2018 北京西城高三二模

数　　学（理）

2018.5

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．若集合 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x<0\}$，则下列结论中正确的是

（A）$A\cap B=\varnothing$　　（B）$A\cup B=\mathbf{R}$

（C）$A\subseteq B$　　（D）$B\subseteq A$

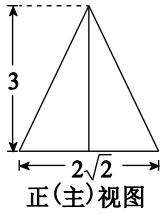
2．若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=1$，则 $z=$

（A）$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$　　（C）$-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$　　（D）$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$

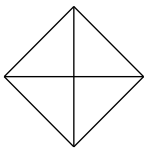
3．下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递减的是

（A）$y=\frac{1}{x}$　　（B）$y=x^2$　　（C）$y=2^{|x|}$　　（D）$y=\cos x$

4．某正四棱锥的正（主）视图和俯视图如图所示，该正四棱锥的侧面积是



正（主）视图


俯视图

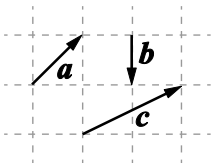
（A）12

（B）$4\sqrt{10}$

（C）$12\sqrt{2}$

（D）$8\sqrt{5}$

5．向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则实数 $\lambda=$



（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

6．已知点 $A(0,0)$，$B(2,0)$．若椭圆 $W:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$ 上存在点 C，使得△ ABC 为等边三角形，则椭圆 W 的离心率是

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+a$．则“$a\geqslant 0$”是“$\exists x_0\in[-1,1]$，使 $f(x_0)\geqslant 0$”的

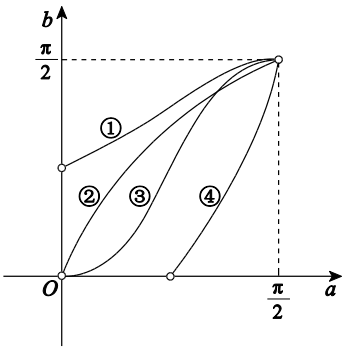
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

8．在直角坐标系 xOy 中，对于点 (x,y)，定义变换 σ：将点 (x,y) 变换为点 (a,b)，使得 $\begin{cases}x=\tan a,\\ y=\tan b,\end{cases}$ 其中 $a,b\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$．这样变换 σ 就将坐标系 xOy 内的曲线变换为坐标系 aOb 内的曲线．则四个函数 $y_1=2x\ (x>0)$，$y_2=x^2\ (x>0)$，$y_3=\mathrm{e}^x\ (x>0)$，$y_4=\ln x\ (x>1)$ 在坐标系 xOy 内的图象，变换为坐标系 aOb 内的四条曲线（如图）依次是

（A）②，③，①，④　　（B）③，②，④，①

（C）②，③，④，①　　（D）③，②，①，④



第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则圆 C 的面积为____；圆心 C 到直线 $l:3x-4y=0$ 的距离为____．

10．$(x^2+\frac{1}{x})^4$ 的展开式中 x^2 的系数是____．

11．在△ ABC 中，$a=3$，$b=2$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，则 $\cos 2B=$____．

12．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_1=1$，$S_2>S_3$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以是____．

13．设不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x+y\geqslant 3,\\ 2x+y\leqslant 5\end{cases}$ 表示的平面区域为 D．若直线 $ax-y=0$ 上存在区域 D 上的点，则实数 a 的取值范围是____．

14．地铁某换乘站设有编号为 A，B，C，D，E 的五个安全出口．若同时开放其中的两个安全出口，疏散 1000 名乘客所需的时间如下：

安全出口编号	A，B	B，C	C，D	D，E	A，E
疏散乘客时间（s）	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

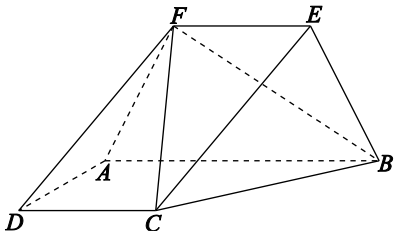
已知函数 $f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $f(\alpha)=2$，求 α 的值.

16.（本小题满分 14 分）

如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB//CD//EF$，$AB\perp AD$. $CD=DA=AF=FE=2$，$AB=4$.



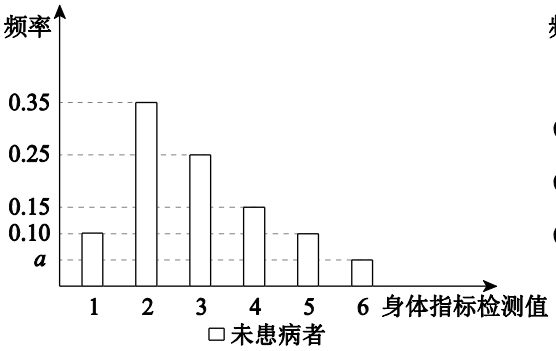
（Ⅰ）求证：DF // 平面 BCE ；

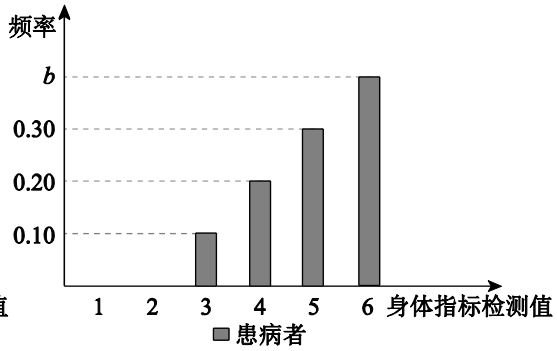
（Ⅱ）求二面角 $C-BF-A$ 的余弦值；

（Ⅲ）线段 CE 上是否存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF ？请说明理由.

17.（本小题满分 13 分）

在某地区，某项职业的从业者共约 8.5 万人，其中约 3.4 万人患有某种职业病. 为了解这种职业病与某项身体指标（检测值为不超过 6 的正整数）间的关系，依据是否患有职业病，使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者，记录他们该项身体指标的检测值，整理得到如下统计图：





（Ⅰ）求样本中患病者的人数和图中 a，b 的值；

（Ⅱ）在该指标检测值为 4 的样本中随机选取 2 人，求这 2 人中有患病者的概率；

（III）某研究机构提出，可以选取常数 $X_0=n+0.5$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，若一名从业者该项身体指标检测值大于 X_0，则判断其患有这种职业病；若检测值小于 X_0，则判断其未患有这种职业病. 从样本中随机选择一名从业者，按照这种方式判断其是否患有职业病. 写出使得判断错误的概率最小的 X_0 的值及相应的概率（只需写出结论）.

18.（本小题满分 14 分）

已知直线 $l: y=kx+1$ 与抛物线 $C: y^2=4x$ 相切于点 P .

（Ⅰ）求直线 l 的方程及点 P 的坐标；

（Ⅱ）设 Q 在抛物线 C 上， A 为 PQ 的中点．过 A 作 y 轴的垂线，分别交抛物线 C 和直线 l 于 M ， N ．记△ PMN 的面积为 S_1 ，△ QAM 的面积为 S_2 ，证明： $S_1=S_2$.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$ ，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,-1)$.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）设 $b>1$ ，求 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{b},b]$ 上的最大值和最小值.

20.（本小题满分 13 分）

数列 A_n ： $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n\geqslant 2)$ 的各项均为整数，满足： $a_i\geqslant -1\ (i=1,2,\cdots,n)$ ，且

$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$ ，其中 $a_1\neq 0$.

（Ⅰ）若 $n=3$ ，写出所有满足条件的数列 A_3 ；

（Ⅱ）求 a_1 的值；

（Ⅲ）证明： $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．C　　2．A　　3．D　　4．B

5．D　　6．C　　7．A　　8．A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．π，$\frac{6}{5}$　　10．6　　11．$\frac{1}{3}$

12．$-n+2$（答案不唯一）　　13．$[\frac{1}{2},3]$　　14．D

注：第 9 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$. ····· 4 分

（Ⅱ）$f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x$

$=(1+\frac{\sin x}{\cos x})\cdot\sin 2x$ ····· 5 分

$=\sin 2x+2\sin^2 x$ ····· 6 分

$=\sin 2x-\cos 2x+1$ ····· 7 分

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$. ····· 8 分

由 $f(\alpha)=2$，得 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ····· 9 分

因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{4}<2\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$， ·····10 分

所以 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，或 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. ·····11 分

解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，或 $\alpha=\frac{\pi}{2}$（舍去）. ·····13 分

16.（本小题满分 14 分）

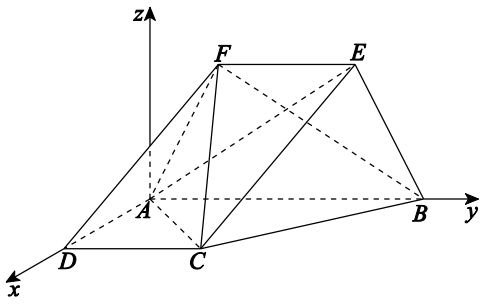
解：（Ⅰ）因为 $CD//EF$，且 $CD=EF$，

所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

所以 $DF//CE$. ····· 2 分

因为 $DF\not\subset$ 平面 BCE，····· 3 分

所以 $DF//$ 平面 BCE. ····· 4 分



（Ⅱ）在平面 $ABEF$ 内，过 A 作 $Az\perp AB$.

因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$，

又 $Az \subset$ 平面 $ABEF$，$Az \perp AB$，

所以 $Az \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AD \perp AB$，$AD \perp Az$，$Az \perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$. ····· 5 分

由题意得，$A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,3,\sqrt{3})$，$F(0,1,\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{BC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{3})$.

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2y=0,\\ -3y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=1$，$z=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{3})$. ····· 7 分

平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$， ····· 8 分

则 $\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 二面角 $C-BF-A$ 的余弦值 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ·····10 分

（Ⅲ）线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG \perp$ 平面 BCF，理由如下： ·····11 分

解法一：设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1+2y_1=0,\\ 3y_1+\sqrt{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$. ·····13 分

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$，

所以 平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直，

从而线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG \perp$ 平面 BCF. ·····14 分

解法二：线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG \perp$ 平面 BCF，理由如下： ·····11 分

假设线段 CE 上存在点 G，使得 $AG \perp$ 平面 BCF，

设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 $\lambda\in[0,1]$.

设 $G(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则有 $(x_2-2,\ y_2-2,\ z_2)=(-2\lambda,\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

所以 $x_2=2-2\lambda$，$y_2=2+\lambda$，$z_2=\sqrt{3}\lambda$，从而 $G(2-2\lambda,\ 2+\lambda,\ \sqrt{3}\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$. ……13 分

因为 $AG\perp$ 平面 BCF ，所以 $AG//\boldsymbol{n}$.

所以有 $\frac{2-2\lambda}{1}=\frac{2+\lambda}{1}=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$ ，

因为 上述方程组无解，所以假设不成立.

所以 线段 CE 上不存在点 G ，使得 $AG\perp$ 平面 BCF . ……14 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据分层抽样原则，容量为 100 的样本中，患病者的人数为 $100\times\frac{3.4}{8.5}=40$ 人. … 2 分

$a=1-0.10-0.35-0.25-0.15-0.10=0.05$ ，

$b=1-0.10-0.20-0.30=0.40$. …… 4 分

（Ⅱ）指标检测数据为 4 的样本中，

有患病者 $40\times0.20=8$ 人，未患病者 $60\times0.15=9$ 人. …… 6 分

设事件 A 为“从中随机选择 2 人，其中有患病者”.

则 $P(\overline{\mathrm{A}})=\frac{C_9^2}{C_{17}^2}=\frac{9}{34}$, …… 8 分

所以 $P(\mathrm{A})=1-P(\overline{\mathrm{A}})=\frac{25}{34}$. …… 9 分

（Ⅲ）使得判断错误的概率最小的 $X_0=4.5$. ……11 分

当 $X_0=4.5$ 时，判断错误的概率为 $\frac{21}{100}$. ……13 分

18.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由 $\begin{cases}y=kx+1,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$. ① …… 2 分

依题意，有 $k\neq0$ ，且 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$.

解得 $k=1$. …… 3 分

所以直线 l 的方程为 $y=x+1$. …… 4 分

将 $k=1$ 代入①，解得 $x=1$ ，

所以点 P 的坐标为 $(1,2)$. …… 5 分

（Ⅱ）设 $Q(m,n)$ ， 则 $n^2=4m$ ，所以 $A(\frac{m+1}{2},\frac{n+2}{2})$. …… 7 分

依题意，将直线 $y=\frac{n+2}{2}$ 分别代入抛物线 C 与直线 l ，

得 $M(\frac{(n+2)^2}{16},\frac{n+2}{2})$ ， $N(\frac{n}{2},\frac{n+2}{2})$. …… 8 分

因为 $|MN|=\left|\frac{(n+2)^2}{16}-\frac{n}{2}\right|=\left|\frac{n^2-4n+4}{16}\right|=\left|\frac{4m-4n+4}{16}\right|=\left|\frac{m-n+1}{4}\right|$， ····· 10 分

$$|AM|=\left|\frac{m+1}{2}-\frac{(n+2)^2}{16}\right|=\left|\frac{(8m+8)-(n^2+4n+4)}{16}\right|$$

$$=\left|\frac{(8m+8)-(4m+4n+4)}{16}\right|=\left|\frac{m-n+1}{4}\right|,$$ ·····12 分

所以 $|AM|=|MN|$. ·····13 分

又 A 为 PQ 中点，所以 P，Q 两点到直线 AN 的距离相等，

所以 $S_1=S_2$. ·····14 分

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\frac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$， ····· 2 分

所以 $f'(1)=1-a$.

依题意，有 $\frac{f(1)-(-1)}{1-2}=1-a$，

即 $\frac{-a+1}{1-2}=1-a$， ····· 4 分

解得 $a=1$. ····· 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$1-x^2>0$，$-\ln x>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$1-x^2<0$，$-\ln x<0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ····· 8 分

因为 $0<\frac{1}{b}<1<b$， 所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1)=-1$. ····· 9 分

设 $h(b)=f(b)-f(\frac{1}{b})=(b+\frac{1}{b})\ln b-b+\frac{1}{b}$，其中 $b>1$. ·····10 分

则 $h'(b)=(1-\frac{1}{b^2})\ln b>0$，

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ·····11 分

所以 $h(b)>h(1)=0$， 即 $f(b)>f(\frac{1}{b})$， ·····12 分

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\frac{1}{b})=-b\ln b-\frac{1}{b}$. ·····13 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）满足条件的数列 A_3 为：$-1,-1,6$；$-1,0,4$；$-1,1,2$；$-1,2,0$. ····· 3 分

（Ⅱ）$a_1=-1$. ····· 4 分

否则，假设 $a_1\neq-1$，因为 $a_1\neq0$，所以 $a_1\geqslant1$. 又 $a_2,a_3,\cdots,a_n\geqslant-1$，因此有

$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n$

$\geqslant 2^{n-1}+(-1)\cdot 2^{n-2}+(-1)\cdot 2^{n-3}+\cdots+(-1)\cdot 2+(-1)$

$=2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots-2-1=1$，

这与 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$ 矛盾！

所以 $a_1=-1$． ····· 8 分

（Ⅲ）先证明如下结论：$\forall k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，必有 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\leqslant 0$．

否则，令 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}>0$，

注意左式是 2^{n-k} 的整数倍，因此 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\geqslant 2^{n-k}$．

所以有：

$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n$

$\geqslant 2^{n-k}+(-1)\cdot 2^{n-k-1}+(-1)\cdot 2^{n-k-2}+\cdots+(-1)\cdot 2+(-1)$

$=2^{n-k}-2^{n-k-1}-2^{n-k-2}-\cdots-2-1$

$=1$，

这与 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$ 矛盾！

所以 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\leqslant 0$． ·····10 分

因此有：

$a_1<0,$
$a_1\cdot 2+a_2\leqslant 0,$
$a_1\cdot 4+a_2\cdot 2+a_3\leqslant 0,$
$\cdots$
$a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\cdot 2+a_k\leqslant 0,$
$\cdots$
$a_1\cdot 2^{n-2}+a_2\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\cdot 2+a_{n-1}\leqslant 0.$

将上述 $n-1$ 个不等式相加得 $a_1\cdot(2^{n-1}-1)+a_2\cdot(2^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}\cdot(2-1)<0$， ①

又 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$， ②

两式相减即得 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$． ·····13 分