2019 北京东城高三二模

数　　学（理）

2019.5

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

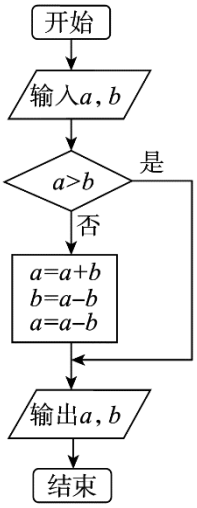
第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}, B=\{x\,|\,x^2-x-2\le 0\}$，则 $A\cap \complement_{\mathbf{R}} B=$

(A) $\{-2\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{-2,-1,2\}$　　(D) $\{-1,0,1,2\}$

（2）执行如图所示的程序框图，输入 $a=2, b=5$，那么输出的 a,b 的值分别为



（A）7，−3　　（B）−3，−3

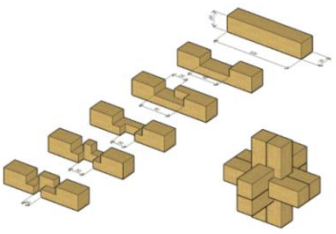
（C）5，−3　　（D）5，2

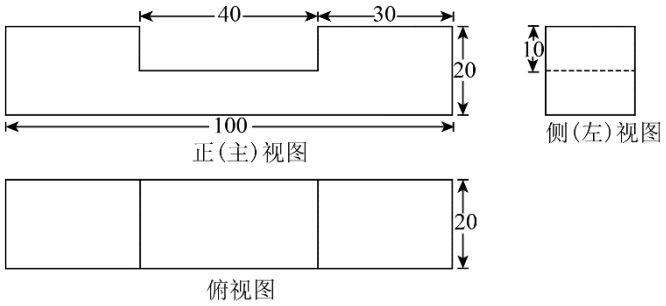
（3）已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}\ (m\neq 1)$，$\overrightarrow{AC}=n\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 若 A,B,C 三点共线，则实数 m,n 满足的条件为

(A) $m+n=1$　　(B) $m+n=-1$

(C) $mn=1$　　(D) $mn=-1$

（4）鲁班锁起源于中国古代建筑中首创的榫卯结构，相传由春秋时代鲁国工匠鲁班所作. 右图是某个经典的六柱鲁班锁及其六个构件的图片，下图是其中一个构件的三视图（单位：mm），则此构件的体积为





（A）34000mm^3　　（B）33000mm^3　　（C）32000mm^3　　（D）30000mm^3

（5）已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“$S_n>na_n$ 对 $n\ge 2$ 恒成立”是“$a_3>a_4$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

（6）教室的图书角摆放了一些阅读书目，其中有 3 本相同的论语、6 本互不相同的近代文学名著，现从这 9 本书中选出 3 本，则不同的选法种数为

(A) 84　　(B) 42　　(C) 41　　(D) 35

（7）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P 是底面 $ABCD$ 上的动点，$PA \geqslant PC_1$，则满足条件的点 P 构成的图形的面积等于

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $4-\frac{\pi}{4}$　　(D) $\frac{7}{2}$

（8）在交通工程学中，常作如下定义：

交通流量 Q（辆/小时）：单位时间内通过某一道路横断面的车辆数；

车流速度 V（千米/小时）：单位时间内车流平均行驶的距离；

车流密度 K（辆/千米）：单位长度道路上某一瞬间所存在的车辆数.

一般的，V 和 K 满足一个线性关系：$V=v_0(1-\frac{K}{k_0})$（其中 v_0, k_0 是正数），则以下说法正确的是

(A) 随着车流密度的增大，车流速度在逐渐增大

(B) 随着车流密度的增大，交通流量在逐渐增大

(C) 随着车流速度的增大，交通流量先减小、后增大

(D) 随着车流速度的增大，交通流量先增大、后减小

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知复数 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点为 Z，则 Z 关于虚轴对称的点位于第_____象限.

（10）已知 $a=\log_2 6$，$b=\log_5 15$，若 $a>\log_3 m>b$，$m\in\mathbf{N}^*$，则满足条件的 m 可以为_____.

（11）椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与曲线 C_2 关于直线 $y=-x$ 对称，C_1 与 C_2 分别在第一、二、三、四象限交于点 P_1,P_2,P_3,P_4. 若四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积为 4，则点 P_1 的坐标为_____，C_1 的离心率为_____.

（12）将函数 $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则 $g(\frac{5}{6}\pi)$=____.

（13）设关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases} x\leq 0, \\ 2x+y\geq 0, \\ mx-y+1\geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为钝角三角形及其内部，则 m 的取值范围是_____.

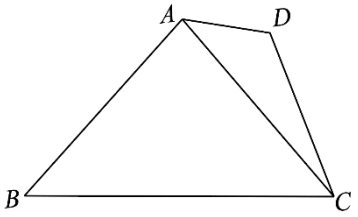
（14）已知函数 $f(x)$，，对于任意实数 $x\in[a,b]$，当 $a\le x_0\le b$ 时，记 $|f(x)-f(x_0)|$ 的最大值为 $D_{[a,b]}(x_0)$.

①若 $f(x)=(x-1)^2$，则 $D_{[0,3]}(2)=$_____；

②若 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, & x\le 0,\\ 2-|x-1|, & x>0,\end{cases}$ 则 $D_{[a,a+2]}(-1)$ 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）



如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AC=\sqrt{7}$，$CD=2AD$，$\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$.

（Ⅰ）求 $\angle CAD$ 的正弦值；

（Ⅱ）若 $\angle BAC=2\angle CAD$，且△ ABC 的面积是△ ACD 面积的 4 倍，求 AB 的长.

（16）（本小题 13 分）

某工厂的机器上有一种易损元件 A，这种元件在使用过程中发生损坏时，需要送维修处维修. 工厂规定当日损坏的元件 A 在次日早上 8：30 之前送到维修处，并要求维修人员当日必须完成所有损坏元件 A 的维修工作. 每个工人独立维修 A 元件需要时间相同. 维修处记录了某月从 1 日到 20 日每天维修元件 A 的个数，具体数据如下表：

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	10 日
元件 A 个数	9	15	12	18	12	18	9	9	24	12

日期	11 日	12 日	13 日	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
元件 A 个数	12	24	15	15	15	12	15	15	15	24

从这 20 天中随机选取一天，随机变量 X 表示在维修处该天元件 A 的维修个数.

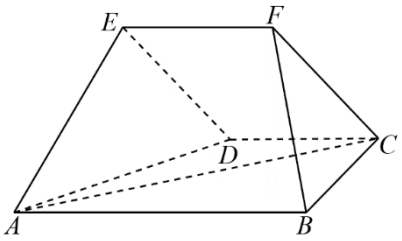
（Ⅰ）求 X 的分布列与数学期望；

（Ⅱ）若 $a,b\in\mathbf{N}^*$，且 $b-a=6$，求 $P(a\le X\le b)$ 最大值；

（Ⅲ）目前维修处有两名工人从事维修工作，为使每个维修工人每天维修元件 A 的个数的数学期望不超过 4 个，至少需要增加几名维修工人？（只需写出结论）

（17）（本小题 14 分）

如图，四边形 $ABCD$ 和三角形 ADE 所在平面互相垂直，$AB \parallel CD$，$AB \perp BC$，$\angle DAB = 60^\circ$，$AB = AD = 4$，$AE \perp DE$，$AE = DE$，平面 ABE 与平面 CDE 交于 EF．



（Ⅰ）求证：$CD \parallel EF$；

（Ⅱ）若 $EF = CD$，求二面角 $A\text{-}BC\text{-}F$ 余弦值；

（Ⅲ）在线段 BC 上是否存在点 M 使得 $AM \perp EM$？若存在，求 BM 的长；

若不存在，说明理由.

（18）（本小题 13 分）

已知点 $P(1,2)$ 到抛物线 $C: y^2 = 2px(p > 0)$ 准线的距离为 2.

（Ⅰ）求 C 的方程及焦点 F 的坐标；

（Ⅱ）设点 P 关于原点 O 的对称点为点 Q，过点 Q 作不经过点 O 的直线与 C 交于两点 A, B，直线 PA, PB 分别交 x 轴于 M, N 两点. 求 $|MF| \cdot |NF|$ 的值.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x) = x + \sin x$.

（Ⅰ）求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若不等式 $f(x) \geq ax\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

（20）（本小题 13 分）

若 n 行 n 列的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $(n \geq 2)$ 满足：$a_{ij} \in \{0,1\}$ $(i,\ j = 1,2,\cdots,\ n)$，$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = m$ $(i = 1,2,\cdots,\ n, 0 < m < n)$，$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik} - a_{jk}| > 0$ $(i, j = 1,2,\cdots,n, i \neq j)$，记这样的一个数表为 $A_n(m)$. 对于 $A_n(m)$, 记集合 $T(n,m) = \left\{ \sigma_{ij} \middle| \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk},\ 1 \leq i < j \leq n,\ i, j \in \mathbf{N}^* \right\}$. $|T(n,m)|$ 表示集合 $T(n,m)$ 中元素的个数.

（Ⅰ）已知 $A_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 写出 $\sigma_{ij}(1 \leq i < j \leq 3,\ i, j \in \mathbf{N}^*)$ 的值;

（Ⅱ）是否存在数表 $A_4(2)$ 满足 $|T(4,2)| = 1$? 若存在，求出 $A_4(2)$，若不存在，说明理由;

（Ⅲ）对于数表 $A_n(m)(0 < m < n, m \in \mathbf{N}^*)$，求证：$|T(n,m)| \leqslant \frac{n}{2}$.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A　　（2）D　　（3）C　　（4）C

（5）C　　（6）B　　（7）A　　（8）D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）四　　（10）9（答案不唯一）

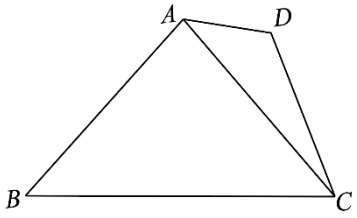
（11）$(1,1)$　$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　（12）$-\sqrt{3}$

（13）$(-2,0)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$　　（14）3　$[1,4]$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在△ACD 中，设 $AD=x(x>0)$，



由余弦定理得 $7=x^2+4x^2-2x\times 2x\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$，

整理得 $7x^2=7$，解得 $x=1$.

所以 $AD=1, CD=2.$

由正弦定理得 $\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\frac{2}{3}\pi}$，解得

$\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{21}}{7}.$　　……6 分

（Ⅱ）由已知得 $S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta ACD}$，

所以 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=4\times\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD$，

化简得 $AB\cdot\sin\angle BAC=4AD\cdot\sin\angle CAD.$

所以 $AB\cdot 2\sin\angle CAD\cdot\cos\angle CAD=4AD\cdot\sin\angle CAD,$

于是 $AB\cdot\cos\angle CAD=2AD.$

因为$\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$，且$\angle CAD$为锐角，

所以$\cos\angle CAD=\sqrt{1-\sin^2\angle CAD}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

因此$AB=\sqrt{7}$. ……13 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由题意可知，X的所有可能取值为 $9,12,15,18,24$，

且$P(X=9)=\frac{3}{20}$；$P(X=12)=\frac{5}{20}$；$P(X=15)=\frac{7}{20}$；

$P(X=18)=\frac{2}{20}$；$P(X=24)=\frac{3}{20}$.

所以 X 的分布列为：

X	9	12	15	18	24
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$

故 X 的数学期望$E(X)=9\times\frac{3}{20}+12\times\frac{5}{20}+15\times\frac{7}{20}+18\times\frac{2}{20}+24\times\frac{3}{20}=15$……5 分

（Ⅱ）当$P(a\le X\le b)$取到最大值时，

a,b的只可能为：$\begin{cases}a=9,\\b=15,\end{cases}$或$\begin{cases}a=12,\\b=18,\end{cases}$或$\begin{cases}a=18,\\b=24.\end{cases}$

经计算$P(9\le X\le 15)=\frac{15}{20}$，$P(12\le X\le 18)=\frac{14}{20}$，$P(18\le X\le 24)=\frac{5}{20}$，

所以$P(a\le X\le b)$的最大值为$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. ……10 分

（Ⅲ）至少增加 2 人 ……13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）在四边形 $ABCD$ 中，$AB\ //\ CD$.

因为 $AB\subset$ 平面 ABE，$CD\not\subset$ 平面 ABE，

所以 $CD\ //$ 平面 ABE.

因为 $CD\subset$ 平面 CDE，且平面 $ABE\cap$ 平面 $CDE=EF$，

所以 $CD\ //\ EF$. ……4 分

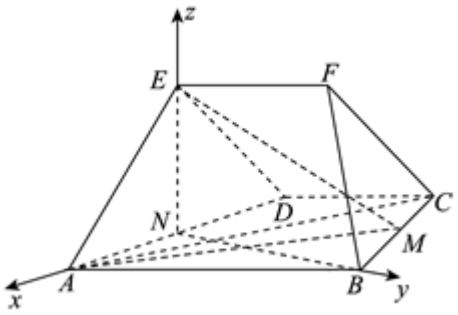
（Ⅱ）如图，取 AD 的中点 N，连接 BN，EN. 在等腰△ ADE 中，$EN\perp AN$.

因为平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$，交线为 AD，

又 $EN \perp AD$，所以 $EN \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $EN \perp BN$.

由题意易得 $AN \perp BN$.



如图建立空间直角坐标系 $N-xyz$，

则 $N(0,0,0)$, $A(2,0,0)$， $B(0,2\sqrt{3},0)$，

$C(-3,\sqrt{3},0)$，

$D(-2,0,0)$， $E(0,0,2)$.

因为 $EF=CD$，所以 $F(-1,\sqrt{3},2)$.

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{BF}=(-1,-\sqrt{3},2)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,-\sqrt{3},0)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x-\sqrt{3}y+2z=0,\\ -3x-\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=-1, z=1$.

于是 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$.

又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{NE}=(0,0,2)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{NE}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NE}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{NE}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

由题知二面角 *A-BC-F* 为锐角，

所以二面角 *A-BC-F* 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……9分

（Ⅲ）不存在满足条件的点 M，使 $AM \perp EM$，理由如下：

若 $AM \perp EM$，则 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

因为点 M 为线段 BC 上的动点，设 $\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CB}(0\le t\le 1)$,， $M(u,v,0)$.

则 $(u+3, v-\sqrt{3}, 0)=t(3, \sqrt{3}, 0)$，

解得 $M(3t-3, \sqrt{3}+\sqrt{3}t, 0)$.

所以 $\overrightarrow{EM}=(3t-3, \sqrt{3}+\sqrt{3}t, -2)$， $\overrightarrow{AM}=(3t-5, \sqrt{3}+\sqrt{3}t, 0)$.

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{AM}=(3t-3, \sqrt{3}+\sqrt{3}t, -2)\cdot(3t-5, \sqrt{3}+\sqrt{3}t, 0)=0$.

整理得 $2t^2-3t+3=0$，此方程无实根.

所以线段 BC 上不存在点 M，使 $AM \perp EM$. ..... 14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由已知得 $1+\frac{p}{2}=2$，所以 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，焦点 F 的坐标为 $(1,0)$. ..... 4 分

（II）设点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，由已知得 $Q(-1,-2)$，

由题意直线 AB 斜率存在且不为 0.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)-2(k\neq 0)$.

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=k(x+1)-2 \end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4k-8=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{4}{k}, y_1y_2=4-\frac{8}{k}$.

因为点 A, B 在抛物线 C 上，所以 $y_1^2=4x_1$， $y_2^2=4x_2$，

$k_{PA}=\frac{y_1-2}{x_1-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{4}{y_1+2}$， $k_{PB}=\frac{y_2-2}{x_2-1}=\frac{4}{y_2+2}$.

因为 $PF \perp x$ 轴，

所以 $|MF|\cdot|NF|=\frac{|PF|}{|k_{PA}|}\cdot\frac{|PF|}{|k_{PB}|}=\frac{4}{|k_{PA}\cdot k_{PB}|}=\frac{|(y_1+2)(y_2+2)|}{4}$

$$= \frac{|y_1y_2 + 2(y_1 + y_2) + 4|}{4} = \frac{\left|4 - \frac{8}{k} + \frac{8}{k} + 4\right|}{4} = 2.$$

所以$|MF| \cdot |NF|$的值为

2. .....13 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x) = x + \sin x$，

所以 $f'(x) = 1 + \cos x$， $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$， $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 1$，

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为

$y = x + 1.$ .....5 分

（Ⅱ）因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$，所以 $\sin x \geq 0$， $\cos x \geq 0$，

当 $a \leq 0$ 时， $f(x) = x + \sin x \geq 0$ 恒成立， $ax\cos x \leq 0$ 恒成立，

所以不等式 $f(x) \geq ax\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立.

当 $a > 0$ 时，设 $g(x) = f(x) - ax\cos x = x + \sin x - ax\cos x$，

$g'(x) = 1 + \cos x - a\cos x + ax\sin x = 1 + (1 - a)\cos x + ax\sin x$，

若 $0 < a \leq 1$， $(1 - a)\cos x \geq 0$， $ax\sin x \geq 0$，

所以 $g'(x) > 0$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立；

若 $1 < a \leq 2$， $-1 \leq 1 - a < 0$， $1 + (1 - a)\cos x \geq 0$， $ax\sin x \geq 0$，

所以 $g'(x) > 0$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立；

所以 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增， $g(x)_{\min} = g(0) = 0,$

所以当 $a \leq 2$ 时，不等式 $f(x) \geq ax\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立；

当 $a > 2$ 时，令 $h(x) = g'(x) = 1 + (1 - a)\cos x + ax\sin x$，

$h'(x)=(2a-1)\sin x+ax\cos x$，$h'(x)>0$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上恒成立，

所以 $g'(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增，$g'(x)_{\min}=g'(0)=2-a<0$，$g'(x)_{\max}=g'(\frac{\pi}{2})=1+\frac{a\pi}{2}>0$，

所以存在 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使得 $g'(x_0)=0$.

当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x_0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x=x_0$ 时，$g'(x)=0$，$g(x)$ 取得极小值；

而 $g(0)=0$，所以 $g(x_0)<0$，所以不等式 $g(x)\geq 0$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上不能恒成立，

所以不等式 $f(x)\geq ax\cos x$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上恒成立时实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. . . . . 14 分

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）

$\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=1$. . . . . 3 分

（Ⅱ）不存在数表 $A_4(2)$，使得 $|T(4,2)|=1$. 理由如下：

假设存在 $A_4(2)$，使得 $|T(4,2)|=1$. 不妨设 $A_4(2)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$，

σ_{ij} 的可能值为 0,1.

当 $\sigma_{ij}=0(1\leq i<j\leq 4)$ 时，经验证这样的 $A_4(2)$ 不存在.

当 $\sigma_{ij}=1(1\leq i<j\leq 4)$ 时，有 $\begin{cases}a_{21}+a_{22}=1\\a_{31}+a_{32}=1\\a_{41}+a_{42}=1\end{cases}$，这说明此方程组至少有两个方程的解相同，

不妨设 $A_4(2)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&a_{23}&a_{24}\\0&1&a_{33}&a_{34}\\1&0&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$，所以有 $\begin{cases}a_{23}+a_{24}=1\\a_{33}+a_{34}=1\\a_{43}+a_{44}=1\end{cases}$，

这也说明此方程组至少有两个方程的解相同，

这样的 $A_4(2)$ 只能为 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$，

这两种情况都与 $|T(4,2)|=1$ 矛盾. ..... 8 分

（Ⅲ） 在数表 $A_n(m)$ 中，将 σ_{ij} 换成 $1-\sigma_{ij}$，这将形成 $A_n(n-m)$，

由于 $\sigma_{ij}=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}$，可得

$(1-a_{i1})(1-a_{j1})+(1-a_{i2})(1-a_{j2})+\cdots+(1-a_{in})(1-a_{jn})=n-m-m+\sigma_{ij}$,

从而 $|T(n，\ m)|=|T(n，\ n-m)|$.

当 $m\le\frac{n}{2}$ 时，由于 $\sum_{t=1}^{n}|a_{it}-a_{jt}|>0(0\le i<j\le n，\ i，\ j\in \mathrm{N}^*)$，

所以任两行相同位置的 1 的个数 $\le\frac{n}{2}-1$.

又由于 $\sigma_{ij}\ge 0$，而从 1 到 $\frac{n}{2}-1$ 的整数个数 $\le\frac{n}{2}$，从而 $|T(n，\ m)|\le\frac{n}{2}$.

从而当 $0<m<n$ 时，都有 $|T(n,m)|\le\frac{n}{2}$. ..... 13 分