2018 北京朝阳高三二模

数　　学（理）

第Ⅰ卷（共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

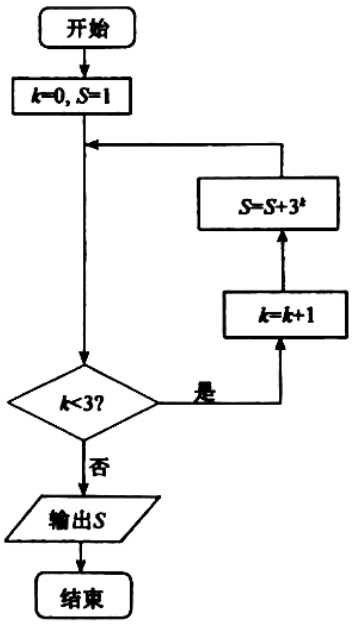
1. 已知集合 $A=\{x\,|\,\log_2 x>1\}$，$B=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$(1，2]$　　B．$(1，+\infty)$　　C．$(1，2)$　　D．$[1，+\infty)$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\angle B=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{3\pi}{4}$　　D．$\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$

3. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值为（　　）

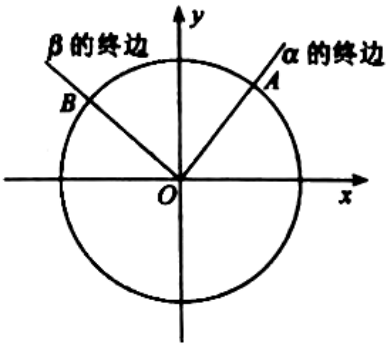


A．10　　B．13　　C．40　　D．121

4. 在极坐标系中，直线 l：$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 与圆 C：$\rho=2\cos\theta$ 的位置关系为（　　）

A．相交且过圆心　　B．相交但不过圆心　　C. 相切　　D．相离

5. 如图，角 α，β 均以 Ox 为始边，终边与单位圆 O 分别交于点 A，B，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　　）



A．$\sin(\alpha-\beta)$　　B．$\sin(\alpha+\beta)$　　C. $\cos(\alpha-\beta)$　　D．$\cos(\alpha+\beta)$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x，x\geqslant a，\\ x^2，x<a\end{cases}$ 则“$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)$ 在$[0，+\infty)$上单调递增”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7. 某校象棋社团组织中国象棋比赛，采用单循环赛制，即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场，胜者得2分，负者得0分，平局两人各得1分. 若冠军获得者得分比其他人都多，且获胜场次比其他人都少，则本次比赛的参赛人数至少为（　　）

A．4　　B．5　　C. 6　　D．7

8. 若三个非零且互不相等的实数 x_1，x_2，x_3 成等差数列且满足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_3}$，则称 x_1，x_2，x_3 成一个“β 等差数列”. 已知集合 $M=\{x\,|\,|x|\leqslant 100，x\in\mathbf{Z}\}$，则由 M 中的三个元素组成的所有数列中，“β 等差数列”的个数为（　　）

A．25　　B．50　　C. 51　　D．100

第Ⅱ卷（共110分）

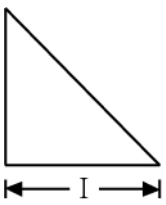
二、填空题（每题5分，满分30分，将答案填在答题纸上）

9. 计算 $\frac{1}{(1+i)^2}=$_____.

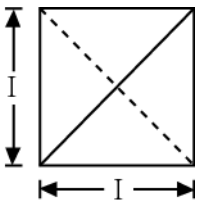
10. 双曲线 $x^2-y^2=\lambda$（$\lambda\neq 0$）的离心率是_____；该双曲线的两条渐近线的夹角是_____.

11. 若 $(x^3-\frac{1}{x})^n$ 展开式的二次项系数之和为8，则 $n=$_____；其展开式中含 $\frac{1}{x^3}$ 项的系数为_____.（用数字作答）

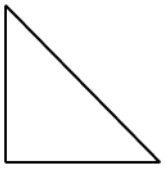
12. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的底面和三个侧面中，直角三角形的个数是_____.



主视图



侧视图



俯视图

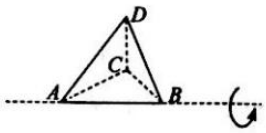
13. 已知不等式组 $\begin{cases}y\geqslant 0\\ |x|+y\leqslant 2\\ y+1\geqslant k(x+1)\end{cases}$ 在平面直角坐标系 xOy 中所表示的平面区域为 D，D 的面积 S，则下面结论：

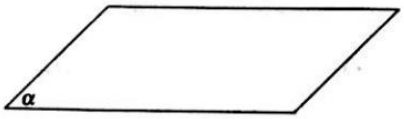
①当 $k>0$ 时，D 为三角形；②当 $k<0$ 时，D 为四边形；

③当$k=\frac{1}{3}$时，$S=4$；④当$0<k\leqslant\frac{1}{3}$时，S为定值.

其中正确的序号是_____.

14. 如图，已知四面体$ABCD$的棱AB∥平面α，且$AB=\sqrt{2}$，其余的棱长均为1. 四面体$ABCD$以AB所在的直线为轴旋转x弧度，且始终在水平放置的平面α上方. 如果将四面体$ABCD$在平面α内正投影面积看成关于x的函数，记为$S(x)$，则函数$S(x)$的最小值为_____；$S(x)$的最小正周期为_____.





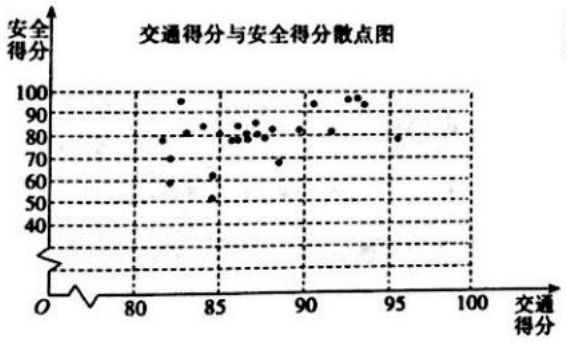
三、解答题 （本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

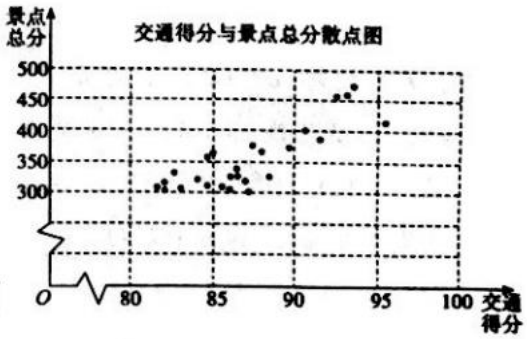
15. 已知函数$f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$的图象经过点$(\frac{\pi}{2},1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）求a的值，并求函数$f(x)$的单调递增区间；

（2）若当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，不等式$f(x)\geqslant m$恒成立，求实数m的取值范围.

16. 某市旅游管理部门为提升该市26个旅游景点的服务质量，对该市26个旅游景点的交通、安全、环保、卫生、管理五项指标进行评分. 每项评分最低分0分，最高分100分. 每个景点总分为这五项得分之和，根据考核评分结果，绘制交通得分与安全得分散点图、交通得分与景点总分散点图如下：





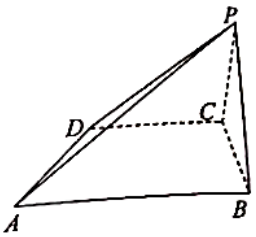
请根据图中所提供的信息，完成下列问题：

（1）若从交通得分排名前5名的景点中任取1个，求其安全得分大于90分的概率；

（2）若从景点总分排名前6名的景点中任取3个，记安全得分不大于90分的景点个数为ξ，求随机变量ξ的分布列和数学期望；

（3）记该市26个景点的交通平均得分为$\overline{x_1}$，安全平均得分为$\overline{x_2}$，写出$\overline{x_1}$和$\overline{x_2}$的大小关系.（只写结果）

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PBC\perp$平面$ABCD$. $\triangle PBC$是等腰三角形，且$PB=PC=3$. 在梯形$ABCD$中，AB∥DC，$AD\perp DC$，$AB=5$，$AD=4$，$DC=3$



（1）求证： AB // 平面 PDC ；

（2）求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值；

（3）在线段 AP 上是否存在点 H ，使得 $BH\perp$ 平面 ADP ？请说明理由.

18. 已知函数 $f(x)=xe^x+ax^2+2ax$ （ $a\in\mathbf{R}$ ）

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $3x+y=0$ ，求 a 的值；

（2）当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a<0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

19. 已知抛物线 $C:y^2=2x$.

（1）写出抛物线 C 的直线方程，并求出抛物线 C 的焦点到准线的距离；

（2）过点 $(2,\ 0)$ 且斜率存在的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 A ，B ，且点 B 关于 x 轴的对称点为 D ，直线 AD 与 x 轴交于点 M .

1）求点 M 的坐标；

2）求 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OAB$ 面积之和的最小值.

20. 若无穷数列 $\{a\}$ 满足：存在 $a_p=a_q$ （ p ， $q\in\mathbf{N}^*$ ， $p>q$ ），并且只要 $a_p=a_q$ ，就有 $a_{p+i}=ta_{q+I}$（ t 为常数，$i=1$，2，3，…），则成 $\{a_n\}$ 具有性质 T .

（1）若 $\{a_n\}$ 具有性质 T ，且 $t=3$ ， $a_1=4$ ， $a_2=5$ ， $a_4=1$ ， $a_5=5$ ， $a_7+a_8+a_9=36$ ，求 a_3 ；

（2）若无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n=2^n+b$ （ $b\in\mathbf{R}$ ），证明存在无穷多个 b 的不同取值，使得数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T ；

（3）设 $\{b_n\}$ 是一个无穷数列，数列 $\{a_n\}$ 中存在 $a_p=a_q$ （ p ， $q\in\mathbf{N}^*$ ， $p>q$ ），且 $a_{n+1}=b_n\cos a_n$ （ $n\in\mathbf{N}^*$ ），求证：“ $\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 a_1 ， $\{a_n\}$ 都具有性质 T ”的充分不必要条件.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【分析】可求出集合 A，然后进行并集的运算即可.

【解答】解：$A=\{x|x>2\}$；

$\therefore A\cup B=[1，+\infty)$.

故选：D.

【点评】考查描述法、区间表示集合的概念，以及并集的运算.

2.【分析】在△ABC 中，利用正弦定理转化求解即可.

【解答】解：由 $c=AB=1$，$b=AC=\sqrt{2}$，$\angle C=\frac{\pi}{6}$，$c<b$，则 $C<B$，

根据正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得：$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because \angle B$ 为三角形的内角，$\therefore \angle B=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，

故选：D.

【点评】此题考查了正弦定理以及特殊角的三角函数值，熟练掌握定理及公式是解本题的关键.

3.【分析】由已知中的程序语句可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

【解答】解：模拟程序的运行，可得

$k=0$，$S=1$

满足条件 $k<3$，执行循环体，$k=1$，$S=1+3=4$

满足条件 $k<3$，执行循环体，$k=2$，$S=4+9=13$

满足条件 $k<3$，执行循环体，$k=3$，$S=13+27=40$

此时，不满足条件 $k<3$，退出循环，输出 S 的值为 40.

故选：C.

【点评】本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题.

4.【分析】首先对方程进行转换，进一步可利用点到直线的距离公式的应用求出结果.

【解答】解：直线 l：$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$，

转换为直角坐标方程为：$x+y-2=0$.

圆 C：$\rho=2\cos\theta$，

转换为直角坐标方程为：$x^2+y^2=2x$，

整理得：$(x-1)^2+y^2=1$，

所以圆心（1，0）到直线 $x+y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1=r$，

故：直线与圆相交但不过圆心．

故选：*B*．

【点评】本题考查的知识要点：参数方程和极坐标方程与直角坐标方程的转化．点到直线的距离公式的应用．

5．【分析】根据题意，由任意角三角函数的定义可得 *A*、*B* 的坐标，由数量积的计算公式可得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$=cosαcosβ+sinαsinβ，由和差公式分析可得答案．

【解答】解：根据题意，角 α，β 均以 *Ox* 为始边，终边与单位圆 *O* 分别交于点 *A*，*B*，

则 *A*（cosα，sinα），*B*（cosβ，sinβ），

则有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$=cosαcosβ+sinαsinβ=cos（α﹣β）；

故选：*C*．

【点评】本题考查三角函数中和差公式的应用，涉及向量数量积的坐标计算公式，属于基础题．

6．【分析】由 $2^x=x^2$，$x\in[0，+\infty)$，解得 $x=2$，或 4．对 *a* 分类讨论即可得出，函数 *f*（*x*）在[0，+∞）上单调情况，

【解答】解：由 $2^x=x^2$，$x\in[0，+\infty)$，解得 $x=2$，或 4．

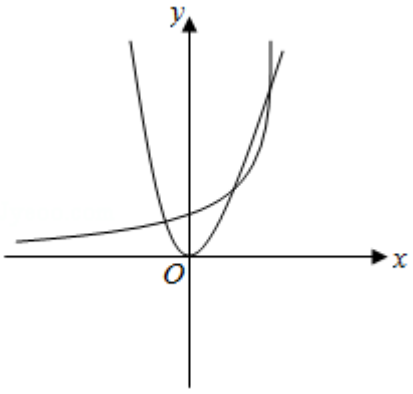
函数 $f(x)=\begin{cases}2^x，& x\geqslant a\\ x^2，& x<a\end{cases}$，函数 *f*（*x*）在[0，+∞）上单调递增，

可得：$a\geqslant 0$，且 $a\notin(2，4)$．

$a\leqslant 0$ 时，$x\geqslant a$ 时，$f(x)=2^x$，在[0，+∞）上单调递增．

∴“$a\leqslant 0$”是“函数 *f*（*x*）在[0，+∞）上单调递增”充分不必要条件．

故选：*A*．



【点评】本题考查了函数的单调性、简易逻辑的判定方法、分类讨论方法，考查了推理能力与数形结合方法，属于基础题．

7．【分析】由题意可得，冠军得分比其他参赛人员高，且获胜场次比其他人都少，所以冠军与其他匹配场次中，平均至少为 3 场，分别对于 4，5，6 分类讨论即可判断

【解答】解：由题意可得，冠军得分比其他参赛人员高，且获胜场次比其他人都少，所以冠军与其他匹配场次中，平均至少为 3 场，

A 选项：若最少 4 人，当冠军 3 次平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平局，最低得 3 分，故 *A* 不成立，

B 选项：若最少 5 人，当冠军 1 负 3 平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平，最低得 3 分，不成立，

当冠军 1 胜 3 平局时，得 5 分，其他人至少 2 胜 1 平，最低得 5 分，不成立，故 *B* 不成立，

C 选项：若最少 6 人，当冠军 2 负 3 平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平，最低得 3 分，不成立，

当冠军 1 胜 4 平局时，得 6 分，其他人至少 2 胜 1 平，最低得 5 分，成立，故 *C* 成立，

D 选项：7＞6，故不为最少人数，故不成立，

故选：*C*.

【点评】本题考查了逻辑推理问题，关键掌握题干的意义，属于中档题

8.【分析】根据“好集”的定义，可解关于 x_1，x_2，x_3 的方程组，用 x_2 把另外两个元素表示出来，再根据“集合 $M=\{x||x|\leqslant 100, x\in \mathbf{Z}\}$，通过 x_1，x_2，$x_3\in M$”构造出关于 x_2 的不等式，求出 x_2 中最大的元素．可以求出 x_2 的最大值，从而确定“β 等差数列的个数．

【解答】解：∵$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_3}$，且 $x_1+x_3=2x_2$，可得：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{2x_2-x_1}$，

∴（x_1-x_2）（x_1+2x_2）＝0，

∴$x_1=x_2$（舍），或 $x_1=-2x_2$，∴$x_3=4x_2$，

令 $-100\leqslant 4x_2\leqslant 100$，得 $-25\leqslant x_2\leqslant 25$，

∴“β 等差数列”的个数为 2×25＝50．

故选：*B*.

【点评】这是一道新定义题，关键是理解好题意，将问题转化为方程（组）或不等式问题，则问题迎刃而解．

二、填空题（每题 5 分，满分 30 分，将答案填在答题纸上）

9.【分析】利用复数的运算法则即可得出．

【解答】解：原式＝$\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2i\cdot(-i)}=-\frac{1}{2}i$.

故答案为：$-\frac{1}{2}i$.

【点评】本题考查了复数的运算法则，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

10.【分析】利用双曲线方程求出 *a*，*c*，然后求解离心率，求出渐近线方程，即可求解两条渐近线的夹角．

【解答】解：双曲线 $x^2-y^2=\lambda$（λ≠0），

可得 $a=\sqrt{|\lambda|}$，$c=\sqrt{2|\lambda|}$，所求双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

双曲线的渐近线方程为：$y=\pm x$，

所以该双曲线的两条渐近线的夹角是 90°．

故答案为：$\sqrt{2}$；90°．

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，是基本知识的考查．

11.【分析】由已知求得 *n*，写出二项展开式的通项，由 *x* 的指数为 -3 求得 *r* 值，则答案可求．

【解答】解：由已知可得 $2^n=8$，则 $n=3$.

∴$(x^3-\frac{1}{x})^n=(x^3-\frac{1}{x})^3$,

其二项展开式的通项$T_{r+1}=C_3^r\cdot(x^3)^{3-r}\cdot(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r\cdot C_3^r\cdot x^{9-4r}$.

取 9﹣4r=﹣3，得 r=3.

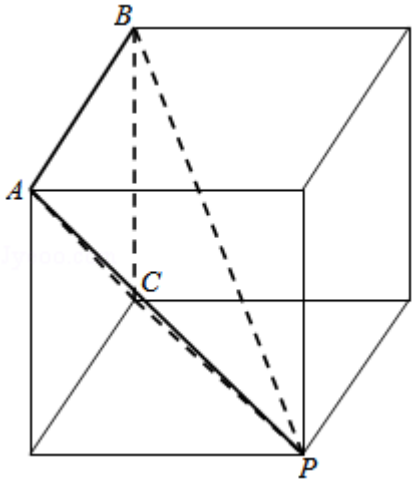
∴展开式中含$\frac{1}{x^3}$项的系数为﹣1.

故答案为：3；﹣1.

【点评】本题考查二项式系数的性质，关键是熟记二项展开式的通项，是基础题.

12.【分析】将该几何体放入正方体中，且棱长为 1，由三视图得出该三棱锥的各个侧面中直角三角形的个数.

【解答】解：将该几何体放入正方体中，且棱长为 1，



由三视图可知该三棱锥为 P﹣ABC，

由正方体的结构特征知，

该三棱锥的各个侧面中，$AB\perp BC$，$\triangle ABC$ 是直角三角形，

$AB\perp AP$，$\triangle PAB$ 是直角三角形，

$BC\perp PC$，$\triangle PBC$ 是直角三角形，

$AC=PA=PC$，$\triangle PAC$ 不是直角三角形，

所以直角三角形有 3 个.

故答案为：3.

【点评】本题考查了空间几何体三视图的应用问题，是基础题.

13.【分析】由约束条件$\begin{cases}y\geqslant 0\\ |x|+y\leqslant 2\end{cases}$作出三角形区域，结合直线 y+1=k（x+1）过定点 P（﹣1，﹣1），对 k 分类分析得答案.

【解答】解：由$\begin{cases}y\geqslant 0\\ |x|+y\leqslant 2\\ y+1\geqslant k(x+1)\end{cases}$，得$\begin{cases}y\geqslant 0\\ x\geqslant 0\\ x+y\leqslant 2\\ y+1\geqslant k(x+1)\end{cases}$或$\begin{cases}y\geqslant 0\\ x\leqslant 0\\ -x+y\leqslant 2\\ y+1\geqslant k(x+1)\end{cases}$.

直线 y+1=k（x+1）过定点 P（﹣1，﹣1），

不等式组$\begin{cases}y\geqslant 0\\ |x|+y\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域为△*ABC* 及其内部区域，

当 $k>0$ 时，不等式 $y+1\geqslant k(x+1)$ 表示的区域在直线 $y+1=k(x+1)$ 的左上方，

当 $0<k\leqslant\frac{1}{3}$时，*D* 为三角形，当 $k>\frac{1}{3}$时，*D* 为四边形，故①错误；

当 $k<0$ 时，不等式 $y+1\geqslant k(x+1)$ 表示的区域在直线 $y+1=k(x+1)$ 的右上方，

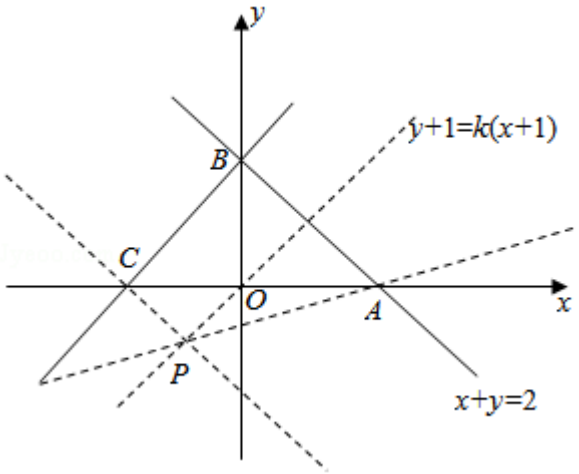
当 $k\geqslant -1$ 时，*D* 为三角形，当 $k>-1$ 时，*D* 为四边形，故②错误；

当 $k=\frac{1}{3}$时，$S=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$，故③正确；

当 $0<k\leqslant\frac{1}{3}$时，*S* 为定值 4，故④正确.

正确的序号是③④.

故答案为：③④.



【点评】本题考查简单的线性规划，考查分类讨论、数形结合等数学思想方法，是中档题.

14.【分析】设 *M* 为 *AB* 的中点，求出 *M* 到 *CD* 的距离，即可得出 *S*（*x*）的最小值，根据三棱锥的对称性得出 *S*（*x*）的周期.

【解答】解：取 *AB* 的中点 *M*，连结 *CM*，*DM*，

∵*DA*＝*DB*，*CA*＝*CB*，

∴*AB*⊥*CM*，*AB*⊥*DM*，

∴*AB*⊥平面 *CDM*，∴*AB*⊥*CD*.

∵$AB=\sqrt{2}$，*AC*＝*BC*＝*CD*＝1，

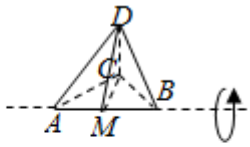
∴*AC*⊥*BC*，$CM=DM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴*CM*⊥*DM*，

∴*M* 到 *CD* 的距离为$\frac{1}{2}$.

∴当 *CD*⊥α 时，*S*（*x*）取得最小值$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

由三棱锥的对称性可知 *S*（*x*）的最小正周期为 π.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$，π．





【点评】本题考查了棱锥的几何特征，投影面积的计算，属于中档题．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15.【分析】（1）根据函数 $f(x)$ 的图象过点（$\frac{\pi}{2}$，1）求出 a 的值，

再化 $f(x)$ 为正弦型函数，求出它的单调递增区间；

（2）求出 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时 $f(x)$ 的最小值，再求 m 的取值范围．

【解答】解：（1）函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{2}$，1），

$\therefore 2\sin\frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2})-a=1$，

即 $2-a=1$，解得 $a=1$；

$\therefore$ 函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-1$

$=2\sin^2x+2\sin x\cos x-1$

$=2\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x-1$

$=\sin 2x-\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$；

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

解得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为$[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$；

（2）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

$\therefore\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})\geqslant\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1$；

又不等式 $f(x)\geqslant m$ 恒成立，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $m\leqslant -1$．

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质的应用问题，也考查了三角恒等变换问题，是基础题．

16.【分析】（1）根据古典概型概率公式得出结论；

（2）利用超几何分布的知识求出分布列和数学期望；

（3）根据两种得分的数据离散程度进行判断.

【解答】解：（1）由图象可知交通得分排名前 5 名的景点中，安全得分大于 90 分的景点有 3 个，

∴从交通得分排名前 5 名的景点中任取 1 个，其安全得分大于 90 分的概率为$\frac{3}{5}$.

（2）结合两图象可知景点总分排名前 6 名的景点中，安全得分不大于 90 分的景点有 2 个，

ξ 的可能取值为 0，1，2.

P（ξ=0）$=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P$（ξ=1）$=\frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P$（ξ=2）$=\frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

∴ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

∴E（ξ）$=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

（3）由图象可知 26 个景点的交通得分全部在 80 分以上，主要集中在 85 分附近，

安全得分主要集中在 80 分附近，且 80 分以下的景点接近一半，故而$\overline{x_1}>\overline{x_2}$.

【点评】本题考查了古典概率的概率计算，离散型随机变量的分布列，属于中档题.

17.【分析】（1）由 $AB \parallel CD$ 即可得出 $AB \parallel$ 平面 PDC；

（2）建立空间坐标系，求出平面 APB 和平面 PBC 的法向量，计算法向量的夹角得出二面角的大小；

（3）设$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AP}$，求出$\overrightarrow{BH}$的坐标，令$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AP}$根据方程组是否有解及 λ 的范围得出结论.

【解答】（1）证明：∵$AB \parallel CD$，$AB\not\subset$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，

∴$AB \parallel$ 平面 PDC.

（2）解：∵$ABCD$ 是直角梯形，$AB \parallel DC$，$AD\perp DC$，$AB=5$，$AD=4$，$DC=3$，

∴$BC=\sqrt{4^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$，又 $PB=PC=3$，∴P 到 BC 的距离为$\sqrt{3^2-5}=2$，

∵平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，∴P 到平面 $ABCD$ 的距离为 2.

以 D 为原点，以 DA，DC，及平面 $ABCD$ 过 D 的垂线为坐标轴建立空间坐标系如图所示：

∴A（4，0，0），B（4，5，0），C（0，3，0），P（2，4，2），

∴$\overrightarrow{PB}$=（2，1，﹣2），$\overrightarrow{AB}$=（0，5，0），$\overrightarrow{CB}$=（4，2，0），

设平面 APB 的法向量为$\vec{m}$=（x_1，y_1，z_1），平面 PBC 的法向量为$\vec{n}$=（x_2，y_2，z_2），

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} 2x_1+y_1-2z_1=0 \\ 5y_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} 2x_2+y_2-2z_2=0 \\ 4x_2+2y_2=0 \end{cases}$，

令 $x_1=1$，$x_2=1$ 可得 $\vec{m}=$（1，0，1），$\vec{n}=$（1，－2，0），

$\therefore \cos\langle \vec{m}, \vec{n}\rangle = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

由图形可知二面角 $A-PB-C$ 为锐二面角，

$\therefore$ 二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

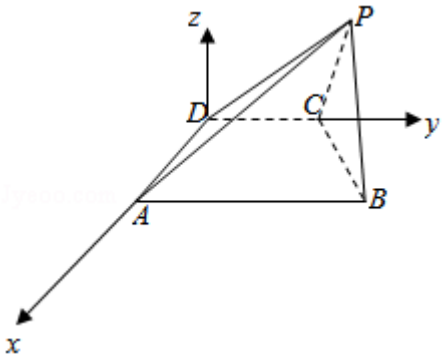
（3）解：$\vec{AP}=$（－2，4，2），$\vec{DA}=$（4，0，0），

假设 AP 上存在点 H 使得 $BH\perp$ 平面 ADP，则 $\vec{BH}\perp\vec{DA}$，$\vec{BH}\perp\vec{AP}$，

不妨设 $\vec{AH}=\lambda\vec{AP}=$（－2λ，4λ，2λ）（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），则 $\vec{BH}=\vec{BA}+\vec{AH}=$（－2λ，4λ－5，2λ），

$\therefore \begin{cases} -8\lambda=0 \\ 4\lambda+16\lambda-20+4\lambda=0 \end{cases}$，不等式组无解.

$\therefore$ 线段 AP 上不否存在点 H，使得 $BH\perp$ 平面 ADP.



【点评】本题考查了线面平行的判定，二面角的计算，考查空间向量在立体几何值的应用，属于中档题.

18.【分析】（1）先对函数 f（x）求导得 f'（x），根据切线方程得 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$，从而求出 a 的值；

（2）对函数 f（x）求导得 f'（x）=（x+1）（e^x+2a），对 ln（－2a）和－1 的大小进行分类讨论，确定函数 f（x）的单调性，根据函数 f（x）的极值的正负以及 f（0）=0，得到函数 f（x）的零点个数.

【解答】解：（1）f'（x）=（x+1）（e^x+2a），

因为曲线 $y=f$（x）在点（0，f（0））的切线方程为 3x+y=0，

所以，f（0）=0，f'（0）=－3，由 e^0+2a=－3，得 a=－2；

（2）当 $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$ 时，令 f'（x）=（x+1）（e^x+2a）=0.

①当 ln（－2a）＜－1 时，即 $a\in(-\frac{1}{2e}, 0)$ 时，

当 $x<ln$（－2a）时，f'（x）＞0；当 ln（－2a）＜x＜－1 时，f'（x）＜0；

当 x＞－1 时，f'（x）＞0，

所以，函数 $f(x)$ 在（$ln(-2a)$，-1）上单调递减，

在（$-\infty$，$ln(-2a)$）和（-1，$+\infty$）上单调递增，

又因为 $f(ln(-2a))=aln^2(-2a)<0$，$f(0)=0$，所以，函数 $f(x)$ 有一个零点；

②当 $ln(-2a)=-1$ 时，即当 $a=-\frac{1}{2e}$ 时，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)\geqslant 0$，

此时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又因为 $f(0)=0$，所以，函数 $f(x)$ 只有一个零点；

③当 $-1<ln(-2a)<0$ 时，即当 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{2e}$ 时，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<ln(-2a)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>ln(-2a)$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在（-1，$ln(-2a)$）上单调递减，

在（$-\infty$，-1）和（$ln(-2a)$，$+\infty$）上单调递增，

又因为 $f(-2)=-2e^{-2}+4a-4a=-2e^{-2}<0$，$f(-1)=-a-\frac{1}{e}$，$f(ln(-2a))=aln^2(-2a)<0$，$f(0)=0$，

所以当 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{2e}$ 时，此时 $f(-1)=-a-\frac{1}{e}<0$，函数 $f(x)$ 有一个零点；

当 $a=-\frac{1}{e}$ 时，此时 $f(-1)=0$，函数 $f(x)$ 有两个零点；

当 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{e}$ 时，此时，$f(-1)=-a-\frac{1}{e}<0$，函数 $f(x)$ 有三个零点；

④当 $ln(-2a)=0$ 时，即当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，显然函数 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述，当 $-\frac{1}{e}<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点；

当 $a\in\{-\frac{1}{e},-\frac{1}{2}\}$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；

当 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点.

【点评】本题考查导数的几何意义，关键在于利用对函数求导，抓住切点坐标以及切线的斜率的求解；同时也考查了函数零点个数的分类讨论，问题的关键在于利用导数确定函数的单调性，属于难题.

19.【分析】（1）由题意可知 $p=1$，抛物线的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，抛物线 C 的焦点到准线的距离为 1；

（2），1）：设过点（2，0）的直线 l：$x=my+2$，根据韦达定理可得 $y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-4$，即可求出直线 AD 的方程，令 $y=0$，即可求出 x 的值，

2）：$S_{\triangle OAM}+S_{\triangle OAB}=2y_1+\frac{4}{y_1}\geqslant 2\sqrt{2y_1\cdot\frac{4}{y_1}}=4\sqrt{2}$，利用基本不等式即可求出.

【解答】解：（1）由题意可知 $p=1$，抛物线的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，抛物线 C 的焦点到准线的距离为 1，

（2），1）设过点（2，0）的直线 l：$x=my+2$，

代入①，整理得 $y^2-2my-4=0$，

设 l 与 C 的交点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$D(x_2, -y_2)$，且令由 $y_1>0$，

则 $y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-4$，$\triangle=4m^2+16>0$，

∴直线 AD 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

即 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{m(y_1-y_2)}(x-x_1)$，

即 $y-y_1=\frac{2}{y_1-y_2}(x-\frac{1}{2}y_1^2)$，

当令 $y=0$，$(y_1-y_2)\cdot(y_1)=2x-y_1^2$，

∴$2x=(y_1-y_2)\cdot(-y_1)+y_1^2=y_1y_2=-4$

∴$x=-2$，

∴$M(-2, 0)$，

2）$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}\times2\times y_1$，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times2\times y_1+\frac{1}{2}\times2\times|y_2|$，

则 $S_{\triangle OAM}+S_{\triangle OAB}=y_1+y_1+|y_2|=2y_1+|y_2|=2y_1+|\frac{-4}{y_1}|=2y_1+\frac{4}{y_1}\geqslant2\sqrt{2y_1\cdot\frac{4}{y_1}}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $2y_1=\frac{4}{y_1}$ 时，即 $y_1=\sqrt{2}$ 时等号成立，

故△OAM 与△OAB 面积之和的最小值 $4\sqrt{2}$

【点评】本题考查了直线和抛物线的位置关系，考查了韦达定理，考查了运算能力和转化能力，属于中档题.

20.【分析】（1）推导出 $a_5=a_2=5$，从而 $a_6=3a_3$，$a_7=3a_4=3$，$a_8=3a_5=15$，$a_9=3a_6=9a_3$，$a_9=9a_3=21-a_7-a_8=36-3-15=18$，由此能求出 a_3.

（2）$a_1=2+b$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，若存在 $a_p=a_q$（$p>q$），则 $q=1$，取 $b=2^{p-1}-2$，（$p\in\mathbf{N}$，且 $p\geqslant2$，p 为常数），则 $a_p=2^{p-1}=a_1$，对 $t=2^{p-1}$，由此能求出存在无穷多个 b 的不同取值，使得数列$\{a_n\}$具有性质 T.

（3）当$\{b_n\}$为常数列时，有 $b_n=m$，$a_{n+1}=m\cos a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），对任意的正整数 a_1，∵存在 $a_p=a_q$，则由 $m\cos a_p=m\cos a_q$，必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$ 而 $a_{p+i}=a_{q+i}$（$i=1, 2, 3, \cdots$），从而$\{a_n\}$具有性质 T，“$\{b_n\}$为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$都具有性质 T”的充分条件，取 $b_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$，（$k\in\mathbf{N}^*$），推导出$\{a_n\}$具有性质 T，但$\{b_n\}$不为常数列，由此能证明“$\{b_n\}$为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$都具有性质 T”的充分不必要条件.

【解答】解：（1）∵$\{a_n\}$具有性质 T，且 $t=3$，$a_1=4$，$a_2=5$，$a_4=1$，$a_5=5$，$a_7+a_8+a_9=36$，

∴$a_5=a_2=5$，∴$a_6=3a_3$，$a_7=3a_4=3$，$a_8=3a_5=15$，$a_9=3a_6=9a_3$，

$a_9=9a_3=21-a_7-a_8=36-3-15=18$，

解得 $a_3=2$.

证明：（2）∵无穷数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n+b$（$b\in\mathbf{R}$），

∴$a_1=2+b$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，

若存在 $a_p=a_q$（$p>q$），则 $q=1$，

取 $b=2^{p-1}-2$，（$p\in\mathbf{N}$，且 $p\geqslant 2$，p 为常数），

则 $a_p=2^{p-1}=a_1$，对 $t=2^{p-1}$，

有 $a_{p+i}=2^{p+i-1}=2^{p-1}a_{1+i}=ta_{1+i}$（$i=1$，2，3，…），

∴存在无穷多个 b 的不同取值，使得数列$\{a_n\}$具有性质 T.

（3）当$\{b_n\}$为常数列时，有 $b_n=m$，（常数），

$a_{n+1}=m\cos a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），

对任意的正整数 a_1，∵存在 $a_p=a_q$，则由 $m\cos a_p=m\cos a_q$，必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$，

进而由（2）得 $a_{p+i}=a_{q+i}$（$i=1$，2，3，…），这时 $t=1$，$a_{p+i}=ta_{q+i}$，（$i=1$，2，3，…），

∴$\{a_n\}$具有性质 T，

∴“$\{b_n\}$为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$都具有性质 T”的充分条件，

取 $b_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$，（$k\in\mathbf{N}^*$），

对任意正整数 a_1，由 $a_n=b_{n-1}\cos a_{n-1}$（$n>2$，$n\in\mathbf{N}$），

得 $a_2=b_1\cos a_1=\frac{\pi}{2}\cos a_1$，

∵a_1 为正整数，∴$a_2\neq 0$，且 $a_2\neq a_1$，

$a_3=b_2\cos a_2=0$，$a_4=b_3\cos a_3=\frac{\pi}{2}$，…，

∴当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ \frac{\pi}{2}, & n=2k+2\end{cases}$，（$k\in\mathbf{N}^*$），

对任意 p，q，则 p，q 同为奇数或同为偶数，

①若 p，q 同为偶数，则 $a_{p+i}=a_{q+i}$，（$i=1$，2，3，…）成立，

②若 p，q 同为奇数，则 $a_{p+i}=a_{q+i}$，（$i=1$，2，3，…）成立，

∴对于任意 p，q，满足 $a_p=a_q$，则取 $t=1$，$a_{p+i}=1\times a_{q+i}$，

故$\{a_n\}$具有性质 T，但$\{b_n\}$不为常数列，

∴“$\{b_n\}$为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$都具有性质 T”的充分不必要条件.

【点评】本题考查数列的第 3 项的求法，考查存在无穷多个 b 的不同取值，使得数列$\{a_n\}$具有性质 T 的证明，考

查“$\{b_n\}$为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$都具有性质 T”的充分不必要条件，考查推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题.