2018 北京海淀高三二模

数　　学（理）

2018.5

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合$A=\{1,2,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，则$(C_U A)\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{3,5\}$　　C. $\{1,6\}$ D. $\{1,3,5,6\}$

（2）已知复数z在复平面上对应的点为$(1,-1)$，则

A. $z+1$是实数 B. $z+1$是纯虚数 C. $z+i$是实数 D. $z+i$是纯虚数

（3）已知$x\succ y\succ 0$，则

A. $\frac{1}{x}\succ\frac{1}{y}$　　B. $(\frac{1}{2})^x\succ(\frac{1}{2})^y$　　C. $\cos x\succ\cos y$　　D. $\ln(x+1)\succ\ln(y+1)$

（4）若直线$x+y+a=0$是圆$x^2+y^2-2y=0$的一条对称轴，则a的值为

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

（5）设曲线C是双曲线，则“C的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$”是“C的渐近线方程为$y=\pm 2x$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

（6）关于函数$f(x)$=sinx-xcosx，下列说法错误的是

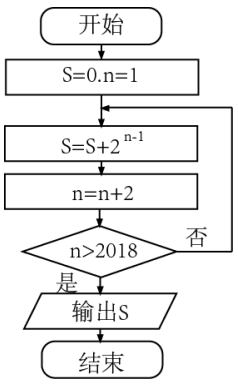
A. $f(x)$是奇函数

B. 0 不是$f(x)$的极值点

C. $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上有且仅有 3 个零点

D. $f(x)$的值域是R

（7）已知某算法的程序框图如图所示，则该算法的功能是



A. 求首项为 1，公比为 2 的等比数列的前 2017 项的和
B. 求首项为 1，公比为 2 的等比数列的前 2018 项的和
C. 求首项为 1，公比为 4 的等比数列的前 1009 项的和
D. 求首项为 1，公比为 4 的等比数列的前 1010 项的和

（8）已知集合$M=\{x\in N^*\,|\,1\le x\le 15\}$，集合$A_1$，$A_2$，$A_3$满足

①每个集合都恰有 5 个元素

②$A_1\cup A_2\cup A_3=M$

集合A_i中元素的最大值与最小值之和称为集合A_i的特征数，记为$X_i(i=1,2,3)$，则$X_1+X_2+X_3$的值不可能为

A. 37　　B. 39　　C. 48　　D. 57

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）极坐标系中，点$(2,\frac{\pi}{2})$到直线$\rho\cos\theta=1$的距离为_____.

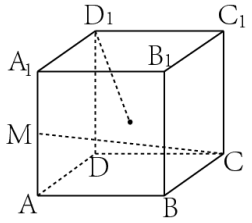
（10）在$(x+\frac{2}{x})^5$的二项展开式中，x^3的系数为_____.

（11）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____，$|\vec{a}+2\vec{b}|=$_____.

（12）在ΔABC中，$a:b:c=4:5:6$，则$\tan A=$_____.

（13）能够使得命题“曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a^2}=1(a\neq 0)$上存在四个点$P,Q,R,S$满足四边形$PQRS$是正方形”为真命题的一个实数$a$的值为_____.

（14）如图，棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M是棱AA_1的中点，点P在侧面ABB_1A_1内，若D_1P垂直于CM，则ΔPBC的面积的最小值为_____.



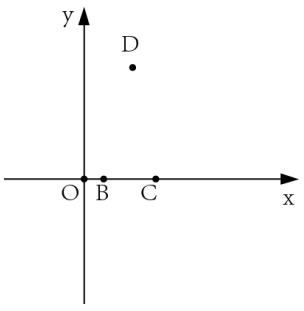
三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

如图，已知函数$f(x)=A\sin x(\omega x+\varphi)$（$A\succ 0,\omega\succ 0,|\varphi|\prec\frac{\pi}{2}$）在一个周期内的图像经过$B(\frac{\pi}{6},0)$，$C(\frac{2\pi}{3},0)$，$D(\frac{5\pi}{12},2)$三点

（Ⅰ）写A,ω,φ出的值；

（Ⅱ）若$\alpha\in(\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3})$，且$f(\alpha)=1$，求$\cos 2\alpha$的值.



（16）（本小题 13 分）

某中学为了解高二年级中华传统文化经典阅读的整体情况，从高二年级随机抽取 10 名学生进行了两轮测试，并把两轮测试成绩的平均分作为该名学生的考核成绩. 记录的数据如下：

	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	6 号	7 号	8 号	9 号	10 号
第一轮测试成绩	96	89	88	88	92	90	87	90	92	90
第二轮测试成绩	90	90	90	88	88	87	96	92	89	92

（Ⅰ）从该校高二年级随机选取一名学生，试估计这名学生考核成绩大于 90 分的概率；

（Ⅱ）从考核成绩大于 90 分的学生中再随机抽取两名同学，求这两名同学两轮测试成绩均大于等于 90 分的概率；

（Ⅲ）记抽取的 10 名学生第一轮测试的平均数和方差分别为 $\overline{x_1}$，s_1^2，考核成绩的平均数和方差分别为 $\overline{x_2}$，s_2^2，试比较 $\overline{x_1}$ 与 $\overline{x_2}$，s_1^2 与 s_2^2 的大小.（只需写出结论）

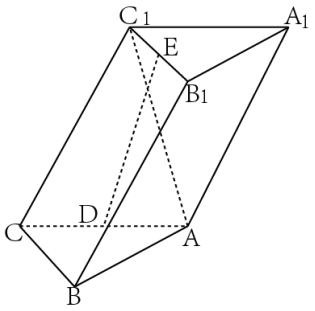
（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=AB_1=2$，$AB_1\perp$ 平面 ABC，$AC_1\perp AC$，D,E 分别是 AC，B_1C_1 的中点

（Ⅰ）证明：$AC\perp B_1C_1$；

（Ⅱ）证明：$DE//$ 平面 AA_1B_1B；

（Ⅲ）求 DE 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.



（18）（本小题 14 分）

已知椭圆C: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，F 为右焦点，圆$O: x^2+y^2=1$，P 为椭圆C 上一点，且P 位于第一象限，过点P 作PT 与圆O 相切于点T，使得点F，T 在OP 的两侧.

（Ⅰ）求椭圆C 的焦距及离心率；

（Ⅱ）求四边形$OFPT$ 面积的最大值.

（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}-ax-3(a\neq 0)$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）当$a\succ 0$ 时，设 $g(x)=\frac{1}{a}e^{ax}-\frac{1}{2}ax^2-3x$，求证：曲线 $y=g(x)$ 存在两条斜率为-1且不重合的切线.

（20）（本小题 13 分）

如果数列$\{a_n\}$满足“对任意正整数$i,j,i\neq j$，都存在正整数k，使得$a_k=a_i\,a_j$”，则称数列$\{a_n\}$具有“性质P”.

已知数列$\{a_n\}$是无穷项的等差数列，公差为d

（Ⅰ）若a_1=2，公差d=3，判断数列$\{a_n\}$是否具有“性质P”，并说明理由；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$具有“性质P”，求证：$a_1\geq 0$且$d\geq 0$；

（Ⅲ）若数列$\{a_n\}$具有“性质P”，且存在正整数k，使得$a_k=2018$，这样的数列共有多少个？并说明理由.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	D	B	A	C	C	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

（9）1　　（10）10

（11）1；$2\sqrt{3}$　　（12）$\frac{\sqrt{7}}{3}$

（13）答案不唯一，$a<0$ 或 $a>4$ 的任意实数　　（14）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

注：第 11 题第一空 3 分，第二空 2 分。

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（15）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）$A=2$，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$．　• 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．

因为 $f(\alpha)=1$，所以 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$．

因为 $\alpha\in(\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3})$，所以 $2\alpha-\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$．

所以 $2\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$，

所以 $2\alpha=\frac{7}{6}\pi$，

所以 $\cos 2\alpha=\cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．　• 13 分

16.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）这 10 名学生的考核成绩（单位：分）分别为：

93，89.5，89，88，90，88.5，91.5，91，90.5，91．

其中大于等于 90 分的有 1 号、5 号、7 号、8 号、9 号、10 号，共 6 人．

所以样本中学生考核成绩大于等于 90 分的频率为：

$$\frac{6}{10}=0.6,$$

从该校高二年级随机选取一名学生，估计这名学生考核成绩大于等于 90 分的概率为 0.6.

…….4 分

（Ⅱ）设事件 A：从上述考核成绩大于等于 90 分的学生中再随机抽取两名同学，这两名同学两轮测试成绩均大于等于 90 分．

由（Ⅰ）知，上述考核成绩大于等于 90 分的学生共 6 人，其中两轮测试成绩均大于等于 90 分的学生有 1 号，8 号，10 号，共 3 人．

所以，$P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$．　• 9 分

（Ⅲ）$\overline{x_1}=\overline{x_2}$，$s_1^2>s_2^2$. ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 13 分

17.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 AB_1 ⊥平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，

所以 $AB_1\perp AC$.

因为 $AC_1\perp AC$，$AB_1\cap AC_1=A$，AB_1，$AC_1\subset$平面 AB_1C_1，

所以 $AC\perp$平面 AB_1C_1.

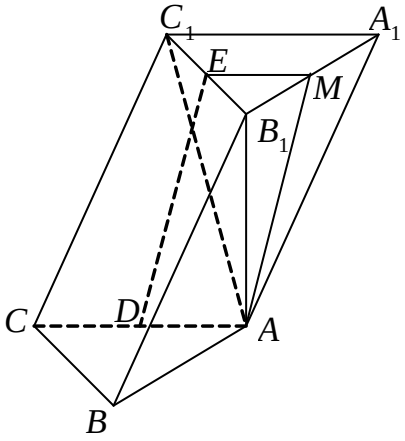
因为 $B_1C_1\subset$平面 AB_1C_1，

所以 $AC\perp B_1C_1$. ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4 分

（Ⅱ）取 A_1B_1 的中点 M，连接 MA、ME.

因为 E、M 分别是 B_1C_1、A_1B_1 的中点，

所以 $ME/\!/\ A_1C_1$，且 $ME=\frac{1}{2}A_1C_1$.



在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AD/\!/\ A_1C_1$，且 $AD=\frac{1}{2}A_1C_1$，

所以 $ME/\!/\ AD$，且 $ME=AD$，

所以四边形 $ADEM$ 是平行四边形，

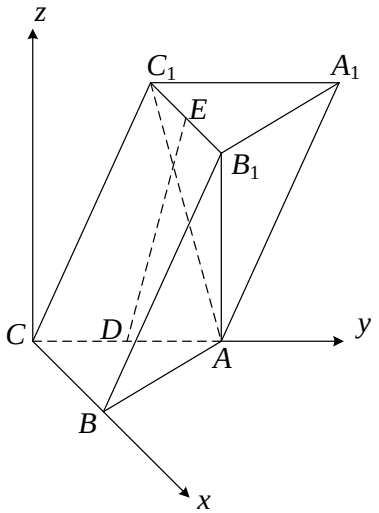
所以 $DE/\!/\ AM$.

又 $AM\subset$平面 AA_1B_1B，$DE\not\subset$平面 AA_1B_1B，

所以 $DE//$平面 AA_1BB. ・・・・・・・・・9 分

（Ⅲ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC//B_1C_1$，

因为 $AC\perp B_1C_1$，所以 $AC\perp BC$.



在平面 ACB_1 内，过点 C 作 $Cz//AB_1$，

因为，$AB_1\perp$平面 ABC，

所以，$Cz\perp$平面 ABC.

建立空间直角坐标系 $C-xyz$，如图. 则

$C(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(-2,2,2)$，$D(0,1,0)$，$E(-1,2,2)$.

$\overrightarrow{DE}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2)$.

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}，即\begin{cases}2x=0\\ 2y+2z=0\end{cases},$$

得 $x=0$，令 $y=1$，得 $z=-1$，故 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$.

设直线 DE 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{DE},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线 DE 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. ・・・・・・・・ 14 分

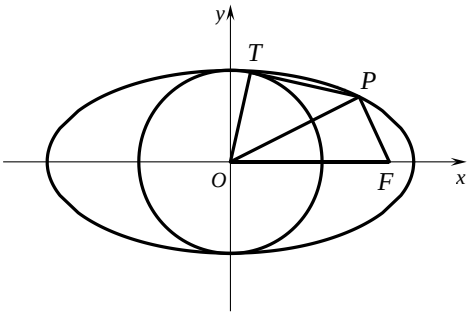
18. （本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）在椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，$a=2$，$b=1$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

故椭圆 C 的焦距为 $2c=2\sqrt{3}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ・・・・・・・・・ 5 分

（Ⅱ）法一：设 $P(x_0,y_0)$（$x_0>0$，$y_0>0$），



则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，故 $y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$.

所以 $|TP|^2=|OP|^2-|OT|^2=x_0^2+y_0^2-1=\frac{3}{4}x_0^2$，

所以 $|TP|=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$，

$$S_{\Delta OTP}=\frac{1}{2}|OT|\cdot|TP|=\frac{\sqrt{3}}{4}x_0\cdot$$

又 $O(0,0)$，$F(\sqrt{3},0)$，故 $S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\cdot$

因此 $S_{四边形OFPT}=S_{\Delta OFP}+S_{\Delta OTP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{x_0}{2}+y_0)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+x_0y_0+y_0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\cdot$$

由 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，得 $2\sqrt{\frac{x_0^2}{4}\cdot y_0^2}\le 1$，即 $x_0\cdot y_0\le 1$，

所以 $S_{四边形OFPT}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\le\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $\frac{x_0^2}{4}=y_0^2=\frac{1}{2}$，即 $x_0=\sqrt{2}$，$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立. ・・・・・ 14 分

19. （本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=a\cdot\mathbf{e}^{ax}-a=a\cdot(\mathbf{e}^{ax}-1)$ $(a\neq 0,x\in\mathbf{R})$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

①当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 与 $\mathbf{e}^{ax}-1$ 符号相同，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗

②当 $a<0$ 时，$f'(x)$ 与 $\mathbf{e}^{ax}-1$ 符号相反，

当 x 变化时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗

综上， $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=-2$． ・・・・・・・・・・ 7 分

（Ⅱ） $g'(x)=\mathbf{e}^{ax}-ax-3=f(x)\ (a>0,x\in\mathbf{R})$，

故 $g'(x)=-1\Leftrightarrow f(x)=-1$．

注意到 $f(0)=-2<-1$， $f(\frac{2}{a})=\mathbf{e}^{2}-5>-1$， $f(-\frac{2}{a})=\mathbf{e}^{-2}-1>-1$，

所以， $\exists x_1\in(-\frac{2}{a},0)$， $x_2\in(0,\frac{2}{a})$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=-1$．

因此，曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_1(x_1,f(x_1))$， $P_2(x_2,f(x_2))$ 处的切线斜率均为 -1．

下面，只需证明曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_1(x_1,f(x_1))$， $P_2(x_2,f(x_2))$ 处的切线不重合．

曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$（ $i=1,2$ ）处的切线方程为 $y-g(x_i)=-(x-x_i)$，即 $y=-x+g(x_i)+x_i$．假设曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$（ $i=1,2$ ）处的切线重合，则 $g(x_2)+x_2=g(x_1)+x_1$．

令 $G(x)=g(x)+x$，则 $G(x_1)=G(x_2)$，且 $G'(x)=g'(x)+1=f(x)+1$．

由（Ⅰ）知，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时， $f(x)<-1$，故 $G'(x)<0$．

所以， $G(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上单调递减，于是有 $G(x_1)>G(x_2)$，矛盾！

因此，曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$（ $i=1,2$ ）处的切线不重合． ・・ 13 分

20. （本小题 13 分）

解：（Ⅰ）若 $a_1=2$，公差 $d=3$，则数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 P．

理由如下：

由题知 $a_n=3n-1$，对于 a_1 和 a_2，假设存在正整数 k，使得 $a_k=a_1a_2$，则有 $3k-1=2\times5=10$，解得 $k=\frac{11}{3}$，矛盾！所以对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$， $a_k\neq a_1a_2$． ……3 分

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”，则

①假设 $a_1<0$， $d\le0$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$， $a_n=a_1+(n-1)\cdot d<0$．

设 $a_k=a_1\times a_2$，则 $a_k>0$，矛盾！

②假设 $a_1<0$， $d>0$，则存在正整数 t，使得

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_t\le0<a_{t+1}<a_{t+2}<\cdots$$

设 $a_1\cdot a_{t+1}=a_{k_1}$， $a_1\cdot a_{t+2}=a_{k_2}$， $a_1\cdot a_{t+3}=a_{k_3}$， …， $a_1\cdot a_{2t+1}=a_{k_{t+1}}$， $k_i\in\mathbf{N}^*$， $i=1,2,\cdots,t+1$，则 $0>a_{k_1}>a_{k_2}>a_{k_3}>\cdots>a_{k_{t+1}}$，但数列 $\{a_n\}$ 中仅有 t 项小于等于 0，矛盾！

③假设 $a_1\ge0$， $d<0$，则存在正整数 t，使得

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_t\ge0>a_{t+1}>a_{t+2}>\cdots$$

设 $a_{t+1}\cdot a_{t+2}=a_{k_1}$， $a_{t+1}\cdot a_{t+3}=a_{k_2}$， $a_{t+1}\cdot a_{t+4}=a_{k_3}$， …， $a_{t+1}\cdot a_{2t+2}=a_{k_{t+1}}$， $k_i\in\mathbf{N}^*$， $i=1,2,\cdots,t+1$，则 $0<a_{k_1}<a_{k_2}<a_{k_3}<\cdots<a_{k_{t+1}}$，但数列 $\{a_n\}$ 中仅有 t 项大于等于 0，矛盾！

综上， $a_1\ge0$， $d\ge0$． ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8 分

（Ⅲ）设公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”，且存在正整数 k，使得 $a_k=2018$．

若 $d=0$，则 $\{a_n\}$ 为常数数列，此时 $a_n=2018$ 恒成立，故对任意的正整数 k，

$$a_k=2018\neq2018^2=a_1\cdot a_2,$$

这与数列$\{a_n\}$具有“性质P”矛盾，故$d\neq 0$.

设x是数列$\{a_n\}$中的任意一项，则$x+d$，$x+2d$均是数列$\{a_n\}$中的项，设

$$a_{k_1}=x(x+d)，\ a_{k_2}=x(x+2d)$$

则$a_{k_2}-a_{k_1}=xd=(k_2-k_1)\cdot d$，

因为$d\neq 0$，所以$x=k_2-k_1\in\mathbf{Z}$，即数列$\{a_n\}$的每一项均是整数.

由（Ⅱ）知，$a_1\geq 0$，$d\geq 0$，故数列$\{a_n\}$的每一项均是自然数，且d是正整数.

由题意知，$2018+d$是数列$\{a_n\}$中的项，故$2018\cdot(2018+d)$是数列中的项，设$a_m=2018\cdot(2018+d)$，则

$$a_m-a_k=2018\cdot(2018+d)-2018=2018\times 2017+2018d=(m-k)\cdot d，$$

即$(m-k-2018)\cdot d=2018\times 2017$.

因为$m-k-2018\in\mathbf{Z}$，$d\in\mathbf{N}^*$，故d是2018×2017的约数.

所以，$d=1,2,1009,2017,2\times 1009,2\times 2017,1009\times 2017$，$2\times 1009\times 2017$.

当$d=1$时，$a_1=2018-(k-1)\geq 0$，得$k=1,2,...,2018,2019$，故

$a_1=2018,2017,...,2,1,0$，共2019种可能；

当$d=2$时，$a_1=2018-2(k-1)\geq 0$，得$k=1,2,...,1008,1009,1010$，故

$a_1=2018,2016,2014,...,4,2,0$，共1010种可能；

当$d=1009$时，$a_1=2018-1009\times(k-1)\geq 0$，得$k=1,2,3$，故

$a_1=2018,1009,0$，共3种可能；

当$d=2017$时，$a_1=2018-2017(k-1)\geq 0$，得$k=1,2$，故

$a_1=2018,1$，共2种可能；

当$d=2\times 1009$时，$a_1=2018-2018\times(k-1)\geq 0$，得$k=1,2$，故

$a_1=2018,0$，共2种可能；

当$d=2\times 2017$时，$a_1=2018-2\times 2017\times(k-1)\geq 0$，得$k=1$，故

$a_1=2018$，共1种可能；

当$d=1009\times 2017$时，$a_1=2018-1009\times 2017\times(k-1)\geq 0$，得$k=1$，故

$a_1=2018$，共1种可能；

当$d=2\times 1009\times 2017$时，$a_1=2018-2\times 1009\times 2017\times(k-1)\geq 0$，得$k=1$，故

$a_1=2018$，共1种可能.

综上，满足题意的数列$\{a_n\}$共有$2019+1010+3+2+2+1+1+1=3039$（种）.

经检验，这些数列均符合题意. ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 13分