2018 北京西城高三二模

数　　学（文）

2018.5

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的 四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．若集合 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$， $B=\{x\,|\,x^2-2x<0\}$，则下列结论中正确的是

（A） $A\cap B=\varnothing$　　（B） $A\cup B=\mathbf{R}$

（C） $A\subseteq B$　　（D） $B\subseteq A$

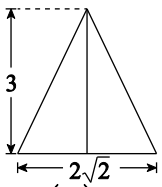
2．复数 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=$

（A） $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（B） $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（C） $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　（D） $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

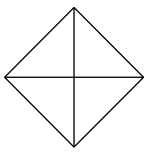
3．下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

（A） $y=\dfrac{1}{x}$　　（B） $y=x^2$　　（C） $y=\cos x$　　（D） $y=-\ln|x|$

4．某正四棱锥的正（主）视图和俯视图如图所示，该正四棱锥的侧棱长是



正（主）视图


俯视图

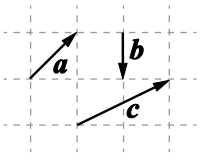
（A） $\sqrt{10}$

（B） $\sqrt{11}$

（C） $4\sqrt{10}$

（D） $4\sqrt{11}$

5．向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则实数 $\lambda=$



（A） -2　　（B） -1　　（C） 1　　（D） 2

6．设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq0$．则“ $ab>1$ ”是“ $a>\dfrac{1}{b}$ ”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7．设不等式组 $\begin{cases}x\geqslant1,\\ x+y\geqslant3,\\ 2x+y\leqslant5\end{cases}$ 表示的平面区域为 D．若直线 $ax-y=0$ 上存在区域 D 上的点，则实数 a 的取值范围是

（A）$[\frac{1}{2},2]$　　（B）$[\frac{1}{2},3]$

（C）$[1,2]$　　（D）$[2,3]$

8．地铁某换乘站设有编号为 A，B，C，D，E 的五个安全出口．若同时开放其中的两个安全出口，疏散 1000 名乘客所需的时间如下：

安全出口编号	A，B	B，C	C，D	D，E	A，E
疏散乘客时间（s）	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是

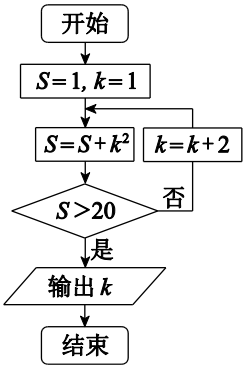
（A）A　　（B）B　　（C）D　　（D）E

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．函数 $y=\dfrac{1}{|x|+2}$ 的最大值是____．

10．执行如右图所示的程序框图，输出的 k 值为____．



11．在△ ABC 中，$a=3$，$b=2$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin A=$____．

12．双曲线 $C:\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ 的焦距是____；若圆 $(x-1)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 与双曲线 C 的渐近线相切，则 $r=$____．

13．为绿化生活环境，某市开展植树活动．今年全年植树 6.4 万棵，计划 3 年后全年植树 12.5 万棵．若植树的棵数每年的增长率均为 a，则 $a=$____．

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}a+2^x, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}x+a, & x>1,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$．如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点，那么 a 的取值范围是____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$2+a_4=b_3$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

16.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

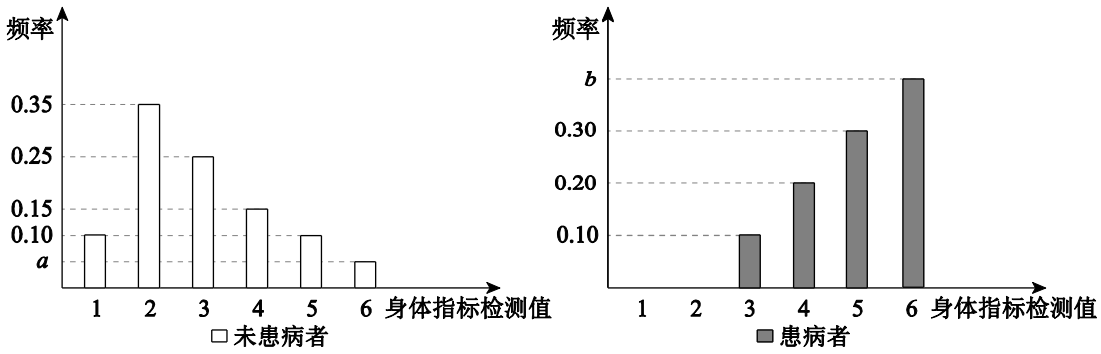
（Ⅱ）求 $f(x)$ 的取值范围.

17.（本小题满分 13 分）

在某地区，某项职业的从业者共约 8.5 万人，其中约 3.4 万人患有某种职业病．为了解这种职业病与某项身体指标（检测值为不超过 6 的正整数）间的关系，依据是否患有职业病，使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者，记录他们该项身体指标的检测值，整理得到如下统计图：（Ⅰ）求样本中患病者的人数和图中 a，b 的值；

（Ⅱ）试估计此地区该项身体指标检测值不低于 5 的从业者的人数；

（III）某研究机构提出，可以选取常数 $X_0=4.5$，若一名从业者该项身体指标检测值大于 X_0，则判断其患有这种职业病；若检测值小于 X_0，则判断其未患有这种职业病．从样本中随机选择一名从业者，按照这种方式判断其是否患病，求判断错误的概率.



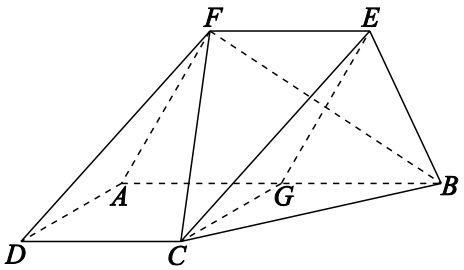
18.（本小题满分 14 分）

如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB//CD//EF$，$AB\perp AD$，G 为 AB 的中点．$CD=DA=AF=FE=2$，$AB=4$.

（Ⅰ）求证：DF // 平面 BCE；

（Ⅱ）求证：平面 $BCF\perp$ 平面 GCE；

（Ⅲ）求多面体 $AFEBCD$ 的体积.



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-ax$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,-1)$.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）设 $b>1$，求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{b},b]$ 上的最大值和最小值.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，经过点 $(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=x$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，与直线 $y=x$ 交于点 P（点 P 与点 A，B，M，N 不重合）.

（ⅰ）当 $k=-1$ 时，证明：$|PA||PB|=|PM||PN|$；

（ⅱ）写出 $\frac{|PA||PB|}{|PM||PN|}$ 以 k 为自变量的函数式（只需写出结论）.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．C　　2．A　　3．D　　4．B

5．D　　6．D　　7．B　　8．C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$\frac{1}{2}$　　10．5　　11．$\frac{9}{10}$

12．10，$\frac{3}{5}$　　13．25%　　14．$[-2,-\frac{1}{2})$

注：第 12 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

依题意，得 $\begin{cases}1+d=q,\\ 2+(1+3d)=q^2.\end{cases}$ …… 2 分

解得 $\begin{cases}d=2,\\ q=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=-1,\\ q=0.\end{cases}$（舍去） …… 4 分

所以 $a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$. …… 6 分

（Ⅱ）因为 $a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$， …… 7 分

所以 $S_n=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})$ …… 9 分

$=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}$ ……11 分

$=n^2+\frac{3^n-1}{2}$. ……13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\sin x+\cos x\neq 0$， …… 2 分

得 $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq 0$， …… 3 分

所以 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，其中$k\in\mathbf{Z}$. …… 4 分

所以$f(x)$的定义域为$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$. …… 5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}$ …… 7 分

$=\cos x-\sin x$ …… 9 分

$=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$. ……11 分

由（Ⅰ）得 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，

所以 $-1<\cos(x+\frac{\pi}{4})<1$，　　……12 分

所以 $f(x)$ 的取值范围是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．　　……13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据分层抽样原则，容量为 100 的样本中，患病者的人数为

$100\times\frac{3.4}{8.5}=40$ 人．　　…… 2 分

$a=1-0.10-0.35-0.25-0.15-0.10=0.05$，

$b=1-0.10-0.20-0.30=0.40$．　　…… 4 分

（Ⅱ）指标检测值不低于 5 的样本中，

有患病者 $40\times(0.30+0.40)=28$ 人，未患病者 $60\times(0.10+0.05)=9$ 人，共 37 人．

…… 6 分

此地区该项身体指标检测值不低于 5 的从业者的人数约为 $\frac{37}{100}\times85000=31450$ 人．

…… 8 分

（Ⅲ）当 $X_0=4.5$ 时，在 100 个样本数据中，

有 $40\times(0.10+0.20)=12$ 名患病者被误判为未患病，　　……10 分

有 $60\times(0.10+0.05)=9$ 名未患病者被误判为患病者，　　……12 分

因此判断错误的概率为 $\frac{21}{100}$．　　……13 分

18.（本小题满分 14 分）

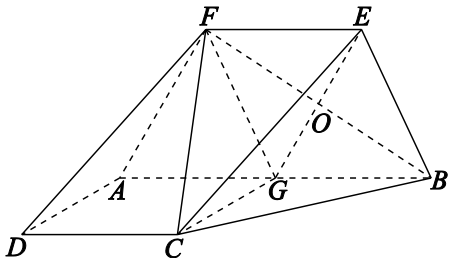
解：（Ⅰ）因为 $CD//EF$，且 $CD=EF$，

所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

所以 $DF//CE$．　　…… 2 分

因为 $DF\not\subset$ 平面 BCE，…… 3 分

所以 $DF//$ 平面 BCE．…… 4 分



（Ⅱ）连接 FG．

因为 平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$AD\perp AB$，

所以 $AD\perp$ 平面 $ABEF$，

所以 $BF\perp AD$．　　……6 分

因为 G 为 AB 的中点，

所以 $AG//CD$，且 $AG=CD$；$EF//BG$，且 $EF=BG$，

所以 四边形 $AGCD$ 和四边形 $BEFG$ 均为平行四边形．

所以 $AD//CG$， 所以 $BF\perp CG$． …… 7 分

因为 $EF=EB$，

所以 四边形 $BEFG$ 为菱形，

所以 $BF\perp EG$． …… 8 分

所以 $BF\perp$ 平面 GCE． …… 9 分

所以 平面 $BCF\perp$ 平面 GCE． ……10 分

（Ⅲ）设 $BF\cap GE=O$．

由（Ⅰ）得 $DF//CE$，所以 $DF//$ 平面 GCE，

由（Ⅱ）得 $AD//CG$，所以 $AD//$ 平面 GCE，

所以 平面 $ADF//$ 平面 GCE，

所以 几何体 $ADF-GCE$ 是三棱柱． ……11 分

由（Ⅱ）得 $BF\perp$ 平面 GCE．

所以 多面体 $AFEBCD$ 的体积 $V=V_{ADF-GCE}+V_{B-GCE}$ ……12 分

$$=S_{\Delta GCE}\cdot FO+\frac{1}{3}S_{\Delta GCE}\cdot BO$$

$$=\frac{4}{3}S_{\Delta GCE}\cdot FO=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$ ……14 分

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\frac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$， …… 2 分

所以 $f'(1)=1-a$．

依题意，有 $\frac{f(1)-(-1)}{1-2}=1-a$，

即 $\frac{-a+1}{1-2}=1-a$， …… 4 分

解得 $a=1$． …… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$．

当 $0<x<1$ 时，$1-x^2>0$，$-\ln x>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$1-x^2<0$，$-\ln x<0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减．

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减． …… 8 分

因为 $0<\frac{1}{b}<1<b$， 所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1)=-1$． …… 9 分

设 $h(b)=f(b)-f(\frac{1}{b})=(b+\frac{1}{b})\ln b-b+\frac{1}{b}$，其中 $b>1$． ……10 分

则 $h'(b)=(1-\frac{1}{b^2})\ln b>0$，

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……11 分

所以 $h(b)>h(1)=0$， 即 $f(b)>f(\frac{1}{b})$， ……12 分

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\frac{1}{b})=-b\ln b-\frac{1}{b}$. ……13 分

20.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 c. 依题意，得

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$， $b=1$， 且 $a^2=b^2+c^2$. …… 2 分

解得 $a=\sqrt{3}$. …… 3 分

所以 椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. …… 4 分

（Ⅱ）（ⅰ）由 $\begin{cases}y=x,\\x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 得 $A(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$， $B(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$. …… 5 分

$k=-1$ 时，设直线 l 的方程为 $y=-x+t$.

由 $\begin{cases}y=-x+t,\\x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 得 $4x^2-6tx+3t^2-3=0$. …… 6 分

令 $\Delta=36t^2-48(t^2-1)>0$，解得 $t^2<4$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{3t}{2}$， $x_1\cdot x_2=\frac{3t^2-3}{4}$. …… 8 分

由 $\begin{cases}y=-x+t,\\y=x,\end{cases}$ 得 $P(\frac{t}{2},\frac{t}{2})$. …… 9 分

所以 $|PA||PB|=\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\cdot\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{t^2-3}{2}\right|$. ……10 分

因为 $|PM|=\sqrt{(\frac{t}{2}-x_1)^2+(\frac{t}{2}-y_1)^2}=\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}-x_1\right|$， 同理 $|PN|=\sqrt{2}\left|\frac{t}{2}-x_2\right|$.

所以 $|PM||PN|=2\left|\frac{t}{2}-x_1\right|\cdot\left|\frac{t}{2}-x_2\right|$

$=2\left|\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}\cdot\frac{3t}{2}+\frac{3t^2-3}{4}\right|$

$$=\left|\frac{t^2-3}{2}\right|.$$

所以 $|PA||PB|=|PM||PN|$. ……12 分

（ii）$\frac{|PA||PB|}{|PM||PN|}=\frac{1+3k^2}{2(1+k^2)}$. ……14 分