2020 北京房山高三二模

数　　学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2-x>0\}$，那么集合 $\complement_U A=$

（A）$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

（C）$(0,1)$　　（D）$[0,1]$

（2）在△ ABC 中，若 $A=\dfrac{\pi}{4}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，则 $b=$

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$3\sqrt{2}$

（C）$2\sqrt{6}$　　（D）$3\sqrt{3}$

（3）函数 $f(x)=\sin\pi x\cos\pi x$ 的最小正周期为

（A）1　　（B）2

（C）π　　（D）2π

（4）若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的一条渐近线经过点 $(1,\sqrt{3})$，则该双曲线的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$

（C）2　　（D）$\sqrt{5}$

（5）函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2$ 的零点个数为

（A）0　　（B）1

（C）2　　（D）3

（6）“$\sin\alpha\neq\sin\beta$”是“$\alpha\neq\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知函数$f(x)=\lg|1+x|+\lg|1-x|$，则$f(x)$

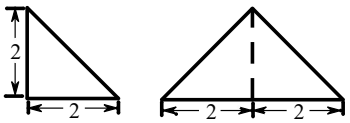
（A）是奇函数，且在$(1,+\infty)$上是增函数

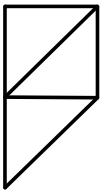
（B）是奇函数，且在$(1,+\infty)$上是减函数

（C）是偶函数，且在$(1,+\infty)$上是增函数

（D）是偶函数，且在$(1,+\infty)$上是减函数

（8）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的最长侧棱的长为




俯视图

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）$2\sqrt{3}$　　（D）4

（9）把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是$\theta_1^{\circ}\mathrm{C}$，空气的温度是$\theta_0^{\circ}\mathrm{C}$，经过$t$分钟后物体的温度$\theta^{\circ}\mathrm{C}$可由公式$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$求得，其中$k$是一个随着物体与空气的接触状况而定的大于0的常数．现有$80^{\circ}\mathrm{C}$的物体，放在$20^{\circ}\mathrm{C}$的空气中冷却，4分钟以后物体的温度是$40^{\circ}\mathrm{C}$，则k约等于（参考数据：$\ln 3\approx 1.099$）

（A）0.6　　（B）0.5

（C）0.4　　（D）0.3

（10）李明自主创业种植有机蔬菜，并且为甲、乙、丙、丁四家超市提供配送服务，甲、乙、丙、丁四家超市分别需要每隔2天、3天、5天、6天去配送一次．已知5月1日李明分别去了这四家超市配送，那么整个5月他不用去配送的天数是

（A）12　　（B）13

（C）14　　（D）15

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若 $(m+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$（$m\in\mathbf{R}$），则 $m=$_____.

（12）若直线 $x=3$ 与圆 $x^2+y^2-2x-a=0$ 相切，则 $a=$_____.

（13）已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 上，$|MF|=1$，则点 M 的横坐标是_____，$\triangle MOF$（O 为坐标原点）的面积为_____.

（14）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$，若 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PD}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值为_____.

（15）对任意两实数 a，b，定义运算“$*$”：$a*b=\begin{cases}2a-2b, a\geqslant b,\\ 2b-2a, a<b.\end{cases}$ 给出下列三个结论：

①存在实数 a，b，c 使得 $a*b+b*c\geqslant c*a$ 成立；

②函数 $f(x)=\sin x*\cos x$ 的值域为 $[0,2]$；

③不等式 $x*2\leqslant(1-x)*1$ 的解集是 $[1,+\infty)$.

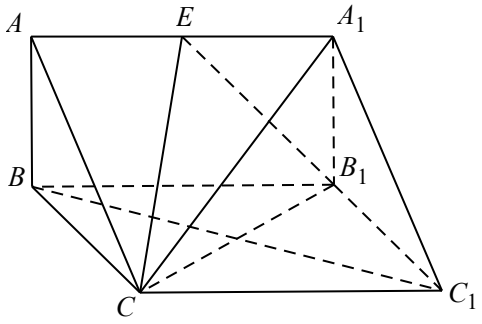
其中正确结论的序号是_____.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，BCC_1B_1 是边长为 2 的正方形，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，$AB=1$，$AB\perp BC$，点 E 为棱 AA_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C；

（Ⅱ）求直线 BC_1 与平面 B_1CE 所成角的正弦值.

（17）（本小题 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，_____. 是否存在正整数 k（$k>1$），使得 a_1,a_k,S_{k+2} 成等比数列？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.

从①$a_{n+1}-2a_n=0$，②$S_n=S_{n-1}+n(n\geqslant 2)$，③$S_n=n^2$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

（18）（本小题 14 分）

“十一”黄金周某公园迎来了旅游高峰期，为了引导游客有序游园，该公园每天分别在10时，12时，14时，16时公布实时在园人数．下表记录了10月1日至7日的实时在园人数：

	1日	2日	3日	4日	5日	6日	7日
10时在园人数	11526	18005	19682	8284	13830	10101	6663
12时在园人数	26518	37089	42931	16845	34017	23168	14800
14时在园人数	37322	38045	40631	20711	36558	24706	15125
16时在园人数	27306	29687	30638	16181	20821	16169	10866

通常用公园实时在园人数与公园的最大承载量（同一时段在园人数的饱和量）之比来表示游园舒适度，40%以下称为“舒适”，已知该公园的最大承载量是8万人．

（Ⅰ）甲同学从10月1日至7日中随机选1天的下午14时去该公园游览，求他遇上“舒适”的概率；

（Ⅱ）从10月1日至7日中任选两天，记这两天中这4个时间的游览舒适度都为“舒适”的天数为X，求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）根据10月1日至7日每天12时的在园人数，判断从哪天开始连续三天12时的在园人数的方差最大？（只需写出结论）

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆C的两个顶点分别为$A(-2,0)$，$B(2,0)$，焦点在x轴上，离心率为$\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设O为原点，点P在椭圆C上，点Q和点P关于x轴对称，直线AP与直线BQ交于点M，求证：P，M两点的横坐标之积等于4，并求$|OM|$的取值范围．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\mathrm{e}^{x}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）求曲线 $f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅲ）求证：当 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$f(x)\geqslant 2$.

（21）（本小题 14 分）

已知集合 P 的元素个数为 $3n$ $(n\in\mathbf{N}^{*})$ 且元素均为正整数，若能够将集合 P 分成元素个数相同且两两没有公共元素的三个集合 A，B，C，即 $P=A\bigcup B\bigcup C$，$A\bigcap B=\varnothing$，$A\bigcap C=\varnothing$，$B\bigcap C=\varnothing$，其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，且满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称集合 P 为“完美集合”.

（Ⅰ）若集合 $P=\{1,2,3\}$，$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$，判断集合 P 和集合 Q 是否为“完美集合”？并说明理由；

（Ⅱ）已知集合 $P=\{1,x,3,4,5,6\}$ 为“完美集合”，求正整数 x 的值；

（Ⅲ）设集合 $P=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3n,n\in\mathbf{N}^{*}\}$，证明：集合 P 为“完美集合”的一个必要条件是 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ $(n\in\mathbf{N}^{*})$.

2020 北京房山高三二模数学

参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	C	B	A	C	C	D	B

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

（11）2

（12）3

（13）$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{4}$

（14）$\frac{3}{4}$

（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）∵平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1，平面 $ABC \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BC$

又 $AB \perp BC$，

∴ $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1，

（有前面的∵，∴才得分）

∵ $A_1B_1 \parallel AB$，

∴ $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1，

∵ $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

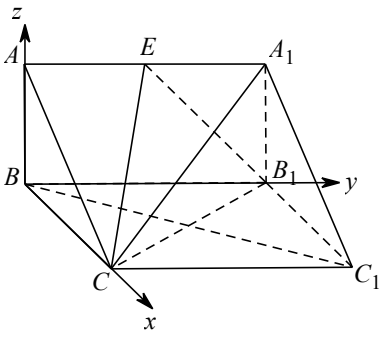
∴ $A_1B_1 \perp BC_1$，

又BCC_1B_1是正方形，$BC_1 \perp B_1C$

$\therefore BC_1 \perp$平面A_1B_1C

（有前面的$\because$，$\therefore$才得分）

（Ⅱ）由AB, BC, BB_1两两垂直，如图建立直角坐标系



$B(0,0,0)$，$C_1(2,2,0)$，$C(2,0,0)$，$E(0,1,1)$，

$B_1(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(2,-2,0)$，

$\overrightarrow{CE}=(-2,1,1)$

设平面B_1CE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2x-2y=0,\\ -2x+y+z=0,\end{cases}$$

令$x=1$，得$\vec{n}=(1,1,1)$

设直线BC_1与平面B_1CE所成角为θ，所以$\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{BC}>|=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}||\vec{n}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（17）（本小题 14 分）

解：选择①

由$a_{n+1}-2a_n=0$，得$a_{n+1}=2a_n$，得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

因为$a_1=1$，所以$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$

所以$a_k=2^{k-1}$

$$S_{k+2}=\frac{a_1(1-q^{k+2})}{1-q}=\frac{1-2^{k+2}}{1-2}=2^{k+2}-1$$

若a_1, a_k, S_{k+2}成等比数列，则$a_k{}^2=a_1\cdot S_{k+2}$

即 $(2^{k-1})^2 = 2^{k+2} - 1$

化简得 $(2^k)^2 - 16 \cdot 2^k + 4 = 0$

解得 $2^k = 8 \pm 2\sqrt{15}$

因为 k 为正整数且 $k > 1$，所以 k 不存在

选择②

当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n$，

因为 $a_1 = 1$ 符合上式，所以 $a_n = n$.

$\{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列.

所以 $a_k = k$

$$S_{k+2} = \frac{(a_1 + a_{k+2})(k+2)}{2} = \frac{(1+k+2)(k+2)}{2} = \frac{(k+3)(k+2)}{2}$$

若 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列，则 $a_k{}^2 = a_1 \cdot S_{k+2}$

即 $k^2 = \frac{(k+3)(k+2)}{2}$

因为 k 为正整数且 $k > 1$，所以解得 $k = 6$

选择③

当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$，

因为 $a_1 = 1$ 符合上式，所以 $a_n = 2n - 1$.

$\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

所以 $a_k = 2k - 1$，$a_{k+2} = 2(k+2) - 1 = 2k + 3$

$$S_{k+2} = \frac{(a_1 + a_{k+2})(k+2)}{2} = \frac{(1+2k+3)(k+2)}{2} = (k+2)^2$$

若 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列，则 $a_k{}^2 = a_1 \cdot S_{k+2}$

即 $(2k-1)^2 = (k+2)^2$

因为k为正整数且$k>1$，所以解得$k=3$

（18）（本小题 14 分）

（Ⅰ）由题意知，若舒适度为“舒适”，则在园人数不大于$8\times\frac{40}{100}=3.2$万，

所以10月1日至7日中下午14时舒适度为“舒适”的天数为3天，

因此甲同学从10月1日至7日中随机选1天的下午14时去该景区游览，遇上“舒适”的概率为$\frac{3}{7}$.

（Ⅱ）这记这两天中这4个时间的游览舒适度都为“舒适”的天数为X，则X的可能取值为$0,1,2$

10月1日至7日中这4个时间的游览舒适度都为“舒适”的有3天，则

$$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$$

X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

所以X的期望$EX=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

（Ⅲ）从10月2日开始连续三天的在园人数的方差最大.

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

依题意，$a=2$，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

得$c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$.

所以，椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）依题意，可设$P(m,n)$（$-2<m<2$且$m\neq 0$），则$Q(m,-n)$.

点P在椭圆C上，则$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1$，

AP的斜率为$k_1=\frac{n}{m+2}$，直线AP方程为$y=\frac{n}{m+2}(x+2)$，

BQ的斜率为$k_1=\frac{-n}{m-2}$，直线BQ的方程为$y=\frac{-n}{m-2}(x-2)$.

设$M(x,y)$，由$\begin{cases}y=\frac{n}{m+2}(x+2)\\ y=\frac{-n}{m-2}(x-2)\end{cases}$

得$\begin{cases}x=\frac{4}{m}\\ y=\frac{2n}{m}\end{cases}$，所以$M$的坐标为$(\frac{4}{m},\frac{2n}{m})$.

所以P，M的横坐标之积等于$m\cdot\frac{4}{m}=4$.

$|OM|=\sqrt{\left(\frac{4}{m}\right)^2+\left(\frac{2n}{m}\right)^2}=\sqrt{\frac{16+4n^2}{m^2}}=\sqrt{\frac{28-3m^2}{m^2}}=\sqrt{\frac{28}{m^2}-3}$，

由$0<m^2<4$，

所以，$|OM|$的取值范围是$(2,+\infty)$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由$\sin x\neq -1$，得$x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

所以$f(x)$的定义域为$\{x\,|\,x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})\}$

（Ⅱ）$f(0)=\frac{\cos 0}{1+\sin 0}+\mathrm{e}^{0}=2$

$f'(x)=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^{2}x}{(1+\sin x)^{2}}+\mathrm{e}^{x}=-\frac{1}{1+\sin x}+\mathrm{e}^{x}$（$x\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$）

$f'(0)=0$

所以，曲线$f(x)$在点$(0，f(0))$处的切线方程为$y=2$

（Ⅲ）法一：由$f'(x)=-\frac{1}{1+\sin x}+\mathrm{e}^{x}$，

令$g(x)=-\frac{1}{1+\sin x}+\mathrm{e}^{x}$，则$g'(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^{2}}+\mathrm{e}^{x}$

当$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上单调递增，且$g(0)=0$

所以当$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$f(x)$的极小值为$f(0)=2$

所以，当$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$时，$f(x)\geqslant 2$

法二：$f'(x)=-\frac{1}{1+\sin x}+\mathrm{e}^{x}$

当$x=0$时，$f'(0)=-\frac{1}{1+\sin 0}+\mathrm{e}^{0}=0$；

当$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$\sin x\in(-1,0),1+\sin x\in(0,1),\frac{1}{1+\sin x}\in(1,+\infty),\frac{-1}{1+\sin x}\in(-\infty,-1),$

$\mathrm{e}^{x}\in(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}},1)$，所以当$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$\sin x\in(0,1),1+\sin x\in(1,2),\frac{1}{1+\sin x}\in(\frac{1}{2},1),\frac{-1}{1+\sin x}\in(-1,-\frac{1}{2}),$

$e^x \in (1, e^{\frac{\pi}{2}})$，所以当$x \in (0, \frac{\pi}{2})$时，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调递增，

$f(x)$的极小值为$f(0) = 2$

所以，当$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$时，$f(x) \geqslant 2$

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）将P分为集合$\{1\},\{2\},\{3\}$满足条件，是完美集合.

将Q分成3个，每个中有两个元素，若为完美集合，则$a_1 + b_1 = c_1$，$a_2 + b_2 = c_2$

Q中所有元素之和为21，$21 \div 2 = 10.5 = c_1 + c_2 = 10.5$，不符合要求；

（Ⅱ）若集合$A = \{1,4\}$，$B = \{3,5\}$，根据完美集合的概念知集合$C = \{6,7\}$，

若集合$A = \{1,5\}$，$B = \{3,6\}$，根据完美集合的概念知集合$C = \{4,11\}$，

若集合$A = \{1,3\}$，$B = \{4,6\}$，根据完美集合的概念知集合$C = \{5,9\}$，

故x的一个可能值为$7,9,11$中任一个；

（Ⅲ）证明：P中所有元素之和为

$$1 + 2 + \cdots + 3n = \frac{3n(3n+1)}{2}$$

$$= a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 + \cdots a_n + b_n + c_n$$

$$= 2(c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n)$$

$\because c_n = 3n$

$$\therefore \frac{3n(3n+1)}{4} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + 3n$$

$\therefore \frac{9n(n-1)}{4} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}$，等号右边为正整数，

则等式左边$9n(n-1)$可以被4整除，

$\therefore n = 4k$或$n - 1 = 4k$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，即$n = 4k$或$n = 4k + 1$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.