# 2018 北京朝阳高三二模

# 数　　学（文）

**第I卷（共 40 分）**

**一、选择题：本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 1\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$(-\infty,2]$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(1,2)$　　D．$[1,+\infty)$

2.计算 $(1-i)^2=$（　　）

A．$2i$　　B．$-2i$　　C．$2-i$　　D．$2+i$

3.已知 $x$，$y$ 满足不等式 $\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ y\leqslant 1\end{cases}$ 则 $z=y-3x$ 的最小值是（　　）

A．1　　B．$-3$　　C．$-1$　　D．$-\dfrac{7}{2}$

4.在 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，则 $c=$（　　）

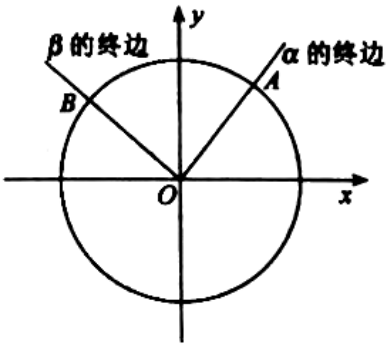
A．$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　C.$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5.“$0<a<1$ 且 $0<b<1$”是“$\log_a b>0$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6.如图，角 $\alpha$，$\beta$ 均以 $Ox$ 为始边，终边与单位圆 $O$ 分别交于点 $A$，$B$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　　）




A．$\sin(\alpha-\beta)$　　B．$\sin(\alpha+\beta)$　　C.$\cos(\alpha-\beta)$　　D．$\cos(\alpha+\beta)$

7.已知定义在 $R$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $a+b>0$，$b+c>0$，，$a+c>0$，则 $f(a)+f(b)+f(c)$ 的值（　　）

A．恒为正　　B．恒为负　　C.恒为 0　　D．无法确定

8.某校象棋社团组织中国象棋比赛，采用单循环赛制，即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场，胜者得 2 分，负者得 0 分，平局两人各得 1 分.若冠军获得者得分比其他人都多，且获胜场次比其他人都少，则本次

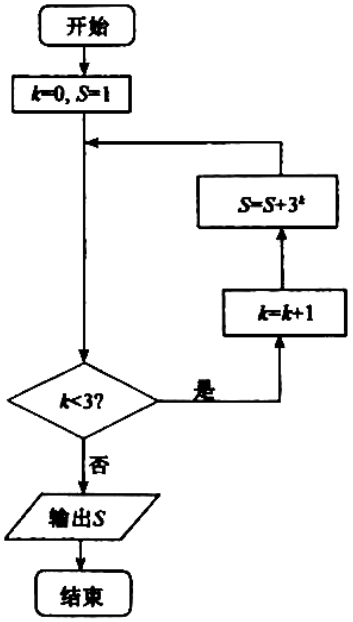
比赛的参赛人数至少为（　　）

A．4　　B．5　　C.6　　D．7

**第II卷（共 110 分）**

**二、填空题（每题 5 分，满分 30 分，将答案填在答题纸上）**

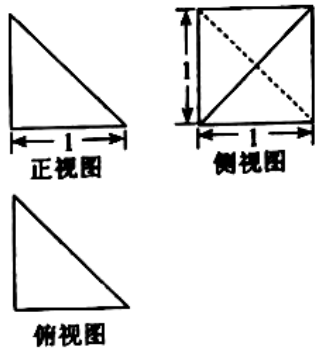
9.执行如图所示的程序框图，则输出的 $S=$_____.




10.双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标是_____；渐近线方程是_____.

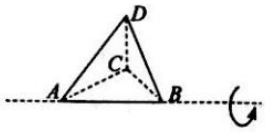
11.已知 $x>0$， $y>0$，且满足 $x+y=4$，则 $\lg x+\lg y$ 的最大值为_____.

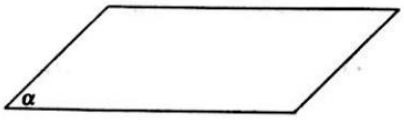
12.已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积是_____.




13.在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $P$（不过原点）到 $x$ 轴， $y$ 轴的距离之和的 2 倍等于点 $P$ 到原点距离的平方，则点 $P$ 的轨迹所围成的图形的面积是_____.

14.如图，已知四面体 $ABCD$ 的棱 $AB$ // 平面 $\alpha$，且 $AB=\sqrt{2}$，其余的棱长均为1.四面体 $ABCD$ 以 $AB$ 所在的直线为轴旋转 $x$ 弧度，且始终在水平放置的平面 $\alpha$ 上方.如果将四面体 $ABCD$ 在平面 $\alpha$ 内正投影面积看成关于 $x$ 的函数，记为 $S(x)$，则函数 $S(x)$ 的最小值为_____； $S(x)$ 的最小正周期为_____.




**三、解答题 （本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）**

15.已知函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},1)$， $a\in\mathbf{R}$ .

（1）求 $a$ 的值，并求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值.

16.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=pn^2+qn$ （ $p$， $q\in\mathbf{R}$， $n\in\mathbf{N}^*$ ）且 $a_1=3$， $S_4=24$ .

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2^{a_n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

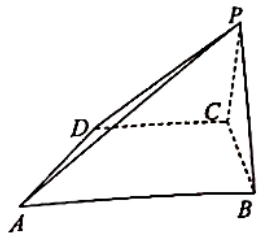
17.

| 年份 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 侧柏 | 3200 | 3600 | 3300 | 3900 | 3500 | 3300 | 3900 | 3600 | 4100 | 4000 |
| 银杏 | 3400 | 3300 | 3600 | 3600 | 3700 | 4200 | 4400 | 3700 | 4200 | 4200 |

（1）根据表中数据写出这10年内银杏数列的中位数，并计算这10年栽种银杏数量的平均数；

（2）从统计的数据中，在栽种侧柏与银杏数量之差的绝对值不小于300株的年份中，任意抽取2年，恰有1年栽种侧柏的数列比银杏数量多的概率.

18.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$ .△$PBC$ 是等腰三角形，且 $PB=PC=3$ .四边形 $ABCD$ 是直角梯形， $AB\parallel DC$ ， $AD\perp DC$ ， $AB=5$ ， $AD=4$ ， $DC=3$




（1）求证： $AB\parallel$ 平面 $PDC$ ；

（2）当平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$ 时，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（3）请在图中所给的五个点 $P$， $A$， $B$， $C$， $D$ 中找出两个点，使得这两点所在的直线与直线 $BC$ 垂直，并给出证明.

19. 已知椭圆 $W$： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （ $a>b>0$ ）的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，其左顶点 $A$ 在圆 $O$： $x^2+y^2=4$ 上（ $O$ 为坐标原点）.

（1）求椭圆$W$ 的方程；

（2）过点$A$作直线$AQ$交椭圆$W$于另外一点$Q$，交$y$轴于点$R$， $P$为椭圆$W$上一点，且$OP$ // $AQ$，求证：

$\dfrac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}$为定值.

20. 已知函数$f(x)=xe^x$， $g(x)=ax+1$， $a\in\mathbf{R}$.

（1）若曲线$y=f(x)$在点$(0，f(0))$处的切线与直线$y=g(x)$垂直，求$a$的值；

（2）若方程$f(x)-g(x)=0$在$(-2，2)$上恰有两个不同的实数根，求$a$的取值范围；

（3）若对任意$x_1\in[-2，2]$，总存在唯一的$x_2\in(-\infty，2)$，使得$f(x_2)=g(x_1)$，求$a$的取值范围.

# 参考答案

**一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.【分析】可解出集合 $A$，然后进行并集的运算即可.

【解答】解：$A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x\geq 1\}$；

$\therefore A\cup B=\{x|x\geq 1\}=[1,+\infty)$.

故选：$D$.

【点评】考查描述法及区间表示集合的定义，以及并集的概念及运算.

2.【分析】利用复数的运算法则即可得出.

【解答】解：$(1-i)^2=-2i$，

故选：$B$.

【点评】本题考查了复数的运算法则，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3.【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用数形结合即可得到结论

【解答】解：由 $z=y-3x$，得 $y=3x+z$，

作出 $x$，$y$ 满足不等式 $\begin{cases}2x-y-2\leq 0\\ x+y-1\geq 0\\ y\leq 1\end{cases}$ 对应的可行域：

平移直线 $y=3x+z$，

由平移可知当直线 $y=3x+z$ 经过点 $A$ 时，

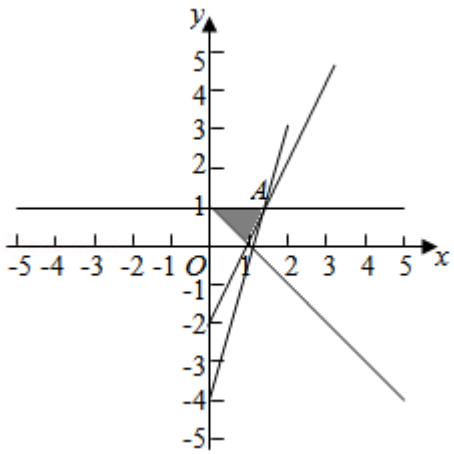
直线 $y=3x+z$ 的截距最小，此时 $z$ 取得最小值，

由 $\begin{cases}y=1\\ 2x-y-2=0\end{cases}$，解得 $A(\frac{3}{2},1)$

代入 $z=y-3x$，得 $z=1-3\times\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$，

即 $z=y-3x$ 的最小值为 $-\frac{7}{2}$.

故选：$D$.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

4.【分析】由已知利用正弦定理可求 $b$，利用三角形内角和定理，诱导公式，两角和的正弦函数公式可求 $\sin C$ 的值，进而利用正弦定理可求 $c$ 的值.

【解答】解：∵$a=1$，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，

∴由正弦定理可得：$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，可得：$\sin C=\sin(\pi-A-B)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

∴由正弦定理可得：$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

故选：$A$.

【点评】本题主要考查了正弦定理，三角形内角和定理，诱导公式，两角和的正弦函数公式在解三角形中的综合应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

5.【分析】根据对数函数的性质以及充分必要条件的定义判断即可.

【解答】解：∵$\log_a b>0=\log_a 1$，

∴$0<a<1$，$0<b<1$，或 $a>1$，$b>1$，

故 $0<a<1$ 且 $0<b<1$”是“$\log_a b>0$”的充分不必要条件，

故选：$A$.

【点评】本题考查了充分必要条件，考查对数函数的性质，是一道基础题.

6.【分析】根据题意，由任意角三角函数的定义可得 $A$、$B$ 的坐标，由数量积的计算公式可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，由和差公式分析可得答案.

【解答】解：根据题意，角 α，β 均以 $Ox$ 为始边，终边与单位圆 $O$ 分别交于点 $A$，$B$，

则 $A$（$\cos\alpha$，$\sin\alpha$），$B$（$\cos\beta$，$\sin\beta$），

则有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$；

故选：$C$.

【点评】本题考查三角函数中和差公式的应用，涉及向量数量积的坐标计算公式，属于基础题.

7.【分析】由题意利用函数的单调性和奇偶性的性质，求得 $f(a)+f(b)+f(c)<0$，可得结论.

【解答】解：定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在[0，+∞）上单调递减，

故函数 $f(x)$ 在（－∞，0]上也单调递减，故 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减.

根据 $a+b>0$，$b+c>0$，$a+c>0$，

可得 $a>-b$，$b>-c$，$c>-a$，∴$f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-c)$，$f(c)<f(-a)$，

∴$f(a)+f(b)+f(c)<f(-b)+f(-c)+f(-a)=-f(a)-f(b)-f(c)$，

∴$f(a)+f(b)+f(c)<0$，

故选：*B*.

【点评】本题主要考查函数的单调性和奇偶性的性质，属于基础题.

8.【分析】由题意可得，冠军得分比其他参赛人员高，且获胜场次比其他人都少，所以冠军与其他匹配场次中，平均至少为 3 场，分别对于 4，5，6 分类讨论即可判断

【解答】解：由题意可得，冠军得分比其他参赛人员高，且获胜场次比其他人都少，所以冠军与其他匹配场次中，平均至少为 3 场，

*A* 选项：若最少 4 人，当冠军 3 次平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平局，最低得 3 分，故 *A* 不成立，

*B* 选项：若最少 5 人，当冠军 1 负 3 平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平，最低得 3 分，不成立，

当冠军 1 胜 3 平局时，得 5 分，其他人至少 2 胜 1 平，最低得 5 分，不成立，故 *B* 不成立，

*C* 选项：若最少 6 人，当冠军 2 负 3 平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平，最低得 3 分，不成立，

当冠军 1 胜 4 平局时，得 6 分，其他人至少 2 胜 1 平，最低得 5 分，成立，故 *C* 成立，

*D* 选项：7＞6，故不为最少人数，故不成立，

故选：*C*.

【点评】本题考查了逻辑推理问题，关键掌握题干的意义，属于中档题

**二、填空题（每题 5 分，满分 30 分，将答案填在答题纸上）**

9.【分析】由已知中的程序语句可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 *S* 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

【解答】解：模拟程序的运行，可得

$k=0$，$S=1$

满足条件 $k<3$，执行循环体，$k=1$，$S=1+3=4$

满足条件 $k<3$，执行循环体，$k=2$，$S=4+9=13$

满足条件 $k<3$，执行循环体，$k=3$，$S=13+27=40$

此时，不满足条件 $k<3$，退出循环，输出 *S* 的值为 40.

故答案为：40.

【点评】本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题.

10.【分析】利用双曲线方程，直接求解焦点坐标以及渐近线方程即可.

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，可得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{7}$，双曲线的焦点坐标是（$\pm\sqrt{7}$，0），

双曲线的渐近线方程为：$\sqrt{3}x\pm 2y=0$.

故答案为：（$\pm\sqrt{7}$，0）；$\sqrt{3}x\pm 2y=0$.

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，考查计算能力.

11.【分析】根据题意，由对数的运算性质可得 $lgx+lgy=lgxy$，结合基本不等式的性质可得 $xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^2=4$，进而结合对数的运算性质分析可得答案.

【解答】解：根据题意，$lgx+lgy=lgxy$，

又由 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=4$，则 $xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^2=4$；

则有 $lgx+lgy=lgxy\leqslant lg4$，

即 $lgx+lgy$ 的最大值为 $lg4$.

故答案为：$lg4$.

【点评】本题考查基本不等式的应用，关键是掌握基本不等式的变形.

12.【分析】由已知中的三视图可得该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥，计算出各个面的面积，可得答案.

【解答】解：由已知中的三视图可得该几何体是一个以侧视图为底面

的三棱锥，

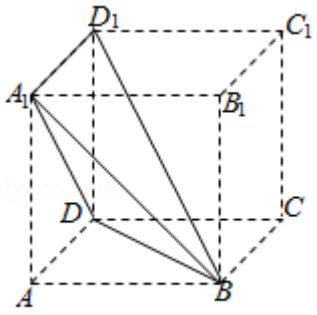
其直观图如图所示：

在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：

该几何体为图中的四面体 $D_1-A_1BD$，

体积：$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$；

故答案为：$\frac{1}{6}$.




【点评】本题考查的知识点是由三视图，求体积和表面积，根据已知的三视图，判断几何体的形状是解答的关键.

13.【分析】设出 $P$ 的坐标，求解轨迹方程，画出图形求解即可.

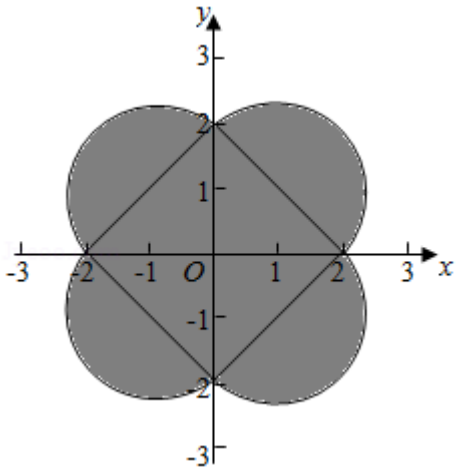
【解答】解：设 $P(x,y)$，由题意可得：$2|x|+2|y|=x^2+y^2$，

轨迹图形如图：

则点 $P$ 的轨迹所围成的图形的面积是：

$2\times(\sqrt{2})^2\pi+(2\sqrt{2})^2=8+4\pi$.

故答案为：$8+4\pi$.




【点评】本题考查轨迹方程的求法，考查数形结合以及计算能力.

14.【分析】设 $M$ 为 $AB$ 的中点，求出 $M$ 到 $CD$ 的距离，即可得出 $S(x)$ 的最小值，根据三棱锥的对称性得出 $S(x)$ 的周期.

【解答】解：取 $AB$ 的中点 $M$，连结 $CM$，$DM$，

$\because DA=DB$，$CA=CB$，

$\therefore AB\perp CM$，$AB\perp DM$，

$\therefore AB\perp$ 平面 $CDM$，$\therefore AB\perp CD$.

$\because AB=\sqrt{2}$，$AC=BC=CD=1$，

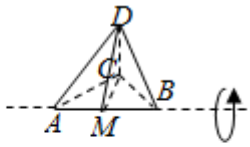
$\therefore AC\perp BC$，$CM=DM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore CM\perp DM$，

$\therefore M$ 到 $CD$ 的距离为$\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $CD\perp\alpha$ 时，$S(x)$ 取得最小值$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

由三棱锥的对称性可知 $S(x)$ 的最小正周期为 $\pi$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\pi$.







【点评】本题考查了棱锥的几何特征，投影面积的计算，属于中档题.

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）**

15.【分析】（1）首先利用点的坐标求出 $a$ 的值，进一步利用三角函数关系式的恒等变换求出函数为正弦型函数，最后求出函数的单调区间.

（2）利用正弦型函数的性质，进一步利用整体思想求出函数的最小值.

【解答】解：（1）函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{2}$，1），

故：$2-a=1$，

解得：$a=1$.

所以：$f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)$，

$=2\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x$，

$=1-\cos 2x+\sin 2x$，

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$，

令：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），

解得：$k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8}$（$k\in\mathbf{Z}$），

故函数的单调递增区间为：$[k\pi-\frac{\pi}{8}，k\pi+\frac{3\pi}{8}]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（2）由于：$x\in[0，\frac{\pi}{2}]$，

故：$2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4}，\frac{3\pi}{4}]$，

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，

即：$x=0$ 时，函数的最小值为 0.

【点评】本题考查的知识要点：三角函数关系式的恒等变换，正弦型函数的性质的应用.

16.【分析】（1）数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n=pn^2+qn$（$p$，$q\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$），可得数列$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 $d$．$a_1=3$，$S_4=24$，可得 $4\times 3+\frac{4\times 3}{2}d=24$，解得 $d$．利用通项公式可得 $a_n$.

（2）$b_n=2^{a_n}=2^{2n+1}=2\times 4^n$．利用求和公式即可得出.

【解答】解：（1）数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n=pn^2+qn$（$p$，$q\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$），可得数列$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 $d$.

$\because a_1=3$，$S_4=24$，$\therefore 4\times 3+\frac{4\times 3}{2}d=24$，解得 $d=2$.

$\therefore a_n=3+2(n-1)=2n+1$.

（2）$b_n=2^{a_n}=2^{2n+1}=2\times 4^n$.

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和 $T_n=\frac{8(4^n-1)}{4-1}=\frac{8}{3}(4^n-1)$.

【点评】本题考查了等差数列与等比数列的通项公式与求和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

17.【分析】（1）根据统计表中的数据能求出这 10 年内银杏数列的中位数和这 10 年栽种银杏数量的平均数.

（2）从统计的数据中，在栽种侧柏与银杏数量之差的绝对值不小于 300 株的年份有：2009 年，2010 年，2011 年，2013 年，2014 年，共 5 年，其中栽种侧柏的数列比银杏数量多的年份有 2009 年，2011 年，有 2 年，由此能求出在栽种侧柏与银杏数量之差的绝对值不小于 300 株的年份中，任意抽取 2 年，恰有 1 年栽种侧柏的数列比

银杏数量多的概率.

【解答】解：（1）根据统计表中的数据得：

这 10 年内银杏数列中的数字从小到大为：

3300，3400，3600，3600，3700，3700，4200，4200，4200，4400，

∴这 10 年内银杏数列的中位数是：$\frac{3700+3700}{2}$=3700.

这 10 年栽种银杏数量的平均数为：

$\overline{x}=\frac{1}{10}$（3300+3400+3600+3600+3700+3700+4200+4200+4200+4400）=3830.

（2）从统计的数据中，在栽种侧柏与银杏数量之差的绝对值不小于 300 株的年份有：

2009 年，2010 年，2011 年，2013 年，2014 年，共 5 年，

其中栽种侧柏的数列比银杏数量多的年份有 2009 年，2011 年，有 2 年，

∴在栽种侧柏与银杏数量之差的绝对值不小于 300 株的年份中，任意抽取 2 年，

基本事件总数 $n=C_5^2=10$，

恰有 1 年栽种侧柏的数列比银杏数量多包含的基本事件个数 $m=C_2^1C_3^1=6$，

∴恰有 1 年栽种侧柏的数列比银杏数量多的概率 $p=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查中位数、平均数、概率的求法，考查列举法等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

18.【分析】（1）由已知 $AB\parallel DC$，直接利用线面平行的判定证明 $AB\parallel$ 平面 $PDC$；

（2）取 $BC$ 中点 $D$，由 $PB=PC$，可得 $PD\perp BC$，结合面面垂直的性质可得 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，则 $PD$ 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高，求出底面直角梯形的面积，代入棱锥体积公式求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（3）图中 $PA\perp BC$.

由（2）知，$PD\perp BC$，作 $CG\perp AB$，在直角三角形 $CGB$ 中，可得 $\cos\angle CBG=\frac{\sqrt{5}}{5}$，再求解三角形可得 $AD\perp BC$，由线面垂直的判定可得 $BC\perp$ 平面 $PAD$，从而得到 $PA\perp BC$.

【解答】（1）证明：∵$AB\parallel DC$，且 $DC\subset$ 平面 $PDC$，$AB\not\subset$ 平面 $PDC$，

∴$AB\parallel$ 平面 $PDC$；

（2）解：取 $BC$ 中点 $D$，∵$PB=PC$，∴$PD\perp BC$，

又平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，

∴$PD\perp$ 平面 $ABCD$，则 $PD$ 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高，

在底面直角梯形 $ABCD$ 中，由 $AB=5$，$AD=4$，$DC=3$，

得 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times4\times(3+5)=16$，且 $BC=\sqrt{4^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$.

又 $PB=PC=3$，∴$PD=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$.

∴ $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 16\times 2=\frac{32}{3}$；

（3）解：图中 $PA\perp BC$.

证明如下：由（2）知，$PD\perp BC$，

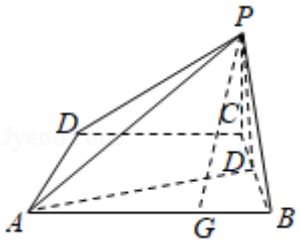
作 $CG\perp AB$，在直角三角形 $CGB$ 中，可得 $\cos\angle CBG=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

在三角形 $ADB$ 中，由余弦定理可得 $AD^2=5^2+(\sqrt{5})^2-2\times 5\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=20$，

则 $AD^2+BD^2=AB^2$，

∴$AD\perp BC$，

又 $AD\cap PD=D$，∴$BC\perp$平面 $PAD$，则 $PA\perp BC$.




【点评】本题考查直线与平面平行的判定，考查空间中直线与直线的位置关系，训练了多面体体积的求法，是中档题.

19.【分析】（1）由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由其左顶点 $A$ 在圆 $O$：$x^2+y^2=4$ 上，则 $a=2$，即可求出椭圆方程，

（2）由题意可知过点 $A$ 的直线斜率存在，设斜率为 $k$，则直线 $AQ$ 方程为 $y=k(x+2)$，由 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，可求出 $|AQ|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，对于 $y=k(x+2)$，当 $x=0$ 时，$y=2k$，则可得 $|AR|=2\sqrt{1+k^2}$，由 $OP$ 的直线方程为 $y=kx$，可得 $\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，可求出 $|OP|=2\sqrt{\frac{1+k^2}{1+4k^2}}$，即可证明.

【解答】解：（1）由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由其左顶点 $A$ 在圆 $O$：$x^2+y^2=4$ 上，则 $a=2$，

∴$c=\sqrt{3}$，

∴$b^2=a^2-c^2=1$，

∴椭圆 $W$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

证明：（2）由题意可知过点 $A$ 的直线斜率存在，

设斜率为 $k$，

则直线 $AQ$ 方程为 $y=k(x+2)$，

由$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消 $y$ 可得（$1+4k^2$）$x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，

解得 $x=-2$，或 $x=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，

$\therefore\begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}\\ y=\frac{4k}{1+4k^2}\end{cases}$，

$\therefore A$（$-2$，$0$），$Q$（$\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，$\frac{4k}{1+4k^2}$），

$\therefore|AQ|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，

对于 $y=k$（$x+2$），当 $x=0$ 时，$y=2k$，

$\therefore R$（$0$，$2k$），

$\therefore|AR|=2\sqrt{1+k^2}$，

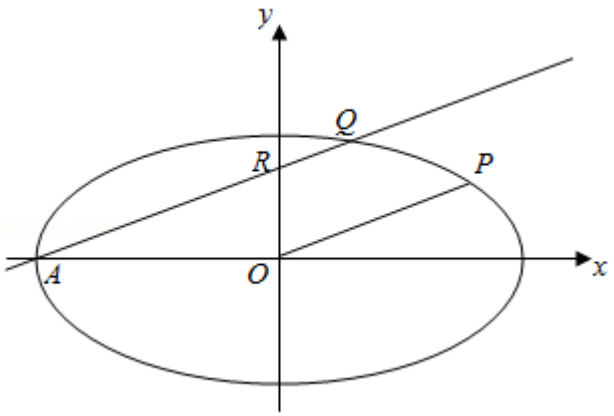
由 $P$ 为椭圆 $W$ 上一点，且 $OP/\!/AQ$，

可设 $OP$ 的直线方程为 $y=kx$，

由$\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，解得 $x^2=\frac{4}{1+4k^2}$，$y^2=\frac{4k^2}{1+4k^2}$

$\therefore|OP|=2\sqrt{\frac{1+k^2}{1+4k^2}}$，

$\therefore\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}=\frac{\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\cdot 2\sqrt{1+k^2}}{\frac{4(1+k^2)}{1+4k^2}}=2.$



【点评】本题考查了直线和椭圆的位置关系，考查了运算能力和转化能力，考查了分析问题解决问题能力，属于中档题.

20.【分析】（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线与直线 $y=g(x)$ 垂直，则 $f'(0)\cdot a=-1$，解得 $a$ 的值；

（2）若方程 $f(x)-g(x)=0$ 在（$-2$，2）上恰有两个不同的实数根，设 $h(x)=xe^x-ax-1$，然后判断 $h(x)$ 的单调性，再根据 $h(x)$ 在（$-2$，2）上有两个不同的零点，得到关于 $a$ 的不等式，进一步求出 $a$ 的取值范围；

（3）若对任意 $x_1\in[-2,2]$，总存在唯一的 $x_2\in(-\infty,2)$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$，则 $g(x_1)$ 的值域 $D$ 满足 $D\subseteq(0,2e^2]$，进而得到答案.

【解答】解：（1）$\because f'(x)=(x+1)e^x$，

$\therefore f'(0)=1$，即曲线 $y=f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线斜率为 1，

$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线与直线 $y=g(x)$ 垂直，

$\therefore a=-1$；

（2）由 $f(x)-g(x)=0$，得 $xe^x-ax-1=0$，

设 $h(x)=xe^x-ax-1$，则 $h'(x)=(x+1)e^x-a$，

设 $m(x)=(x+1)e^x-a$，则 $m'(x)=(x+2)e^x$，

$\because$ 当 $x\in(-2,2)$ 时，$x+2>0$，$e^x>0$，故 $m'(x)>0$，

$\therefore m(x)$ 在（$-2$，2）上单调递增.

设 $h'(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}-a=0$，即 $a=(x_0+1)e^{x_0}$，

则当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,2)$ 时，$h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{min}=h(x_0)=x_0e^{x_0}-ax_0-1=x_0e^{x_0}-(x_0+1)e^{x_0}\cdot x_0-1=-x_0^2\cdot e^{x_0}-1$，$h(x_0)<0$

又$\because h(x)$ 在（$-2$，2）上有两个不同的零点，

$\therefore\begin{cases}h(2)=2e^2-2a-1>0\\h(-2)=-2e^{-2}+2a-1>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a>e^{-2}+\frac{1}{2}\\a<e^2-\frac{1}{2}\end{cases}$，

故 $a$ 的取值范围是 $(e^{-2}+\frac{1}{2},\ e^2-\frac{1}{2})$

（3）由（1）中 $f'(x)=(x+1)e^x$ 得：

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，函数为减函数；

当 $x\in(-1,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数为增函数；

故当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{e}$，

当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)=-\frac{2}{e^2}$

当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=2e^2$；

①当 $a<0$ 时，由 $x_1\in[-2,2]$得：$g(x_1)\in[2a+1,-2a+1]$，

由对任意 $x_1\in[-2,2]$，总存在唯一的 $x_2\in(-\infty,2)$，

使得 $f(x_2)=g(x_1)$，$\therefore[2a+1,-2a+1]\subseteq(0,2e^2]$，

解得 $a\in[-\frac{1}{2},0)$；

②当 $a=0$ 时，由 $x_1\in[-2,2]$得：$g(x_1)=1$，

满足对任意 $x_1\in[-2,2]$，总存在唯一的 $x_2\in(-\infty,2)$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$

③当 $a>0$ 时，由 $x_1\in[-2,2]$得：$g(x_1)\in[-2a+1,2a+1]$，

由对任意 $x_1\in[-2,2]$，总存在唯一的 $x_2\in(-\infty,2)$，

使得 $f(x_2)=g(x_1)$，$\therefore[-2a+1,2a+1]\subseteq(0,2e^2]$，

解得 $a\in(0,\frac{1}{2}]$；

综上可得：$a\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

【点评】本题考查的知识点是利用导数研究函数最值，直线的位置关系，恒成立问题与存在性问题，难度较大.