2019 北京海淀高三二模

数　　学（理）

2019.5

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

(1) 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 5\}$，$B=\{x|3\le x\le 6\}$，则 $A\cap B=$

(A) [1,3]　(B) [3,5]　(C) [5,6]　(D) [1,6]

(2) 复数 $z=a+i(i\in R)$ 的实部是虚部的 2 倍，则 a 的值为

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) −2　(D) 2

(3，若直线 l：$\begin{cases}x=1+t\\y=2+at\end{cases}$（$t$ 为参数），经过坐标原点，则直线 l 的斜率是

(A) −2　(B) −1　(C) 1　(D) 2

(4) 在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是

(A) −80　(B) −10　(C) 5　(D) 40

(5) 把函数 $y=2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度，所得图象对应的函数解析式为 $y=\frac{2^x}{3}$，则 t 的值为

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\log_2 3$　(C) $\log_3 2$　(D) $\sqrt{3}$

(6) 学号分别为 1，2，3，4 的 4 位同学排成一排，若学号相邻的同学不相邻，则不同的排法种数为

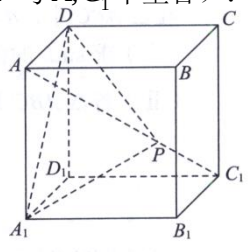
(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

(7) 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，则“函数 $f(x)$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{4}$，1）”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{2},0$）”的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

(8) 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是对角线 AC_1 上的动点（点 P 与 A,C_1 不重合）．则下面结论中错误的是



(A) 存在点 P，使得平面 A_1DP // 平面 B_1CD_1

(B) 存在点 P，使得 AC_1 ⊥ 平面 A_1DP

(C) S_1, S_2 分别是△ A_1DP 在平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 BB_1C_1C 上的正投影图形的面积，对任意点 P，$S_1 \neq S_2$

(D) 对任意点 P，△ A_1DP 的面积都不等于 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 已知直线 $l_1: x-y+1=0$ 与 $l_2: x+ay+3=0$ 平行，则 $a=$_____，l_1 与 l_2 之间的距离为

(10) 已知函数 $f(x)=(x+t)(x-t)^2$ 是偶函数，则 $t=$

(11) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-8n$，$n=1,2,3,...,$ 则满足 $a_n>0$ 的 n 的最小值为

(12) 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 与曲线 $y=|x-1|$ 相交于 M, N 两点，则线段 MN 的长度为

(13) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2, BC=1$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在线段 DC 上．若 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}$，且点 P 在直线 AC 上，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$

(14) 已知集合 $A_0=\{x|0<x<1\}$. 给定一个函数 $y=f(x)$，定义集合 $A_n=\{y|y=f(x), x\in A_{n-1}\}$

若 $A_n \cap A_{n-1}=\phi$ 对任意的 $n\in N^*$ 成立，则称该函数 $y=f(x)$ 具有性质“ ”.

(I) 具有性质“9”的一个一次函数的解析式可以是 _____；

(II) 给出下列函数：① $y=\frac{1}{x}$；② $y=x^2+1$；③ $y=\cos(\frac{\pi}{2}x)+2$，其中具有性质“9”的函 数的序号是____. （写出所有正确答案的序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

(15)（本小题满分 13 分）

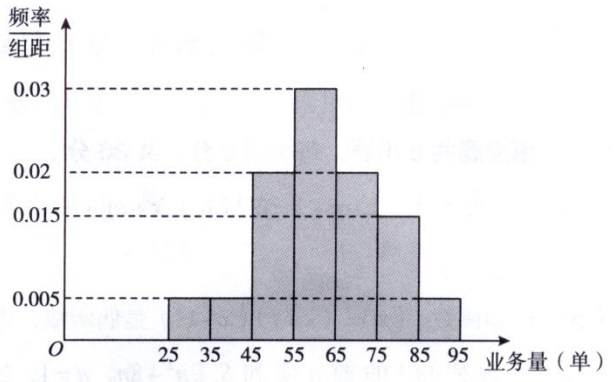
在 ΔABC 中，$a=7, b=8, A=\frac{\pi}{3}$.

(I) 求 $\sin B$ 的值；

(II) 若 ΔABC 是钝角三角形，求 BC 边上的高.

(16)（本小题满分 13 分）

某快餐连锁店招聘外卖骑手，该快餐连锁店提供了两种日工资方案：方案(1)规定每日底薪 50 元，快递业务每完成一单提成 3 元；方案(2)规定每日底薪 100 元，快递业务的前 44 单没有提成，从第 45 单开始，每完成一单提成 5 元，该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量，现随机抽取 100 天的数据，将样本数据分为[25，35），［35，45），[45，55），[55，65），[65，75），[75，85），[85，95]七组，整理得到如图所示的频率分布直方图。



(Ⅱ)随机选取一天，估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率；

(Ⅱ)从以往统计数据看，新聘骑手选择日工资方案(1)的概率为$\frac{1}{3}$，选择方案(2)的概率为$\frac{2}{3}$．若甲、乙、丙三名骑手分别到该快餐连锁店应聘，三人选择日工资方案相互独立，求至少有两名骑手选择方案(1)的概率；

(III)若仅从人均日收入的角度考虑，请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择，并说明理由．（同组中的每个数据用该组区间的中点值代替）

(17)（本小题满分 14 分）

如图 1 所示，在等腰梯形 $ABCD$，$BC \parallel AD$，$CE \perp AD$，垂足为 E，$AD=3BC=3$，$EC=1$. 将 ΔDEC 沿 EC 折起到 ΔD_1EC 的位置，使平面 $\Delta D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$，如图 2 所示，点 G 为棱 AD_1 上一个动点。

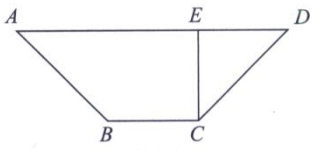


图 1

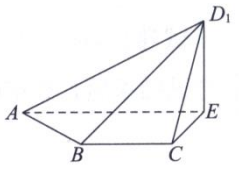


图 2

(Ⅱ)当点 G 为棱 AD_1 中点时，求证：$BG \parallel$ 平面 D_1EC　　t

(Ⅱ)求证：$AB \perp$ 平面 D_1BE；

(III)是否存在点 G，使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，求出 AG 的长；若不存在，请说明理由.

(18)（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点　A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$.

(Ⅱ)求椭圆 C 的方程和焦点的坐标；

(Ⅱ)点 P 在椭圆 C 上，线段 AP 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q，若 ΔPAQ 为等边三角形，求点 P 的横坐标.

(19)（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}(x^2-\frac{a+2}{a}),$，其中 $a\neq 0$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的倾斜角；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的极小值小于 0，求实数 a 的取值范围.

(20)（本小题满分 13 分）

对于给定的奇数 $m,(m\geq 3)$ ，设 A 是由 $m\times m$ 个数组成的 m 行 m 列的数表，数表中第 i 行，第 j 列的数 $a_{ij}\in\{0,1\}$，记 $c(i)$ 为 A 的第 i 行所有数之和， $r(j)$ 为 A 的第 j 列所有数之和，其中 $i,j\in\{1,2,...,m\}$.

对于 $i,j\in\{1,2,...,m\}$，若 $\left|ma_{ij}-c(i)\right|<\frac{m}{2}$ 且 $\left|j\right|<\frac{m}{2}$ 同时成立，则称数对 (i,j) 为数表 A 的一个“好位置”

（Ⅱ）直接写出右面所给的 3×3 数表 A 的所有的“好位置”；

1	1	1
0	0	1
0	1	0

（Ⅱ）当 $m=5$ 时，若对任意的 $1\leq i\leq 5$ 都有 $c(i)\geq 3$ 成立，求数表 A 中的“好位置”个数的最小值；

(Ⅲ)求证：数表 A 中的“好位置”个数的最小值为 $2m-2$.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B　2. D　3. D　4. A　5. B　6. A　7. A　8. C

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $-1,\sqrt{2}$　10. $0,1$　11. 5

12. $2\sqrt{2}$　13. $\frac{5}{2}$　14. $y=x+1$（答案不唯一），①　②

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在△ABC 中，因为 $a=7$，$b=8$，$A=\frac{\pi}{3}$，

所以由正弦定理 $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

（Ⅱ）方法 1：

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

得 $49=64+c^2-2\times8\times c\times\frac{1}{2}$

即 $c^2-8c+15=0$，解得 $c=5$ 或 $c=3$

因为 $b>a,b>c$，所以 $\angle B$ 为△ABC 中最大的角，

当 $c=5$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0$，与△$ABC$ 为钝角三角形矛盾，舍掉

当 $c=3$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<0$，△$ABC$ 为钝角三角形，

所以 $c=3$

设 BC 边上的高为 h，所以 $h=c\sin B=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

方法 2：

因为$b>a$，所以$B>A=\frac{\pi}{3}$，所以$C<\frac{\pi}{3}$，

所以$\angle B$为$\triangle ABC$中最大的角

因为$\triangle ABC$为钝角三角形，所以B为钝角

因为$\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，所以$\cos B=-\frac{1}{7}$

所以$\sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

设BC边上的高为h，所以$h=b\sin C=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

16.（共 13 分）

解：（Ⅰ）设事件A为“随机选取一天，这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于65单”

依题意，连锁店的人均日快递业务量不少于65单的频率分别为：$0.2,0.15,0.05$

因为$0.2+0.15+0.05=0.4$

所以$P(A)$估计为0.4.

（Ⅱ）设事件B为“甲、乙、丙三名骑手中至少有两名骑手选择方案（1）”

设事件C_i为“甲乙丙三名骑手中恰有$i(i=0,1,2,3)$人选择方案（1）”，

则$P(B)=P(C_2)+P(C_3)$

$=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1+C_3^3(\frac{1}{3})^3=\frac{6}{27}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$

所以三名骑手中至少有两名骑手选择方案（1）的概率为$\frac{7}{27}$

（Ⅲ）方法 1：

设骑手每日完成快递业务量为X件

方案（1）的日工资$Y_1=50+3X(X\in\mathbf{N}^*)$，

方案（2）的日工资$Y_2=\begin{cases}100, X\le 44, X\in\mathbf{N}^*\\ 100+5(X-44), X>44, X\in\mathbf{N}^*\end{cases}$

所以随机变量Y_1的分布列为

所以

Y_1	140	170	200	230	260	290	320
P	0.05	0.05	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

$EY_1=140\times0.05+170\times0.05+200\times0.2+230\times0.3$

$+260\times0.2+290\times0.15+320\times0.05=236$

同理随机变量Y_2的分布列为

Y_1	100	130	180	230	280	330
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

$EY_2=100\times0.1+130\times0.2+180\times0.3+230\times0.2+280\times0.15+330\times0.05$

$=194.5$

因为$EY_1>EY_2$，所以建议骑手应选择方案（1）

方法 2：

快餐店人均日快递量的期望是：

$30\times0.05+40\times0.05+50\times0.2+60\times0.3+70\times0.2+80\times0.15+90\times0.05=62$

因此，方案（1）日工资约为$50+62\times3=236$

方案 2 日工资约为$100+(62-44)\times5=190<236$

故骑手应选择方案（1）

17.（共 14 分）

解：（Ⅰ）方法 1：

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过B作 AE 的垂线，垂足为F，

因为$CE \perp AD$，所以$BF \parallel EC$

又因为$BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$， AD=3

所以四边形$BCEF$为正方形， $AF = FE = ED = 1$， F为AE中点

在图 2 中，连结GF

因为点G是AD_1的中点，

所以$GF \parallel D_1E$

又因为$BF \parallel EC$， $GF \cap BF = F$， GF，$BF \subset$平面BFG ， $D_1E, EC \subset$平面D_1EC，

所以平面$BFG \parallel$平面CED_1

又因为$BG \subset$面GFB ，所以$BG \parallel$平面D_1EC

方法 2：

在图 1 的等腰梯形$ABCD$内，过B作AE的垂线，垂足为F

因为$CE \perp AD$，所以$BF \parallel EC$

又因为$BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$， AD=3

所以四边形$BCEF$为正方形 ， F为AE中点

在图 2 中，连结GF

因为点G是AD_1的中点，

所以$GF \parallel D_1E$

又$D_1E \subset$平面D_1EC， $GF \not\subset$平面D_1EC

所以$GF \parallel$平面D_1EC

又因为$BF \parallel EC$， $EC \subset$平面D_1EC， $BF \not\subset$平面D_1EC

所以$BF \parallel$平面D_1EC

又因为$GF \cap BF = F$

所以平面$BFG \parallel$平面D_1EC

又因为$BG \subset$面GFB ，所以$BG \parallel$平面D_1EC

方法 3：

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F，

因为 $CE \perp AD$，所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$， $AD=3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， $AF = FE = ED = 1$，得 $AE = 2$

所以 $BC \parallel AE$， $BC=\frac{1}{2}AE$

在图 2 中设点 M 为线段 D_1E 的中点，连结 MG, MC，

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GM \parallel AE$， $GM=\frac{1}{2}AE$

所以 $GM \parallel BC$， $GM=BC$，所以四边形 $MGBC$ 为平行四边形

所以 $BG \parallel CM$

又因为 $CM \subset$ 平面 D_1EC， $BG \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

（Ⅱ）因为平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$，

平面 $D_1EC \cap$ 平面 $ABCE = EC$，

$D_1E \perp EC$， $D_1E \subset$ 平面 D_1EC，

所以 $D_1E \perp$ 平面 $ABCE$

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCE$

所以 $D_1E \perp AB$

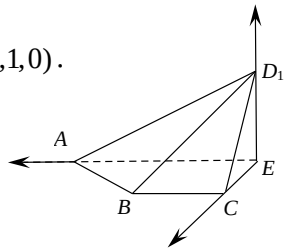
又 $AB=\sqrt{2}, BE=\sqrt{2}, AE=2$，满足 $AE^2 = AB^2 + BE^2$ ，

所以 $BE \perp AB$

又 $BE \cap D_1E = E$

所以 $AB \perp$ 平面 D_1EB

（Ⅲ）因为 EA, EC, ED_1 三线两两垂直，如图，建立空间直角坐标系 $E-ACD_1$，



所以 $A(2,0,0)$， $D_1(0,0,1)$， $B(1,1,0)$， $\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,1), \overrightarrow{EB}=(1,1,0)$.

假设存在点 G 满足题意，

设 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD_1}, 0\le\lambda\le1$，则 $\overrightarrow{AG}=\lambda(-2,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}=(2,0,0)+\lambda(-2,0,1)=(2-2\lambda,0,\lambda)$

设平面 GBE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a+b=0\\ (2-2\lambda)a+\lambda c=0\end{cases}$

取 $a=\lambda$，则 $\boldsymbol{m}=(\lambda,-\lambda,2\lambda-2)$，

由（Ⅱ）， $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ 为平面 BED_1 的法向量，

令 $\left|\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{m}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\boldsymbol{m}\right|}\right|=\dfrac{\left|-2\lambda\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+(2\lambda-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$（舍）

所以存在点 G，使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，且 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD_1}$，

得 $AG=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

18.（共 13 分）

解：（Ⅰ）依题意，有 $\sqrt{4+b^2}=\sqrt{6}$

所以 $b^2=2$

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

所以 $c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$，

焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2},0), F_2(\sqrt{2},0)$,

（Ⅱ）方法 1：

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，且 $A(-2,0)$,

若点 P 为右顶点，则点 Q 为上（或下）顶点，$|AP|=4,|AQ|=\sqrt{6}$，△ PAQ 不是等边三角形，不合题意，所以 $x_0\neq\pm2, y_0\neq0$.

设线段 PA 中点为 M，所以 $M(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2})$

因为 $PA\perp MQ$，所以 $k_{PA}\cdot k_{MQ}=-1$

因为直线 PA 的斜率 $k_{Ap}=\frac{y_0}{x_0+2}$

所以直线 MQ 的斜率 $k_{MQ}=-\frac{x_0+2}{y_0}$

又直线 MQ 的方程为 $y-\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0+2}{y_0}(x-\frac{x_0-2}{2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\frac{y_0}{2}+\frac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}$

因为 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$

所以 $y_Q=-\frac{y_0}{2}$

因为△PAQ 为正三角形，

所以 $|AP|=|AQ|$，即 $\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=\sqrt{2^2+\frac{y_0^2}{4}}$

化简，得到 $5x_0^2+32x_0+12=0$，解得 $x_0=-\frac{2}{5}, x_0=-6$（舍）

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$.

方法 2：

设 $P(x_0,y_0)$，直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$.

当$k=0$时，点P为右顶点，则点Q为上（或下）顶点，$|AP|=4,|AQ|=\sqrt{6}$，$\triangle PAQ$ 不是等边三角形，不合题意，所以$k\neq 0$.

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$

消元得$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

所以$\Delta=16>0$

所以$x_0+(-2)=\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}$

设线段PA中点为M，所以$x_M=\dfrac{x_0-2}{2}=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$，$y_M=k(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}+2)=\dfrac{2k}{1+2k^2}$

所以$M(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2},\dfrac{2k}{1+2k^2})$

因为$AP\perp MQ$，所以$K_{MQ}=-\dfrac{1}{k}$

所以直线MQ的方程为$y-\dfrac{2k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{-4k^2}{1+2k^2})$

令$x=0$，得到$y_Q=\dfrac{2k}{1+2k^2}-\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{4k^2}{1+2k^2}=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$

因为$\triangle PAQ$为正三角形，所以$|AP|=|AQ|$

所以$\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4}{1+2k^2}=\sqrt{4+(\dfrac{-2k}{1+2k^2})^2}$

化简，得到$4k^4+k^2-3=0$，解得$k^2=\dfrac{3}{4},k^2=-1$（舍）

所以$x_0=\dfrac{-4k^2+2}{1+2k^2}=-\dfrac{2}{5}$，

即点P的横坐标为$-\dfrac{2}{5}$.

方法3：

设$P(x_0,y_0)$，

当直线 AP 的斜率为 0 时，点 P 为右顶点，则点 Q 为上（或下）顶点，$|AP|=4,|AQ|=\sqrt{6}$，△ PAQ 不是等边三角形，不合题意，所以直线 AP 的斜率不为 0.

设直线 AP 的方程为 $x=ty-2$

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ x=ty-2\end{cases}$

消元得，$(t^2+2)y^2-4ty=0$

所以 $y_0=\frac{4t}{t^2+2}$

设线段 PA 中点为 M

所以 $y_M=\frac{2t}{t^2+2}$，$x_M=\frac{-4}{t^2+2}$，

所以 $M(\frac{-4}{t^2+2},\frac{2t}{t^2+2})$

因为 $AP\perp MQ$，所以 $k_{MQ}=-\frac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\frac{2t}{t^2+2}=-t(x-\frac{-4}{t^2+2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\frac{-2t}{t^2+2}$

因为△PAQ 为正三角形， 所以 $|AP|=|AQ|$

所以 $\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{|4t|}{t^2+2}=\sqrt{4+(\frac{2t}{t^2+2})^2}$

化简，得到 $3t^4-t^2-4=0$，解得 $t^2=\frac{4}{3},t^2=-1$（舍）

所以 $x_0=\frac{2t^2-4}{t^2+2}=-\frac{2}{5}$，

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$

19．（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}(x^2-\dfrac{a+2}{a})$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{ax}(ax^2+2x-(a+2))$

所以 $f'(1)=0$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的倾斜角为 0

（Ⅱ）方法 1：

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^{ax}(ax^2+2x-(a+2))=\mathrm{e}^{ax}(ax+(a+2))(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\dfrac{a+2}{a}, x_2=1$

当 $a>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

而 $f(1)=\mathrm{e}^{a}(1-\dfrac{a+2}{a})=\mathrm{e}^{a}(1-1-\dfrac{2}{a})=\mathrm{e}^{a}(-\dfrac{2}{a})<0$，符合题意

当 $a=-1$ 时，$x_1=-\dfrac{a+2}{a}=x_2=1$，

$f'(x)=-\mathrm{e}^{ax}(x+1)^2\le 0$，$f(x)$ 没有极值，不符合题意

当 $-1<a<0$ 时，$x_1>1$，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,x_1)$	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

而 $f(1)=\mathrm{e}^{a}(-\dfrac{2}{a})>0$，不符合题意

当 $a<-1$ 时，$x_1<1$，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $f(x_1)=\mathrm{e}^{a(-\frac{a+2}{a})}[(-\frac{a+2}{a})^2-(\frac{a+2}{a})]<0$， 解得 $a<-2$

综上， a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

方法 2：

因为函数 $f(x)$ 的极小值小于 0，

所以 $f(x)<0$ 有解，即 $x^2-\frac{a+2}{a}<0$ 有解

所以 $\frac{a+2}{a}>0$，所以有 $a>0$ 或 $a<-2$

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^{ax}(ax^2+2x-(a+2))=\mathrm{e}^{ax}(ax+(a+2))(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\frac{a+2}{a}, x_2=1$

当 $a>0$ 时， x， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

而 $f(1)=\mathrm{e}^a(1-\frac{a+2}{a})=\mathrm{e}^a(1-1-\frac{2}{a})=\mathrm{e}^a(-\frac{2}{a})<0$，符合题意

当 $a<-2$ 时， $x_1<1$， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

而 $f(x_1)=\mathrm{e}^{a(-\frac{a+2}{a})}[(-\frac{a+2}{a})^2-(\frac{a+2}{a})]=\mathrm{e}^{a(-\frac{a+2}{a})}\frac{2(a+2)}{a^2}<0$，符合题意

综上， a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

20.（共 13 分）

解：（Ⅰ）“好位置”有：$(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)$

（Ⅱ）因为对于任意的$i=1,2,3,4,5$，$c(i)\geq 3$；

所以当$a_{i,j}=1$时，$|5-c(i)|\leq 5-3<\frac{5}{2}$，

当$a_{i,j}=0$时，$|5a_{i,j}-c(i)|=c(i)>\frac{5}{2}$；

因此若(i,j)为“好位置”，

则必有$a_{i,j}=1$，且$5-r(j)<\frac{5}{2}$，即$r(j)\geq 3$

设数表中共有$n(n\geq 15)$个1，其中有t列中含1的个数不少于3，

则有$5-t$列中含1的个数不多于2，

所以$5t+2(5-t)\geq n\geq 15$，$t\geq\frac{5}{3}$，

因为t为自然数，所以t的最小值为2

因此该数表中值为1，且相应位置不为“好位置”的数个数最多不超过$3\times 2=6$

所以，该数表好位置的个数不少于$15-6=9$个

而下面的5×5数表显然符合题意

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1

此数表的“好位置”的个数恰好为9

综上所述，该数表的“好位置”的个数的最小值为9

（Ⅲ）当(i,j)为“好位置”时，且$a_{i,j}=1$时，

则有$|m-c(i)|<\frac{m}{2}$，所以$c(i)>\frac{m}{2}$，

注意到m为奇数，$c(i)\in\mathbf{N}^*$，所以有$c(i)\geq\frac{m+1}{2}$

同理得到$r(j)\geq\frac{m+1}{2}$

当(i,j)为“好位置”，且$a_{i,j}=0$时，

则$|m-c(i)|<\frac{m}{2}$，则必有$c(i)<\frac{m}{2}$，

注意到m为奇数，$c(i)\in\mathbf{N}^*$，所以有$c(i)\leq\frac{m-1}{2}$

同理得到$r(j)\leq\frac{m-1}{2}$

因为交换数表的各行，各列，不影响数表中“好位置”的个数，

所以不妨设$c(i)\geq\frac{m+1}{2},0\leq i\leq p,c(i)<\frac{m+1}{2},p+1\leq i\leq m$

$$r(j)\geq\frac{m+1}{2},0\leq j\leq q,r(j)<\frac{m+1}{2},q+1\leq j\leq m$$

其中$0\leq p,q\leq m$，$p,q\in\mathbf{N}$

则数表A可以分成如下四个子表

A_1	A_3
A_2	A_4

其中A_1是p行q列，A_3是p行$m-q$列，A_2是$m-p$行q列，A_4是$m-p$行$m-q$列

设A_1，A_2，A_3，A_4中1的个数分别为x_1,x_2,x_3,x_4

则A_1，A_2，A_3，A_4中0的个数分别为$pq-x_1,q(m-p)-x_2,$

$$p(m-q)-x_3,(m-p)(m-q)-x_4$$

则数表A中好位置的个数为$x_1+(m-p)(m-q)-x_4$个

而 $x_1+x_3\geq p\times\frac{m+1}{2}$， $x_3+x_4\leq(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

所以 $x_1-x_4\geq p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

所以 $x_1+(m-p)(m-q)-x_4\geq x_1-x_4\geq(m-p)(m-q)+p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

而 $(m-p)(m-q)+p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

$=m^2-pm-qm+pq+p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

$=p\times\frac{m-1}{2}-q\times\frac{m+1}{2}+pq+\frac{m^2+m}{2}$

$=(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})-\frac{m^2-1}{4}+\frac{m^2+m}{2}$

$=(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

显然当 $(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})$ 取得最小值时，上式取得最小值，

因为 $0\le p,q\le m$，所以

$(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}\ge(m-\frac{m+1}{2})(0-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

$(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}\ge(0-\frac{m+1}{2})(m-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

当 $p=m$ 时，数表 A 中至少含有 $m\times\frac{m+1}{2}$ 个 1，

而 $m\times\frac{m+1}{2}>m+(m-1)\times\frac{m-1}{2}$，所以 q 至少为 2

此时 $(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

$\ge(m-\frac{m+1}{2})(2-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}=2m-1$

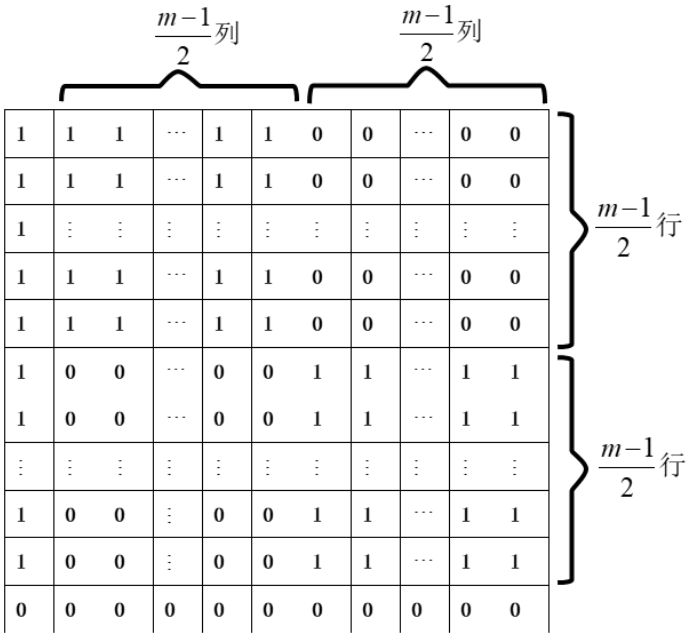
当 $p=m-1$ 时，数表 A 中至少含有 $(m-1)\times\frac{m+1}{2}$ 个 1

而 $(m-1)\times\frac{m+1}{2}>m\times\frac{m-1}{2}$，所以 q 至少为 1

此时 $(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

$$\geq[(m-1)-\frac{m+1}{2}](1-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}=2m-2$$

下面的数表满足条件，其“好位置”的个数为$2m-2$



1	1	1	…	1	1	0	0	…	0	0
1	1	1	…	1	1	0	0	…	0	0
1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	…	1	1	0	0	…	0	0
1	1	1	…	1	1	0	0	…	0	0
1	0	0	…	0	0	1	1	…	1	1
1	0	0	…	0	0	1	1	…	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0	0	⋮	0	0	1	1	…	1	1
1	0	0	⋮	0	0	1	1	…	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0