2018 北京昌平高三二模

数　　学（理）

2018.5

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案作答在答题卡上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x<-1$或$x>1\}$，则$\complement_U A=$

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C．$(-1,1)$　　D．$[-1,1]$

2．若复数$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，当$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$时，则复数$z$在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=27, a_4=a_3a_5$，则$a_7=$

A．$\dfrac{1}{27}$　　B．$\dfrac{1}{9}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．3

4．设$a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.2}$，$b=\log_2 3$，$c=2^{-0.3}$，则

A．$b>c>a$　　B．$a>b>c$　　C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

5．若满足条件$\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y-1\leq 0\\ y\geq a\end{cases}$的整点$(x,y)$恰有 12 个，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则整数a的值为

A．-3　　B．-2　　C．-1　　D．0

6．设$x,y\in\mathbf{R}$，则“$x^2+y^2\leq 2$”是“$|x|\leq 1$且$|y|\leq 1$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

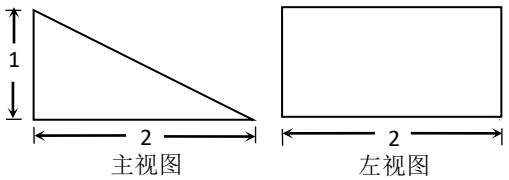
7．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的所有面中最大面的面积是

A．4

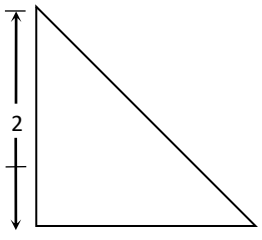
B．$\sqrt{5}$

C．2

D．$\sqrt{2}$



主视图　　左视图



俯视图

8．2011 年 7 月执行的《中华人民共和国个人所得税法》规定：公民全月工资、薪金所得不超过 3500 元的部分不必纳税，超过 3500 元的部分为全月应纳税所得额．此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额（含税级距）	税率(%)
不超过 1500 元	3
超过 1500 元至 4500 元的部分	10
超过 4500 元至 9000 元的部分	20
…	…

某调研机构数据显示，纳税人希望将个税免征额从 3500 元上调至 7000 元．若个税免征额上调至 7000 元（其它不变），某人当月少交纳此项税款 332 元，则他的当月工资、薪金所得介于

A．5000~6000 元　　B．6000~8000 元　　C．8000~9000 元　　D．9000~16000 元

第二部分（非选择题　共 110 分）

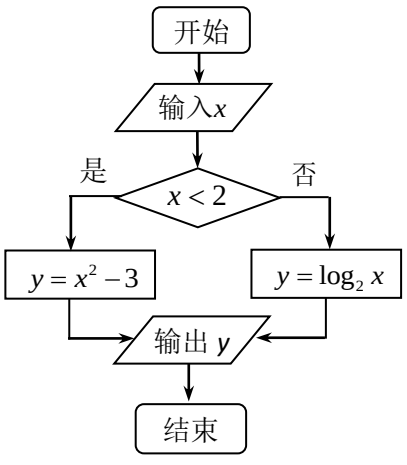
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．在二项式$(\sqrt{x}+1)^6$的展开式中，第四项的系数是_____．（用数字作答）

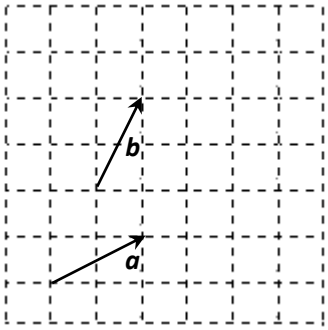
10．在ΔABC中，$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，则$BC=$_____．

11．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$，则双曲线$C$的离心率是_____．

12．执行如图所示的程序框图，若输入 x 值满足$-2<x\le 4$，则输出 y 值的取值范围是_____．



13．向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所成角的余弦值是_____;向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形的面积是_____．



14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax, & x<1,\\ \frac{a\ln x}{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

① 当$x<1$时，若函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点，则实数 a 的取值范围是_____；

② 若函数 $f(x)$ 的最大值为 1，则 $a=$_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题 13 分）

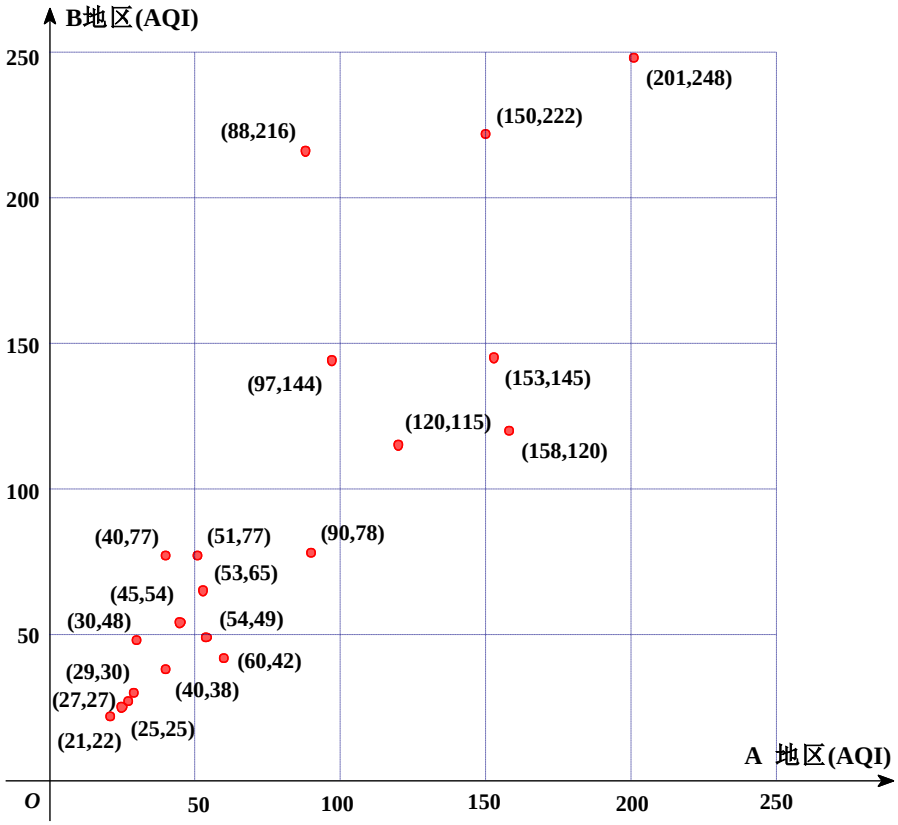
已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{3}\sin 2x$.

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最值及相应的 x 值．

16.（本小题 13 分）

为评估大气污染防治效果，调查区域空气质量状况，某调研机构从 A，B 两地区一年的数据中随机抽取了相同 20 天的观测数据，得到 A，B 两地区的空气质量指数（AQI）如下图所示：



根据空气质量指数，将空气质量状况分为以下三个等级：

空气质量指数 AQI	(0,100)	[100,200)	[200,300)
空气质量状况	优良	轻中度污染	重度污染

（Ⅰ）试估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数；

（Ⅱ）假设两地区空气质量状况相互独立，记事件 C：“A 地区空气质量等级优于 B 地区空气质量等级”．根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求事件 C 的概率．

（Ⅲ）若从空气质量角度选择生活地区居住，你建议选择 A，B 两地区哪个地区.（只需写出结论）

17.（本小题 14 分）

如图 1，在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD = 60^\circ$，$DE \perp AB$ 于点 E，将 ΔADE 沿 DE 折起到 ΔA_1DE 的位置，使 $A_1D \perp BE$，如图 2.

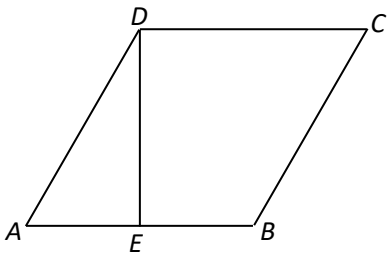


图 1

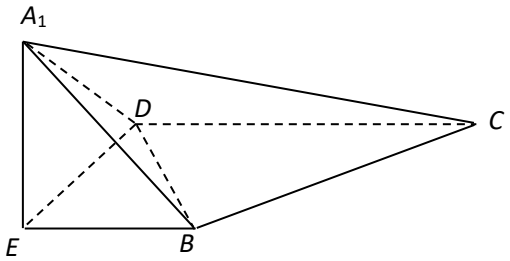


图 2

（I）求证：$A_1E \perp$ 平面 $BCDE$；

（II）求二面角 $E - A_1D - B$ 的余弦值；

（III）在线段 BD 上是否存在点 P，使平面 $A_1EP \perp$ 平面 A_1BD？若存在，求出 $\dfrac{BP}{BD}$ 的值；若不存在，说明理由.

18.（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,1)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 E 的标准方程；

（II）过右焦点 F 的直线 l（与 x 轴不重合）与椭圆交于 A,B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 $M(0,m)$，求实数 m 的取值范围.

19.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=ax^2+ax-xe^x$，$a>1$.

（I）若曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$，求 a 的值；

（II）证明：当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$ 存在唯一的极小值点为 x_0，且 $-\dfrac{1}{2}<x_0<0$.

20．（本小题 13 分）

已知正项数列$\{a_n\}$中，若存在正实数p，使得对数列$\{a_n\}$中的任意一项a_k，$\dfrac{p}{a_k}$也是数列$\{a_n\}$中的一项，称数列$\{a_n\}$为“倒置数列”，p是它的“倒置系数”.

（I）若数列：$1,4,9,x\,(x>9)$是“倒置系数”为p的“倒置数列”，求x和p的值；

（II）若等比数列$\{a_n\}$的项数是m，数列$\{a_n\}$所有项之积是T，求证：数列$\{a_n\}$是“倒置数列”，并用m和T表示它的“倒置系数”p；

（III）是否存在各项均为整数的递增数列$\{a_n\}$，使得它既是等差数列，又是“倒置数列”，如果存在，请写出一个满足条件的数列，如果不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	C	B	B	B	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9．20　　10．1 或$\sqrt{7}$　　11．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

12．$[-3,2]$　　13．$\frac{4}{5}$ ； 3　　14．$a<1$；-1

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

15．（共 13 分）

解：（I） $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π．　　----------8 分

（II）因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $0\le 2x\le\pi$，

所以 $\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$．

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-1$．　　----------13 分

16．（共 13 分）

解：（Ⅰ）从 A 地区选出的 20 天中随机选出一天，这一天空气质量状况为“优良”的频率为$1-\frac{5}{20}=0.75$，估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的频率为0.75，A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数约为$365\times 0.75\approx 274$天．----------4 分

（Ⅱ）记 A_1 表示事件：“A 地区空气质量等级为优良”；

A_2 表示事件：“A 地区空气质量等级为轻中度污染”；

B_1 表示事件：“B 地区空气质量等级为轻中度污染”；

B_2 表示事件：“B 地区空气质量等级为重度污染”，

则 A_1 与 B_1 独立， A_2 与 B_2 独立， B_1 与 B_2 互斥， $C = A_1B_1 \cup A_1B_2 \cup A_2B_2$.

所以 $P(C) = P(A_1B_1 \cup A_1B_2 \cup A_2B_2)$

$= P(A_1B_1) + P(A_1B_2) + P(A_2B_2)$

$= P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_2)$.

由所给数据得 A_1， A_2， B_1， B_2 发生的频率分别为 $\frac{3}{4}$， $\frac{1}{5}$， $\frac{1}{5}$， $\frac{3}{20}$.

故 $P(A_1) = \frac{3}{4}$， $P(A_2) = \frac{1}{5}$， $P(B_1) = \frac{1}{5}$， $P(B_2) = \frac{3}{20}$，

所以 $P(C) = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{5} + \frac{3}{20}) + \frac{1}{5} \times \frac{3}{20} = 0.2925.$ ----------10 分

（Ⅲ）从空气质量角度，建议选择 A 地区居住 . ----------13 分

17.（共 14 分）

证明：（I）因为 $DE \perp AB$，

所以 $BE \perp DE$. 又因为 $BE \perp A_1D$， $DE \cap A_1D = D$，

所以 $BE \perp$ 平面 A_1DE.

因为 $A_1E \subset$ 平面 A_1DE，

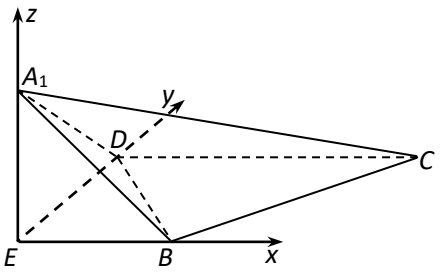
所以 $A_1E \perp BE$.

又因为 $A_1E \perp DE$，$BE \cap DE = E$，

所以 $A_1E \perp$ 平面 $BCDE$. ----------5 分

（II）因为 $A_1E \perp$ 平面 $BCDE$， $BE \perp DE$，

所以以 E 为原点，分别以 EB， ED， EA_1 为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，



$D(0,\sqrt{3},0)$ ，

$A_1(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-1,0,1)$，$\overrightarrow{BD} = (-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 A_1BD 的法向量 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = -x + z = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$， 得 $\begin{cases} x = z \\ x = \sqrt{3}y \end{cases}$

令 $y = 1$，得 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.

因为 $BE\perp$ 平面 A_1DE，所以平面 A_1DE 的法向量 $\overrightarrow{EB}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{EB}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

因为所求二面角为锐角，

所以二面角 $E-A_1D-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.　　----------10 分

（III）假设在线段 BD 上存在一点 P，使得平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD.

设 $P(x,y,z)$，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}(0\le\lambda\le1)$，则 $(x-1,y,z)=\lambda(-1,\sqrt{3},0)$.

所以 $P(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$.

所以 $\overrightarrow{EA_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{EP}=(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$.

设平面 A_1EP 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA_1}=z=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EP}=(1-\lambda)x+\sqrt{3}\lambda y=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}z=0\\ (1-\lambda)x=-\sqrt{3}\lambda y\end{cases}$，

令 $x=\sqrt{3}\lambda$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda-1,0)$.

因为平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD，

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=3\lambda+\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}\in[0,1]$，

所以在线段 BD 上存在点 P，使得平面 $A_1EP\perp$ 平面 A_1BD，且 $\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{1}{4}$.

----------14 分

18.（共 14 分）

（Ⅰ）由题意，得 $\begin{cases}b=1\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$.

所以椭圆 E 的标准方程是 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.　　----------5 分

（II）（1）当直线 AB $\perp x$ 轴时，$m=0$ 符合题意.

（2）当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ x^2+2y^2-2=0 \end{cases}$，得 $\left(1+2k^2\right)x^2-4k^2x+2\left(k^2-1\right)=0$，

由 $\Delta=(-4k^2)^2-8(1+2k^2)(k^2-1)>0$，得 $k\in\mathbb{R}$.

设 $\mathrm{A}\left(x_1,y_1\right)$，$\mathrm{B}\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$，

所以线段 AB 中点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{2k^2}{1+2k^2},\dfrac{-k}{1+2k^2}\right)$.

由题意可知，$k\neq 0$，故直线 MC 的方程为 $y+\dfrac{k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{2k^2}{1+2k^2}\right)$，

令 $x=0$，$y=\dfrac{k}{1+2k^2}$，即 $m=\dfrac{k}{1+2k^2}$

当 $k>0$ 时，，得 $0<m=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{k}+2k}\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时“=”成立.

同理，当 $k<0$ 时，$0>m=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{k}+2k}\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时“=”成立.

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$. ----------14 分

19.（共 13 分）

解：（I）因为 $f(x)=ax^2+ax-x\mathrm{e}^x$，

得 $f'(x)=2ax+a-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x$，所以 $f'(0)=a-1$.

因为曲线在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$，

所以 $f'(0)=a-1=1$，即 $a=2$. ----------5 分

（II）设 $h(x)=2ax+a-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x$，则 $h'(x)=2a-2\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=2a-(x+2)\mathrm{e}^x$.

因为 $x<0$，所以 $x+2<2$，$\mathrm{e}^x<1$.

又因为 $a>1$, 所以 $h'(x)>0$，

故 $h(x)=a(2x+1)-\mathrm{e}^x(1+x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数.

又因 $h(0)=a-1>0$，$h(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}<0$，由零点存在性定理，存在唯一的 $x_0\in(-\frac{1}{2},0)$，有 $h(x_0)=0$.

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)=f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上为减函数，

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$h(x)=f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上为增函数，

所以 x_0 为函数 $f(x)$ 的极小值点. ----------13 分

20.（共 13 分）

解：（I）因为数列：$1,4,9,x(x>9)$ 是“倒置系数”为 p 的“倒置数列”.

所以 $\frac{p}{x},\frac{p}{9},\frac{p}{4},p$ 也是该数列的项，且 $\frac{p}{x}<\frac{p}{9}<\frac{p}{4}<p$.

故 $\frac{p}{x}=1,\frac{p}{9}=4$，

即 $x=p=36$. ----------3 分

（II）因为数列 $\{a_n\}$ 是项数为 m 项的有穷正项等比数列，取 $p=a_1\cdot a_m>0$，

对数列 $\{a_n\}$ 中的任意一项 $a_i(1\le i\le m)$，

$\frac{p}{a_i}=\frac{a_1a_m}{a_i}=\frac{a_ia_{m+1-i}}{a_i}=a_{m+1-i}$ 也是数列 $\{a_n\}$ 中的一项，

由“倒置数列”的定义可知，数列 $\{a_n\}$ 是“倒置数列”;

又因为数列 $\{a_n\}$ 所有项之积是 T，

所以 $T^2=(a_1a_2a_3\cdots a_m)(a_ma_{m-1}a_{m-2}\cdots a_1)=(a_1a_m)^m=p^m$ 即 $p=T^{\frac{2}{m}}$.

----------9 分

（III）假设存在这样的等差数列 $\{a_n\}$ 为“倒置数列”，设它的公差为 $d(d>0)$，“倒置系数”为 p.

因为数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$

则 $\frac{p}{a_1}>\frac{p}{a_2}>\frac{p}{a_3}>\cdots>\frac{p}{a_n}>\cdots$

又因为数列 $\{a_n\}$ 为“倒置数列”，则正整数 $\frac{p}{a_i}$ 也是数列 $\{a_n\}$ 中的一项（$i=1,2,\cdots$），

故数列 $\{a_n\}$ 必为有穷数列，不妨设项数为 n 项，

则 $p=a_i\cdot a_{n+1-i}(1\le i\le n-1)$

则 $a_1a_n=a_2a_{n-1}$，得 $a_1a_n=(a_1+d)(a_n-d)$，

即 $(n-2)d^2=0$ 由 $n\ge 3$，故 $d=0$，与 $d>0$ 矛盾.

所以，不存在满足条件的数列 $\{a_n\}$，使得它既是等差数列，又是“倒置数列”.

----------13 分