2019 北京昌平高三二模

数　　学（理）

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

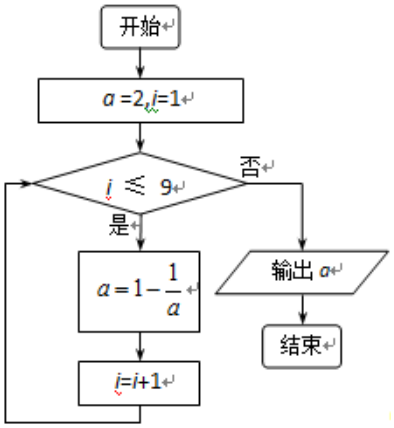
1. 已知全集$U=R$，集合$A=\{x\,|\,x^2\le 1\}$，则$\complement_U A=$

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　C. $(-1,1)$　D. $[-1,1]$

2. 已知复数$z=-1+a(1+\mathrm{i})$（i 为虚数单位，a 为实数）在复平面内对应的点位于第二象限，则复数 z 的虚部可以是

A. $-\frac{1}{2}i$　B. $\frac{1}{2}i$　C. $-\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知某程序框图如图所示，则执行该程序后输出的a的值是



A. -1　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　D. 2

4. 若直线$y=2x$上存在点(x,y)满足$\begin{cases}x+y-3\le 0,\\ x-2y-3\ge 0,\\ x\ge m,\end{cases}$则实数$m$的最大值为

A. -2　B. -1

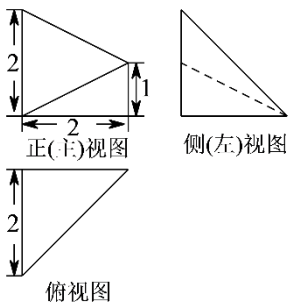
C. 1　D. 3

5. 设$\vec{a},\vec{b}$是非零向量，则“存在实数λ，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$”

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

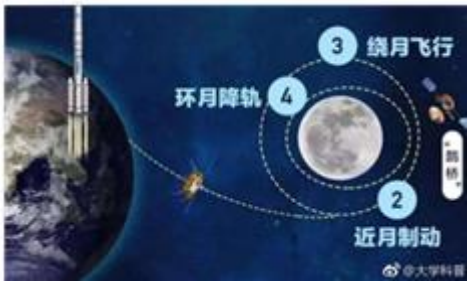
6. 某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为



A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

7. 嫦娥四号月球探测器于 2018 年 12 月 8 日搭载长征三号乙运载火箭在西昌卫星发射中心发射. 12 日下午 4 点 43 分左右，嫦娥四号顺利进入了以月球球心为一个焦点的椭圆形轨道，如图中轨道③所示，其近月点与月球表面距

离为100公里，远月点与月球表面距离为400公里. 已知月球的直径为3476公里，则该椭圆形轨道的离心率约为



A. $\frac{1}{25}$　　B. $\frac{3}{40}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{3}{5}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上　偶函数，且满足 $f(x)=\begin{cases}x^2-\frac{x}{2}(0\le x<1),\\ \frac{x-1}{e^x}(x\ge 1)\end{cases}$，若函数 $F(x)=f(x)-m$ 有 6 个零点，则实数 m 的取值范围是

A. $(-\frac{1}{16},\frac{1}{e^2})$　　B. $(-\frac{1}{16},0)\cup(0,\frac{1}{e^2})$

C. $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$　　D. $[0,\frac{1}{e^2})$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 已知幂函数 $f\left(x\right)$　图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，则 $f(4)$ 的值为_____

10. 在极坐标系中，极点到直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 的距离为_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，三边长分别为 $a=3,b=2\sqrt{2},c=\sqrt{5}$ ，其最大角　余弦值为_____，$\triangle ABC$ 的面积为_____.

12. 2019 年 3 月 2 日，昌平 “回天”地区开展了 7 种不同类型的 “三月雷锋月，回天有我”社会服务活动. 其中有 2 种活动既在上午开展、又在下午开展， 3 种活动只在上午开展，2 种活动只在下午开展 . 小王参加了两种不同的活动，且分别安排在上、下午，那么不同安排方案的种数是_____.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\forall n\in\mathbf{N}^*,a_{n+1}>a_n,S_n\ge S_6$. 请写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$_____.

14. 已知平面内两个定点 $M(3,0)$ 和点 $N(-3,0)$，P 是动点，且直线 PM，PN 的斜率乘积为常数 $a(a\ne 0)$，设点 P 的轨迹为 C.

① 存在常数 $a(a\ne 0)$，使 C 上所有点到两点 $(-4,0),(4,0)$ 距离之和为定值；

② 存在常数 $a(a\ne 0)$，使 C 上所有点到两点 $(0,-4),(0,4)$ 距离之和为定值；

③ 不存在常数 $a(a\ne 0)$，使 C 上所有点到两点 $(-4,0),(4,0)$ 距离差的绝对值为定值；

④ 不存在常数 $a(a\ne 0)$，使 C 上所有点到两点 $(0,-4),(0,4)$ 距离差的绝对值为定值.

其中正确的命题是_____.（填出所有正确命题的序号）

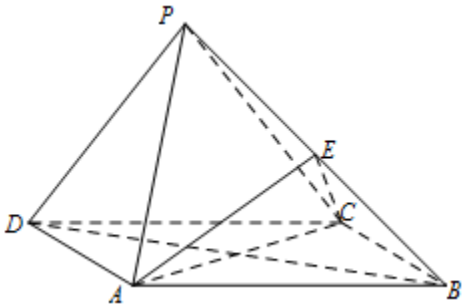
三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. 已知函数 $f(x)=\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}$.

（I）求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值；

（II）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，不等式 $c<f(x)<c+2$ 恒成立，求实数 c 的取值范围．

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2$，$BC=1$，$PC=PD=\sqrt{2}$，E 为 PB 中点．



（Ⅰ）求证：PD // 平面 ACE；

（Ⅱ）求二面角 $E-AC-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）在棱 PD 上是否存在点 M，使得 $AM\perp BD$？若存在，求 $\frac{PM}{PD}$ 的值；若不存在，说明理由．

17. 某学校为了解高一新生的体质健康状况，对学生的体质进行了测试．现从男、女生中各随机抽取 20 人，把他们的测试数据，按照《国家学生体质健康标准》整理如下表．规定：数据≥60，体质健康为合格．

等级	数据范围	男生人数	男生平均分	女生人数	女生平均分
优秀	[90,100]	5	91.3	2	91
良好	[80,89]	4	83.9	4	84.1
及格	[60,79]	8	70	11	70.2
不及格	60 以下	3	49.6	3	49.1
总计	--	20	75.0	20	71.9

(I)从样本中随机选取一名学生，求这名学生体质健康合格的概率；

(II)从男生样本和女生样本中各随机选取一人，求恰有一人的体质健康等级是优秀的概率；

（III）表中优秀、良好、及格、不及格四个等级的男生、女生平均分都接近（二者之差的绝对值不大于1），但男生的总平均分却明显高于女生的总平均分．研究发现，若去掉四个等级中一个等级的数据，则男生、女生的总平均分也接近，请写出去掉的这个等级．（只需写出结论）

18. 已知 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2$.

(I)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a 的值；

(II)若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，求 a 的取值范围.

19. 已知抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 过点 $M(1,-2)$， A,B 是抛物线 G 上异于点 M 的不同两点，且以线段 AB 为直径的圆恒过点 M .

（I）当点 A 与坐标原点 O 重合时，求直线 MB 的方程；

（II）求证：直线 AB 恒过定点，并求出这个定点的坐标.

20. 对于集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$， $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$， $n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{N}^*$， $A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$. 集合 A 中 元素个数记为 $|A|$. 规定：若集合 A 满足 $|A+A|=\frac{n(n+1)}{2}$，则称集合 A 具有性质 T .

（I）已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$， $B=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\}$，写出 $|A+A|$，$|B+B|$ 的值；

（II）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$\{a_n\}$ 为等比数列，$a_n>0$，且公比为 $\frac{2}{3}$，证明： A 具有性质 T；

（III）已知 A,B 均有性质 T，且 $n=m$，求 $|A+B|$ 的最小值.

参考答案

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.

【答案】A

【解析】

【分析】

由题意首先求得集合 A，然后进行补集运算即可.

【详解】$A=\{x\,|\,x^2\le 1\}=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$，

所以，$\complement_U A=\{x\,|\,x<-1或x\ge 1\}$，

表示为区间形式即 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查集合的表示方法，补集的定义与运算等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

2.

【答案】D

【解析】

【分析】

由题意得到关于 a 的不等式组，求解不等式组即可确定复数 z 的虚部.

【详解】$z=-1+a(1+\mathrm{i})=(a-1)+a\mathrm{i}$，对应点为：$(a-1,a)$ 在第二象限，

所以，$\begin{cases}a-1<0\\a>0\end{cases}$

所以复数的虚部 a 的取值范围为：$0<a<1$，

只有 D 符合.

故选：D.

【点睛】本题主要考查复数的运算法则，复数所在象限的确定等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

3.

【答案】A

【解析】

【分析】

由已知中的程序框图可知，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 a 的值，模拟程序的运行过程，即可得到答案

【详解】代入 $a=2$，$i=1<2018$，则 $a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$i=1+1=2$；

再次代入得 $a=-1$，$i=3$；继续代入得 $a=2$，$i=4$；不难发现出现了循环，周期为 3

则当 $i=2018$ 时，$a=-1$，$i=2018+1=2019>2018$，跳出循环得到 $a=-1$

故选 A

【点睛】本题主要考查的是程序框图，在循环结构中找出其循环规律，即可得出结果，较为基础

4.

【答案】B

【解析】

【分析】

首先画出可行域，然后结合交点坐标平移直线即可确定实数 m 的最大值.

【详解】不等式组表示的平面区域如下图所示，

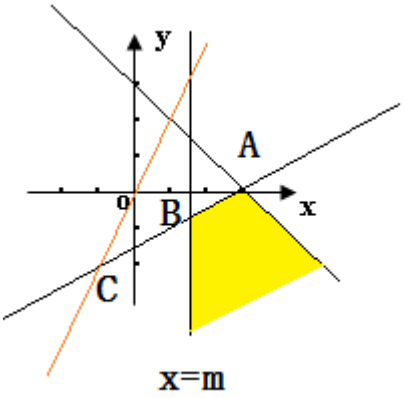
由 $\begin{cases} y=2x \\ x-2y-3=0 \end{cases}$，得：$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$，

即 C 点坐标为（−1，−2），

平移直线 $x=m$，移到 C 点或 C 点的左边时，直线 $y=2x$ 上存在点 (x,y) 在平面区域内，

所以，$m\leqslant -1$，

即实数 m 的最大值为−1.



【点睛】本题主要考查线性规划及其应用，属于中等题.

5.

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意结合向量共线的性质分类讨论充分性和必要性是否成立即可.

【详解】存　实数 λ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，

说明向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共线，当 $\vec{a},\vec{b}$ 同向时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 成立，

当 $\vec{a},\vec{b}$ 反向时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 不成立，所以，充分性不成立.

当 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 成立时，有 $\vec{a},\vec{b}$ 同向，存在实数 λ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 成立，必要性成立，

即“存在实数 λ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$”的必要而不充分条件.

故选：B.

【点睛】本题主要考查向量共线的充分条件与必要条件，向量的运算法则等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

6.

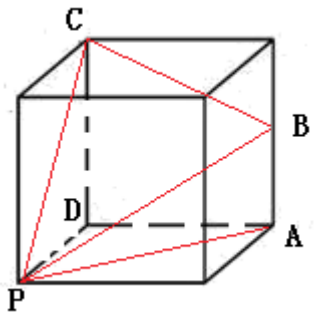
【答案】C

【解析】

【分析】

首先由三视图还原几何体，然后结合几何体的特征可得直角三角形的个数.

【详解】由三视图可得，该四棱锥如下图的 $P-ABCD$，



直角三角形有：$\triangle PAD$、$\triangle PCD$、$\triangle PAB$，共 3 个.

故选：C.

【点睛】本题主要考查三视图还原几何体的方法，棱锥的空间结构特征等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

7.

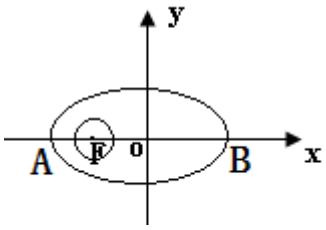
【答案】B

【解析】

【分析】

由题意分别求得 a, c 的值，然后结合离心率的定义可得椭圆离心率的近似值.

【详解】如下图，F为月球的球心，月球半径为：$\frac{1}{2}\times 3476=1738$，



依题意，$|AF|=100+1738=1838$，

$|BF|=400+1738=2138$.

$2a=1838+2138$，

$a=1988$，

$a+c=2138$，

$c=2138-1988=150$，

椭圆的离心率为：$e=\frac{c}{a}=\frac{150}{1988}\approx\frac{3}{40}$，

选 *B*.

【点睛】本题主要考查椭圆的实际应用，椭圆离心率的求解，近似计算的方法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

8.

【答案】C

【解析】

【分析】

将原问题转化为两个函数有六个交点的问题，结合函数的解析式利用导数研究函数图像的变化情况，由函数图像即可确定实数 m 的取值范围.

【详解】函数 $F(x)=f(x)-m$ 有 6 个零点，

等价于函数 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 有 6 个交点，

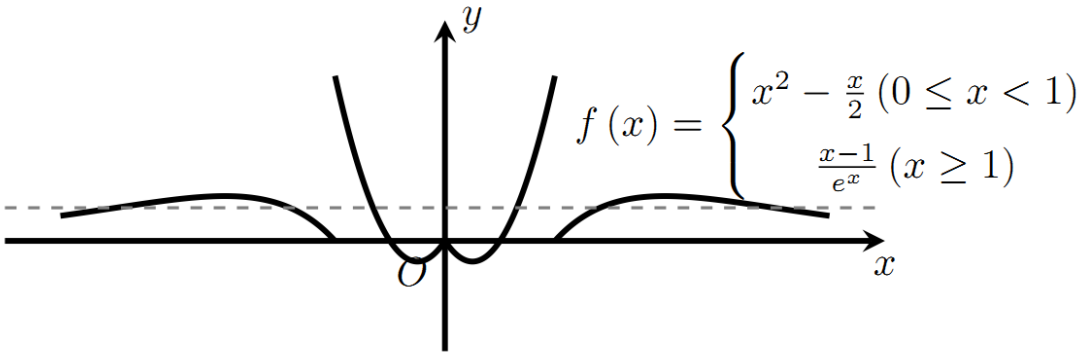
当 $0\le x<1$ 时，$f(x)=x^2-\frac{x}{2}=(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}$，

当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，$f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)$ 递增，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)$ 递减，

$f(x)$ 的极大值为：$f(2)=\frac{1}{e^2}$，

作出函数 $f(x)$ 的图象如下图，



$y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象有 6 个交点，须 $0<m<\frac{1}{e^2}$，表示为区间形式即 $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$.

故选：*C*.

【点睛】本题主要考查导函数研究函数图像的性质，数形结合的数学思想，等价转化的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.

【答案】2

【解析】

设 $f(x)=x^{\alpha}$，$f(2)=2^{\alpha}=\sqrt{2},\alpha=\frac{1}{2}$，故 $f(4)=4^{\frac{1}{2}}=2$.

10.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

首先将极坐标化为直角坐标，然后利用点到直线距离公式可得距离.

【详解】极坐标方程化为直线方程即：$x+y-2=0$，

极点坐标即（0,0），所以距离为：$\frac{|0+0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查极坐标与直角坐标的互化，点到直线距离公式等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

11.

【答案】　(1). $\frac{\sqrt{10}}{10}$　(2). 3

【解析】

【分析】

利用余弦定理可得最大角的余弦值，然后结合同角三角函数基本关系和面积公式可得三角形的面积.

【详解】大边对大角可知，A 最大，

所以，$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8+5-9}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$；

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=3$.

【点睛】本题主要考查余弦定理的应用，三角形 面积公式的应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

12.

【答案】18

【解析】

【分析】

由题意利用分类加法计数原理和排列组合相关结论可得不同安排方案的种数.

【详解】小王参加的是两种不同的活动，有2种活动既在上午开展、又在下午开展，

（1）设小王没参加既在上午开展、又在下午开展的2种活动，则有：$C_3^1\times C_2^1=6$ 种方案；

（2）设小王参加了既在上午开展、又在下午开展的2种活动，

（a）上午参加了既在上午开展、又在下午开展的 2 种活动之一，则有：$C_2^1\times C_2^1=4$ 种方案；

（b）下午参加了既在上午开展、又在下午开展的 2 种活动之一，则有：$C_3^1\times C_2^1=6$ 种方案；

（c）上下午都参加了既在上午开展、又在下午开展的 2 种活动，则有：$C_2^1\times C_1^1=2$ 种方案；

所以，不同的安排方案有：6＋4＋6＋2＝18 种.

【点睛】本题主要考查分类加法计数原理，分步乘法计数原理等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

13.

【答案】$n-6(n\in\mathbf{N}^*)$（答案不唯一）

【解析】

【分析】

首先由题意确定数列的特征，然后结合数列的特征给出满足题意的数列的通项公式即可.

【详解】$\forall n\in\mathbf{N}^*,a_{n+1}>a_n$，则数列$\{a_n\}$是递增的，

$\forall n\in\mathbf{N}^*,S_n\geq S_6$，即$S_6$最小，

只要前 6 项均为负数，或前 5 项为负数，第 6 项为 0，即可，

所以，满足条件的数列$\{a_n\}$的一个通项公式$a_n=n-6(n\in\mathbf{N}^*)$（答案不唯一）

【点睛】本题主要考查数列前 n 项和的性质，数列的通项公式的确定等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

14.

【答案】②④

【解析】

【分析】

由题意首先求得点 P 的轨迹方程，然后结合双曲线方程的性质和椭圆方程的性质考查所给的说法是否正确即可.

【详解】设点 P 的坐标为：P（x，y），

依题意，有：$\frac{y}{x+3}\times\frac{y}{x-3}=a$，

整理，得：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9a}=1$，

对于①，点的轨迹为焦点在 x 轴上的椭圆，且 c＝4，a＜0，

椭圆在 x 轴上两顶点的距离为：$2\sqrt{9}$＝6，焦点为：2×4＝8，不符；

对于②，点的轨迹为焦点在 y 轴上的椭圆，且 c＝4，

椭圆方程为：$\frac{y^2}{-9a}+\frac{x^2}{9}=1$，则$-9a-9=16$，解得：$a=-\frac{25}{9}$，符合；

对于③，当$a=\frac{7}{9}$时，$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$，所以，存在满足题意的实数 a，③错误；

对于④，点的轨迹为焦点在 y 轴上的双曲线，即$\frac{y^2}{-9a}+\frac{x^2}{9}=1$，

不可能成为焦点在 y 轴上的双曲线，

所以，不存在满足题意的实数 a，正确.

所以，正确命题的序号是②④.

【点睛】本题主要考查轨迹方程的求解，双曲线方程的性质，椭圆方程的性质等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.

【答案】（I）1 ；　（II）$(-1,-\frac{1}{2})$.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）首先整理函数的解析式，然后结合函数的解析式求解函数值即可；

（Ⅱ）首先求得函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域，然后结合恒成立的结论得到关于 c 的不等式组，求解不等式组可得 c 的取值范围.

【详解】（I） $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,

所以 $f(\frac{\pi}{3})=1$.

（II）因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$. 所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$.

由不等式 $c<f(x)<c+2$ 恒成立，　所以 $\begin{cases}c<-\frac{1}{2},\\ c+2>1\end{cases}$，解得　$-1<c<-\frac{1}{2}$.

所以实数 c　取值范围为 $(-1,-\frac{1}{2})$.

【点睛】本题主要考查三角函数的性质及其应用，恒成立问题的处理方法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

16.

【答案】（I）见解析；　（II）$-\frac{\sqrt{6}}{6}$；　（III）答案见解析 .

【解析】

【分析】

（Ⅰ）由题意结合三角形中位线的性质和线面平行的判定定理即可证得题中的结论；

（Ⅱ）由题意建立空间直角坐标系，求得半平面的法向量，然后结合法向量可得二面角的余弦值；

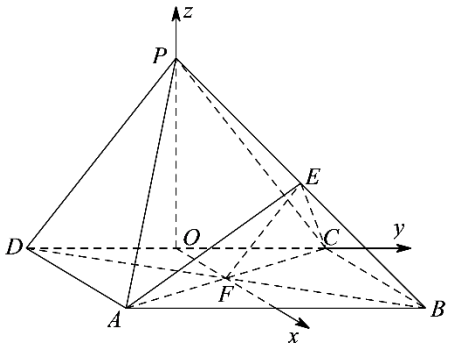
(III)假设存在满足题意的点 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，由题意结合点的坐标和向量垂直的充分必要条件得到关于 λ 的方程，解方程即可确定 λ 的值.

【详解】（*I*）设 BD 交 AC 于点 F，连结 EF.

因为底面 $ABCD$ 是矩形, 所以 F 为 BD 中点 .

又因为 E 为 PB 中点 ， 所以 EF // PD.

因为 $PD \not\subset$ 平面 $ACE, EF \subset$ 平面 ACE , 所以 PD // 平面 ACE .



（*II*）取 CD 的中点 O，连结 PO， FO.

因为底面 $ABCD$ 为矩形, 所以 $BC \perp CD$.

因为 $PC = PD$， O为CD中点,

所以 $PO \perp CD, OF$ // BC，所以 $OF \perp CD$.

又因为平面 PCD⊥平面 $ABCD$, $PO \subset$ 平面 PCD, 平面 PCD∩平面 $ABCD$=CD.

所以 PO⊥平面 $ABCD$,

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 则 $A(1,-1,0)$， $C(0,1,0), B(1,1,0), P(0,0,1), E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{AC}=(-1,2,0), \overrightarrow{AE}=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+2y=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y,\\ z=-y.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=2, z=-1$，所以 $\vec{m}=(2,1,-1)$.

平面 ACD 的法向量为 $\overrightarrow{OP}=(0,0,1)$，则 $\cos<\vec{m},\overrightarrow{OP}>=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

如图可知二面角 $E-AC-D$ 为钝角，所以二面角 $E-AC-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

（Ⅲ）在棱 PD 上存在点 M， 使 $AM \perp BD$.

设 $\frac{PM}{PD}=\lambda(\lambda\in[0,1]), M(x,y,z)$, 则 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}, D(0,-1,0)$.

因为 $(x,y,z-1)=\lambda(0,-1,-1)$, 所以 $M(0,-\lambda,1-\lambda)$.

$\overrightarrow{AM}=(-1,1-\lambda,1-\lambda), \overrightarrow{BD}=(-1,-2,0)$.

因为 $AM \perp BD$, 所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

所以$1-2(1-\lambda)=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$.

所以在棱PD上存在点M，使$AM\perp BD$，且$\frac{PM}{PD}=\frac{1}{2}$.

【点睛】本题主要考查线面平行的判定定理，面面角的向量求法，立体几何中的探索性问题等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

17.

【答案】（I）$\frac{17}{20}$；　（II）$\frac{3}{10}$；（III）去掉的等级为优秀.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）首先确定合格人数和总人数，然后利用古典概型计算公式可得体质健康合格的概率；

（Ⅱ）首先确定从男生、女生样本中随机选出的人的体质健康等级是优秀的概率，然后结合独立性事件概率公式可得满足题意的概率值；

(III)结合表格给出所需去掉的等级即可.

【详解】（*I*）样本中合格的学生数为：$5+2+4+4+8+11=34$，样本总数为：$20+20=40$，

这名学生体质健康合格的概率为$\frac{34}{40}=\frac{17}{20}$.

（*II*）设事件A为“从男生样本中随机选出的人的体质健康等级是优秀”，　$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

事件B为“从女生样本中随机选出的人的体质健康等级是优秀”，$P(B)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

因为A,B为独立事件，

故所求概率为$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$.

（*III*）去掉的等级为优秀.

【点睛】本题主要考查古典概型概率公式，独立事件概率公式及其应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

18.

【答案】（I）e；　（II）$(1,+\infty)$.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）由题意利用导函数与原函数切线的关系可得关于 *a* 的方程，解方程即可求得实数 *a* 的值.

（Ⅱ）首先求得导函数的解析式，然后分类讨论即可确定实数 *a* 的取值范围.

【详解】(*I*)因为$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}ax^2$，$f(x)$　定义域为$(-\infty,+\infty)$，

所以$f'(x)=x\mathrm{e}^x-ax$，　$f'(1)=\mathrm{e}-a$.

由题设知 $f'(1)=0$，即 $\mathrm{e}-a=0$, 解得 $a=e$.

此时 $f(1)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\neq 0$，所以 a 的值为 e.

（*II*）由(*I*)得 $f'(x)=x\mathrm{e}^x-ax=x(\mathrm{e}^x-a)$.

① 若 $a>1$，则当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$x<0,\mathrm{e}^x<1,\mathrm{e}^x-a<0$, 所以 $f'(x)>0$；

当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$x>0,\mathrm{e}^x-a<\mathrm{e}^{\ln a}-a=0$, 所以 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

② 若 $a\leq 1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$x>0$，$\mathrm{e}^x-a\geq \mathrm{e}^x-1>0$，所以 $f'(x)>0$.

所以0不是 f（x)的极大值点.

综上可知，a 的取值范围是（1，+∞）.

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系．(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数．(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题．(4)考查数形结合思想的应用.

19.

【答案】（Ⅰ）$x-2y-5=0$；（II）答案见解析.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)首先求得抛物线的方程，然后求得 AO 的斜率，最后利用直线垂直的充分必要条件可得直线 MB 的方程；

(Ⅱ)联立直线方程与抛物线方程，结合韦达定理得到系数之间的关系，然后结合直线方程的形式即可证得直线恒过定点.

【详解】（*I*）因为 $M(1,-2)$ 在抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 上，所以 $(-2)^2=2p\times 1$，

所以 $p=2$，抛物线 $G:y^2=4x$.

当点 A 与点 O 重合时，易知 $k_{AM}=-2$，

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $AM\perp MB$. 所以 $k_{BM}=\dfrac{1}{2}$.

所以 $MB:y+2=\dfrac{1}{2}(x-1)$, 即直线 MB 的方程为 $x-2y-5=0$.

（*II*）显然直线 AB 与 x 轴不平行，设直线 AB 方程 $x=my+n$.

$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=4x\end{cases}$，消去 x 得 $y^2-4my-4n=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，因为直线 AB 与抛物线交于两点，

所以 $\Delta=16m^2+16n>0, y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4n$ ①

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $AM\perp MB$.

因为A,B是抛物线上异于M的不同两点,所以$x_1,x_2\neq 1$,$k_{MA}\cdot k_{MB}=-1$.

$k_{MA}=\dfrac{y_1+2}{x_1-1}=\dfrac{y_1+2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1-2}$,同理得$k_{MB}=\dfrac{y_2+2}{x_2-1}=\dfrac{y_2+2}{\frac{y_2^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_2-2}$.

所以$\dfrac{4}{y_1-2}\cdot\dfrac{4}{y_2-2}=-1$,即$(y_1-2)(y_2-2)+16=0$,$y_1y_2-2(y_1+y_2)+20=0$.

将①代入得，$-4n-8m+20=0$，即$n=-2m+5$.

代入直线方程得$x=my-2m+5=m(y-2)+5$.

所以直线AB恒过定点$(5,2)$

【点睛】(1)直线与抛物线的位置关系和直线与椭圆、双曲线的位置关系类似，一般要用到根与系数的关系；

(2)有关直线与抛物线的弦长问题，要注意直线是否过抛物线的焦点，若过抛物线的焦点，可直接使用公式$|AB|=x_1+x_2+p$，若不过焦点，则必须用一般弦长公式.

20.

【答案】（I）$|A+A|=7;|B+B|=10.$；　（II）见解析；　（III）$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)分别求得$A+A$，$B+B$，然后可得$|A+A|$，$|B+B|$的值；

(Ⅱ)将原问题进行等价变形，然后利用反证法证明题中的结论即可；

(Ⅲ)原问题等价于任意两个元素之和均不相同，且任意两个不同元素之差的绝对值均不相同.据此整理计算即可确定$|A+B|$的最小值.

【详解】（*I*）由题意可得：$A+A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$，$B+B=\left\{\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{3},3,\dfrac{4}{3},2,\dfrac{10}{3},\dfrac{8}{3},4,\dfrac{16}{3}\right\}$,

故$|A+A|=7;|B+B|=10.$

（*II*）要证A具有性质T，只需证明，若$n_1<n_2\le n_3<n_4$，则$a_{n_1}+a_{n_4}\neq a_{n_2}+a_{n_3}$.

假设上式结论不成立，即若$n_1<n_2\le n_3<n_4$，则$a_{n_1}+a_{n_4}=a_{n_2}+a_{n_3}$.

即$q^{n_1}+q^{n_4}=q^{n_2}+q^{n_3}$，即$q^{n_4-n_1}=q^{n_2-n_1}+q^{n_3-n_1}-1$，

$(\dfrac{2}{3})^{n_4-n_1}=(\dfrac{2}{3})^{n_2-n_1}+(\dfrac{2}{3})^{n_3-n_1}-1$，$2^{n_4-n_1}=2^{n_2-n_1}\times 3^{n_4-n_2}+2^{n_3-n_1}\times 3^{n_4-n_3}-3^{n_4-n_1}$.

因为上式的右边为3的倍数，而上式的左边为2的倍数，所以上式不成立.

故假设不成立，原命题成立.

（*III*）由题意，集合A具有性质T，等价于任意两个元素之和均不相同.

如，对于任意的$a<b\le c<d$，有$a+d\neq b+c$，

等价于$d-c\neq b-a$，即任意两个不同元素之差的绝对值均不相同.

令$A^*=\{x-y\,|\,x\in A,y\in A,x>y\}$，

所以 A 具有性质 $T \Leftrightarrow |A+A|=\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow |A^*|=\frac{n(n-1)}{2}$.

因为集合 A,B 均有性质 T，且 $n=m$，

所以 $|A+B|=n^2-|A^* \bigcap B^*| \geq n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$，当且仅当 $A=B$ 时等号成立.

所以 $|A+B|$ 的最小值为 $\frac{n(n+1)}{2}$.

【点睛】“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解. 但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.