，所以 $DE=BC$.

在梯形 $ABCD$ 中，$DE\ //\ BC$，

所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形.

所以 $BE\ //\ CD$.

又因为 $BE\not\subset$ 平面 PCD，且 $CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $BE\ //$ 平面 PCD.

因为 $BE\subset$ 平面 BEF，平面 $BEF\cap$ 平面 $PCD=FG$，

所以 $BE\ //\ FG$.

（Ⅱ）解：（解法 1）因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AE,BE\subset$ 平面 $ABCD$，

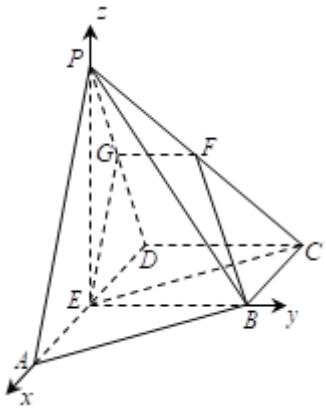
所以 $PE\perp AE$，且 $PE\perp BE$.

因为四边形 $BCDE$ 为平行四边形，$\angle ADC=90°$，

所以 $AE\perp BE$.

以 E 为坐标原点，如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$.

则 $E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,1,0)$，$D(-1,0,0)$.



设 $P(0,0,m)$（$m>0$），

所以 $\overrightarrow{CP}=(1,-1,m)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$.

因为 PC 与 AB 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{CP},\overrightarrow{AB}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{2}}\right|$

$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $m=\sqrt{2}$.

则 $P(0,0,\sqrt{2})$， $F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 $\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$， $\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{2})$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}y=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$，则 $z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$.

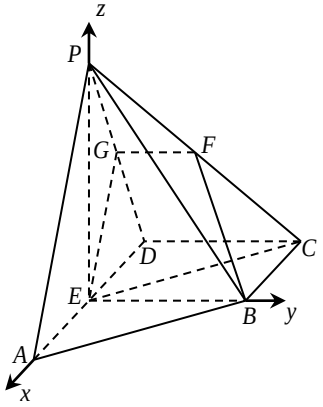
所以 $\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线 PB 与平面 BEF 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

（Ⅱ）（解法 2）

连结 EC，

因为 $AE//BC$ 且 $AE=BC$，所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形.



所以 $AB//CE$.

因为 PC 与 AB 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，所以 PC 与 CE 所成角为 $\frac{\pi}{4}$.

即 $\angle PCE=\frac{\pi}{4}$.

因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $CE\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp CE$.

又因为 $\angle EDC=\frac{\pi}{2}$，所以平行四边形 $BCDE$ 是矩形.

所以在等腰直角三角形 PEC 中， $PE=CE=\sqrt{2}$.

因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AE,BE\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE \perp AE$，且 $PE \perp BE$.

又因为 $AE \perp BE$，

以 E 为坐标原点，如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$

则 $E(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$C(-1,1,0)$，$F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 $\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{2})$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}y=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$，则 $z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$.

所以 $\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线 PB 与平面 BEF 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

（18）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由图 1 可知，该地区居民中年龄在 71~80 岁的频率为 $0.004\times10=4\%$.

由图 2 可知，样本中年龄在 71~80 岁居民家庭医生的签约率为 70.0%，

因为该地区居民人数约为 2000 万，

所以该地区年龄在 71~80 岁，且已签约家庭医生的居民人数约为 $2000\times4\%\times70.0\%=56$（万人）.

（Ⅱ）由题意，从该地区年龄在 71~80 岁居民中随机抽取一人，其签约家庭医生的概率为 $\frac{7}{10}$.

设 A_i 表示事件“从该地区年龄在 71~80 岁居民中随机抽取两人，其中第 i 个人已签约家庭医生”（$i=1,2$），

则 $P(A_i)=\frac{7}{10}$，$P(\overline{A_i})=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$（$i=1,2$）.

设事件 C 为“从该地区年龄在 71~80 岁居民中随机抽取两人，这两人中恰有 1 人已签约家庭医生”，

则 $C=A_1\overline{A_2}\cup A_2\overline{A_1}$.

所以 $P(C)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{50}$.

所以这两人中恰有 1 人已签约家庭医生的概率为 $\frac{21}{50}$.

（Ⅲ）应着重提高年龄在 31~50 岁居民的签约率.

理由如下：

①依题意，该地区年满 18 周岁居民签约率从 44% 提高到 55% 以上，需至少提升 11%；

②年龄在 31~50 岁居民人数在该地区的占比约为： 21%+16%=37%，占比大；

③年龄在 31~50 岁居民的医生签约率较低，约为 37.1%；

④该地区年满 18 周岁居民的人数在该地区的占比约为：

$1-(0.008+0.005\times0.7)\times10=0.885$；

所以，综合以上因素，若该年龄段签约率从 37.1% 提升至 55%，可将该地区年满 18 周岁居民签约率提升 $37\%\times(1-37.1\%)\div0.885>37\%\times62.9\%\approx23\%$，大于 11%.

（19）（本小题共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意，$\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆 W 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）由题意，直线 l 不与坐标轴垂直.

设直线 l 的方程为： $y=kx+1$（$k\neq0$）.

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2+4y^2=4.\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$.

设 $C(x_1,y_1)$ ，因为 $x_1\neq 0$，所以 $x_1=\dfrac{-8k}{4k^2+1}$.

得 $y_1=kx_1+1=k\cdot\dfrac{-8k}{4k^2+1}+1=\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1}$.

即 $C(\dfrac{-8k}{4k^2+1},\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1})$.

又因为 $B(0,-1)$，所以 $k_1=\dfrac{\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1}+1}{\dfrac{-8k}{4k^2+1}}=-\dfrac{1}{4k}$.

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ y=2.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{k},\\ y=2.\end{cases}$

所以点 M 的坐标为 $(\dfrac{1}{k},2)$.

所以 $k_2=\dfrac{2+1}{\dfrac{1}{k}}=3k$.

所以 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{4k}\cdot 3k=-\dfrac{3}{4}$.

（20）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$

$=2\mathrm{e}^x\cos x$.

令 $f'(x)>0$, 得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ $(k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）证明： 要证曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上有且只有一条斜率为 2 的切线，

即证方程 $f'(x)=2$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上有且只有一个解.

令 $f'(x)=2\mathrm{e}^x\cos x=2$，得 $\mathrm{e}^x\cos x=1$.

设 $g(x)=\mathrm{e}^x\cos x-1$,

则 $g'(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x=-\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x-\frac{\pi}{4})$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{\pi}{4}$.

当 x 变化时，$g'(x),g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调增，在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上单调减.

因为 $g(0)=0$, 所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$g(x)>0$；

又 $g(\frac{\pi}{2})=-1<0$，所以当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)$ 有且只有一个零点.

所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)=\mathrm{e}^x\cos x-1$ 有且只有一个零点.

即方程 $f'(x)=2$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 有且只有一个解.

所以曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有且只有一条斜率为 2 的切线.

（21）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）①由题知 $A'(-2,2),B'(3,1)$，进而有

$\|OA\|^2+\|OB\|^2=(2+1)^2+(3+2)^2=34$，

$\|OA'\|^2+\|OB'\|^2=(2+2)^2+(3+1)^2=32$，

所以 $\|OA\|^2+\|OB\|^2\geq\|OA'\|^2+\|OB'\|^2$.

所以 A,B 两点相关；

②由题知 $C'(4,4),D'(2,-3)$，进而有

$\|OC\|^2+\|OD\|^2=$（$4+3)^2+(2+4)^2=85$，

$\|OC'\|^2+\|OD'\|^2=(4+4)^2+(2+3)^2=89$，

所以$\|OC\|^2+\|OD\|^2<\|OC'\|^2+\|OD'\|^2$，

所以C,D两点不相关.

（Ⅱ）（ⅰ）设$A(1,1)$的相关点为$B(x,y)$，$x,y\in\mathbf{Z}$，$-n\le x\le n,-n\le y\le n$，

由题意，$A'(1,y)$，$B'(x,1)$.

因为点A,B相关，则$4+x^2+y^2+2|x||y|\ge 1+y^2+2|y|+1+x^2+2|x|$.

所以$|x||y|-|x|-|y|+1\ge 0$.

所以$(|x|-1)(|y|-1)\ge 0$.

当$x=0$时，$|y|\in\{0,1\}$，则$A(1,1)$相关点的个数共3个；

当$|x|=1$时，则$A(1,1)$相关点的个数共$4n+2$个；

当$|x|\ge 2$时，$|y|\ge 1$，则$A(1,1)$相关点的个数共$4n(n-1)$个.

所以满足条件点B共有$4n(n-1)+4n+2+3=4n^2+5$（个）.

（ⅱ）集合S中元素个数的最大值为$8n-1$.

$S=\{(0,0),(0,\pm1),(\pm1,\pm1),\cdots(\pm1,\pm n),(\pm2,\pm n),\cdots,(\pm n,\pm n)\}$符合题意

下证：集合S中元素个数不超过$8n-1$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，若点A,B相关，则

$$x_1^2+y_1^2+2|x_1||y_1|+x_2^2+y_2^2+2|x_2||y_2|$$

$$\ge x_1^2+y_2^2+2|x_1||y_2|+x_2^2+y_1^2+2|x_2||y_1|.$$

则$|x_1y_1|+|x_2y_2|\ge|x_1y_2|+|x_2y_1|$.

所以$(|x_1|-|x_2|)(|y_1|-|y_2|)\ge 0$.

设集合S中共有m个元素，分别为$A_i(x_i,y_i)$，$1\le i\le m$，$i\in N^*$，

不妨设$|x_1|\le|x_2|\le\cdots|x_m|$，而且满足当$|x_i|=|x_{i+1}|$，$|y_i|\le|y_{i+1}|$.

下证：$|y_1|\le|y_2|\le\cdots\le|y_m|$.

若$|x_i|=|x_{i+1}|$，$|y_i|\le|y_{i+1}|$.

若$|x_i|<|x_{i+1}|$，则必有$|y_i|\le|y_{i+1}|$.

记，$d_i=|x_{i+1}|+|y_{i+1}|-|x_i|-|y_i|$，$1\le i\le m-1$，$i\in\mathbf{N}^*$，

显然，数列$\{d_i\}$至多连续 3 项为 0，必有$d_i+d_{i+1}+d_{i+2}+d_{i+3}\ge1$，

假设$m>8n-1$，

则$d_1+d_2+\cdots+d_{8n-1}=d_1+d_2+d_3+(d_4+\cdots+d_{8n-1})\ge2n-1$.

而$d_1+d_2+\cdots+d_{8n-1}=|x_{8n}|-|x_1|+|y_{8n}|-|y_1|\ge2n-1$，

因此，必有$x_1=0$或$y_1=0$.

可得，d_1,d_2不可能同时为 0，则$d_1+d_2\ge1$.

所以$d_1+d_2+\cdots+d_{8n-1}=(d_1+d_2)+d_3+(d_4+\cdots+d_{8n-1})\ge2n$.

必有$|x_{8n}|=|y_{8n}|=n$，$x_1=y_1=0$.

所以，$d_1=1$，$d_2=d_3=0$.

因此$|x_2|+|y_2|=1$，$|x_3|+|y_3|=1$，$|x_4|+|y_4|=1$.

若$|x_2|=1$，则$A_2,A_3,A_4\in\{(1,0),(-1,0)\}$，矛盾.

同理，$|y_2|=1$，矛盾.

因此，假设不成立.

所以$m\le8n-1$.

所以集合S中元素个数的最大值为$8n-1$.