2018 北京昌平高三二模

数　　学（文）

2018.5

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x>1$ 或 $x<-1\}$，则$\complement_U A=$

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C．$(-1,1)$　　D．$[-1,1]$

2．下列函数中，在定义域上既是奇函数又是增函数的是

A．$y=\dfrac{1}{x}$　　B．$y=x^3$　　C．$y=\sin x$　　D．$y=\lg x$

3．在平面直角坐标系中，不等式组$\begin{cases}x-y\geq 0,\\ x+y-1\leq 0,\\ y\geq 0\end{cases}$表示的平面区域的面积是

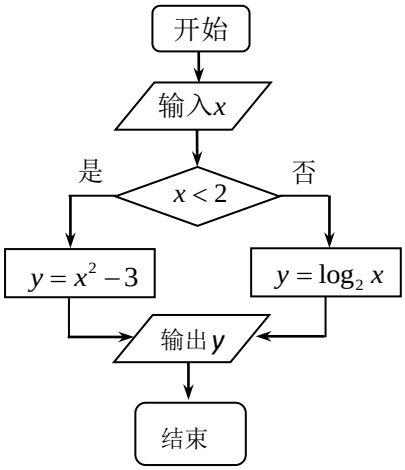
A．1　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{8}$

4．设$a=(\dfrac{1}{2})^{0.2}$，$b=\log_2 3$，$c=2^{-0.3}$，则

A．$b>c>a$　　B．$a>b>c$

C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

5．执行如图所示的程序框图，若输入 x 值满足 $-2<x\leq 4$，则输出 y 值的取值范围是



A．$[-3,2]$

B．$[1,2]$

C．$[-4,0)$

D．$[-4,0)\cup[1,2]$

6．设$x,y\in\mathbf{R}$，则“$|x|\leq 1$且$|y|\leq 1$”是“$x^2+y^2\leq 2$”的

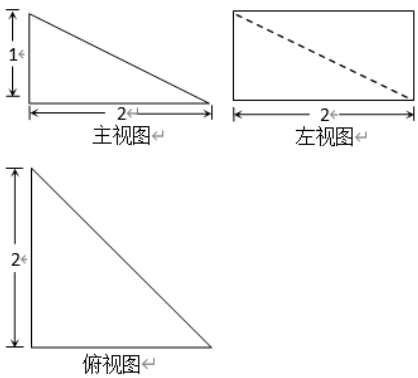
A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

7．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的所有面中最大面的面积是



A．4

B．$\sqrt{5}$

C. 2

D. $\sqrt{2}$

8. 2011 年 7 月执行的《中华人民共和国个人所得税法》规定：公民全月工资、薪金所得不超过 3500 元的部分不必纳税，超过 3500 元的部分为全月应纳税所得额. 此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额（含税级距）	税率(%)
不超过 1500 元	3
超过 1500 元至 4500 元的部分	10
超过 4500 元至 9000 元的部分	20
…	…

某调研机构数据显示，希望将个税免征额从 3500 元上调至 7000 元. 若个税免征额上调至 7000 元（其它不变），某人当月工资、薪金所得 8500 元，则此人当月少缴纳此项税款

A. 45 元　　B. 350 元　　C. 400 元　　D. 445 元

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

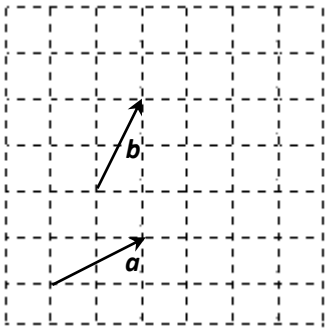
9. 在复平面内，复数 $\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为 _____.

10. 若抛物线 $x^2=12y$，则焦点 F 的坐标是 _____.

11. 在 ΔABC 中，$a=2$，$b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，则 $C=$_____.

12. 能够说明命题“设 a，b，c 是任意实数，若 $a>b>c$，则 $2a+b>c$”是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为_____.

13. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所成角的余弦值是_____;向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形的面积是_____.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax, & x<1,\\ \frac{a\ln x}{x}, & x\geq 1.\end{cases}$

①当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 极大值是_____；

②当 $x<1$ 时，若函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{3}\sin 2x$.

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最值及相应的 x 值.

16. （本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=\frac{1}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，且 $b_n a_{n+1}+a_{n+1}=na_n$.

（I）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（II）求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 S_n.

17.（本小题 13 分）

为评估大气污染防治效果，调查区域空气质量状况，某调研机构从 A，B 两地区分别随机抽取了 20 天的观测数据，得到 A，B 两地区的空气质量指数（AQI），绘制如下频率分布直方图：

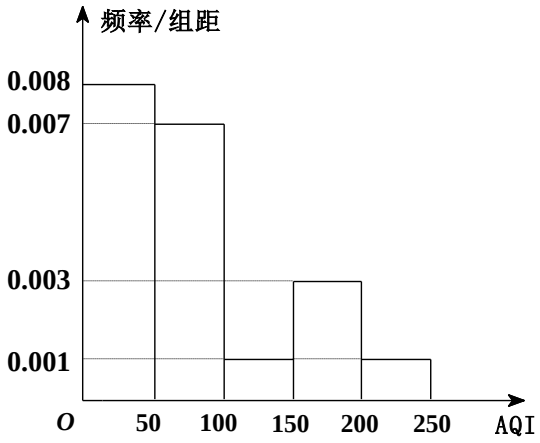


图 1 A 地空气质量指数（AQI）

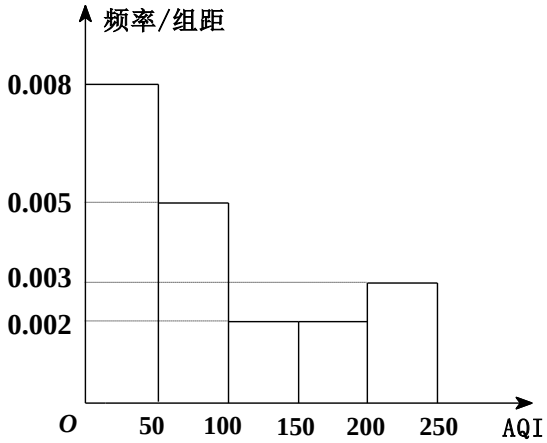


图 2 B 地空气质量指数（AQI）

根据空气质量指数，将空气质量状况分为以下三个等级：

空气质量指数 AQI	(0,100)	[100,200)	[200,300)
空气质量状况	优良	轻中度污染	重度污染

（I）试根据样本数据估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数；

（II）若分别在 A、B 两地区上述 20 天中，且空气质量指数均不小于150的日子里随机各抽取一天，求抽到的日子里空气质量等级均为“重度污染”的概率.

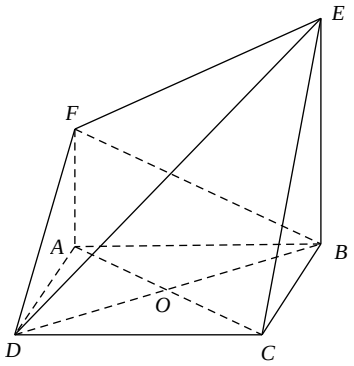
18.（本小题 14 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$，$AF//BE$，$AB \perp BE, AB = BE = 2, AF = 1$.

（Ⅰ）求证：$AC \perp$ 平面 BDE；

（Ⅱ）求证：$AC //$ 平面 DEF；

（III）求三棱锥 $D-FEB$ 的体积.



19.（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的经过点 $(0,1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 E 的标准方程；

（II）过右焦点 F 的直线 l（与 x 轴不重合）与椭圆交于 A,B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 $M(0,\ m)$，求实数 m 的取值范围.

20.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=x^3+c$，$g(x)=8x^2-20x$，方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同实根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）求 c 的取值范围；

（III）求证：$x_1+x_2>4$.

参考答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	C	A	A	B	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. $(1,-1)$　　10. $(0,3)$　　11. $\frac{5\pi}{12}$(或75°)

12. $-1,-2,-3$　　13. $\frac{4}{5}$ ； 3　　14. $\frac{1}{e}$ ； $a<1$

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

15.（共 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π.　　----------8 分

（II）因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $0\le 2x\le\pi$，

所以 $\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)_{\max}=2$.

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)_{\min}=-1$.　　----------13 分

16.（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $b_n a_{n+1}+a_{n+1}=na_n$，

所以 $b_1a_2+a_2=a_1$.

又因为 $a_1=1$， $a_2=\frac{1}{2}$ ，

所以 $b_1=1$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n=2n-1$.　　----------7 分

（Ⅱ） 由（Ⅰ）知 $b_n=2n-1$， 且 $b_n a_{n+1}+a_{n+1}=na_n$.

所以 $(2n-1)a_{n+1}+a_{n+1}=na_n$，

得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

那么数列$\{a_n\}$前n项和$S_n=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2^{1-n}$. ----------13 分

17.（共 13 分）

解:（Ⅰ）从 A 地区选出的 20 天中随机选出一天,这一天空气质量状况“优良”的频率为$(0.008+0.007)\times 50=0.75$，估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的频率为0.75，A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数约为$365\times 0.75\approx 274$天 .

----------4 分

（Ⅱ）A 地 20 天中空气质量指数在$[150,200)$内，为$20\times 0.003\times 50=3$个，设为$a_1,a_2,a_3$，

空气质量指数在$[200,250)$内，为$20\times 0.001\times 50=1$个，设为$a_4$，

B 地 20 天中空气质量指数在$[150,200)$内，为$20\times 0.002\times 50=2$个，设为$b_1,b_2$，

空气质量指数在$[200,250)$内，为$20\times 0.003\times 50=3$个，设为$b_3,b_4,b_5$，

设“A，B 两地区的空气质量等级均为“重度污染”“为C，

则基本事件空间

$\Omega=\{a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_1b_4,a_1b_5,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,a_2b_4,a_2b_5,a_3b_1,a_3b_2,a_3b_3,a_3b_4,a_3b_5,a_4b_1,a_4b_2,a_4b_3,a_4b_4,a_4b_5\}$，基本事件个数为$n=20$，$C=\{a_4b_3,a_4b_4,a_4b_5\}$，包含基本事件个数为$m=3$，

所以 A，B 两地区的空气质量等级均为“重度污染”的概率为$P(C)=\frac{3}{20}$.

----------13 分

18.（共 14 分）

证明:（I）因为正方形 *ABCD*,所以$AC\perp BD$.

又因为平面 *ABEF*⊥平面 *ABCD*, 平面 *ABEF*⋂平面 *ABCD=AB*, $AB\perp BE$, $BE\subset$平面 *ABEF*,

所以$BE\perp$平面 *ABCD*.

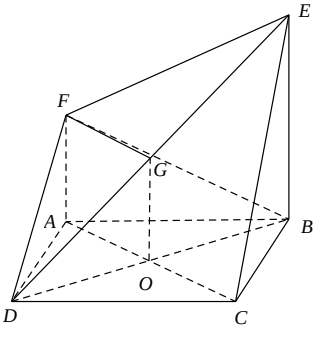
又因为$AC\subset$平面 *ABCD*.

故$BE\perp AC$. 又因为$BE\bigcap BD=B$，

所以 $AC\perp$平面BDE. ----------5 分

（II）取 *DE* 的中点 *G*，连结 *OG*, *FG*,

因为四边形 *ABCD* 为正方形，所以 *O* 为 *BD* 的中点.



则 $OG//BE$，且 $OG=\frac{1}{2}BE$.

由已知 $AF//BE$，且 $AF=\frac{1}{2}BE$，则 $AF//OG$ 且 $AF=OG$，

所以四边形 $AOGF$ 为平行四边形，所以 $AO//FG$，

即 $AC//FG$.

因为 $AC\not\subset$ 平面 DEF，$FG\subset$ 平面 DEF，

所以 $AC//$ 平面 DEF. ----------10 分

（III）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，四边形 $ABCD$ 是正方形，

平面 $ABEF\cap$ 平面 $ABCD=AB$,

所以 $AD//BC, AD\perp AB$.

由（I）知，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $BE\perp AD$

所以 $AD\perp$ 平面 BEF.

所以 $V_{D-BEF}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta BEF}\times AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BE\times AB\times AD=\frac{4}{3}$. ----------14 分

19. (共 14 分)

解：（Ⅰ）由题意，得 $\begin{cases}b=1\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$.

所以椭圆 E 的标准方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ----------5 分

（II）（1）当直线 AB $\perp x$ 轴时，m = 0 符合题意.

（2）当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ x^2+2y^2-2=0\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$，

由 $\Delta=(-4k^2)^2-8(1+2k^2)(k^2-1)>0$，得 $k\in$ R.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{-2k}{1+2k^2}$，

所以线段 AB 中点 C 的坐标为 $\left(\frac{2k^2}{1+2k^2},\frac{-k}{1+2k^2}\right)$.

由题意可知，$k\neq 0$，故直线MC的方程为$y+\frac{k}{1+2k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2k^2}{1+2k^2}\right)$，

令 $x=0$，$y=\frac{k}{1+2k^2}$，即$m=\frac{k}{1+2k^2}$

当 $k>0$ 时，，得$0<m=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时“=”成立.

同理，当 $k<0$ 时，$0>m=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\geq-\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时“=”成立.

综上所述，实数 m 的取值范围为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$. ----------14 分

20. (共 13 分)

解：（Ⅰ）$f'(x)=3x^2$，$f'(1)=3$，又$f(1)=c+1$，

则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为：$y=3x+c-2$. ----------3 分

（Ⅱ）设$h(x)=x^3-8x^2+20x+c$，$h'(x)=3x^2-16x+20$，

令$f'(x)=0$，则$x=2$,或$x=\frac{10}{3}$

当x变化时，$h'(x)$与$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,\frac{10}{3})$	$\frac{10}{3}$	$(\frac{10}{3},+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$c+16$	↘	$c+\frac{400}{27}$	↗

所以，当$c+16>0$,且$c+\frac{400}{27}<0$时，

因为$h(0)=c<0,h(4)=16+c>0$，故存在$x_1\in(0,2),\ x_2\in(2,\frac{10}{3}),\ x_3\in(\frac{10}{3},4)$,使得$h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=0$

由$h(x)$的单调性知，当且仅当$c\in(-16,-\frac{400}{27})$时，函数$h(x)$有三个不同的零点，

即当且仅当$c\in(-16,-\frac{400}{27})$时，方程$f(x)=g(x)$有三个不同实根. ----------9 分

（III）由（Ⅱ）知 $x_1\in(0,2),\ x_2\in(2,\frac{10}{3}),\ 4-x_2\in(\frac{2}{3},2)\subseteq(0,2),\ h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，则

$x_1+x_2>4\Leftrightarrow 4-x_2<x_1$

$\Leftrightarrow h(4-x_2)<h(x_1)=h(x_2)=0$

$\Leftrightarrow u(x_2)=h(x_2)-h(4-x_2)>0$，$x_2\in(2,\frac{10}{3}),$

由 $h(4-x_2)=(4-x_2)^3-8(4-x_2)^2+20(4-x_2)+c=-x_2{}^3+4x_2{}^2-4x_2+c+16$，

$u(x_2)=h(x_2)-h(4-x_2)=(x_2{}^3-8x_2{}^2+20x_2+c)-(-x_2{}^3+4x_2{}^2-4x_2+c+16)$

$=2(x_2{}^3-6x_2{}^2+12x_2-8)$

设 $u(x)=2x^3-12x^2+24x-16$，则 $u'(x)=6(x-2)^2$

所以当 $x\in(2,\frac{10}{3})$ 时，$u'(x)>0$，即 $u(x)$ 在 $(2,\frac{10}{3})$ 上单调递增，而 $u(2)=0$

所以当 $x\in(2,\frac{10}{3})$ 时，$u(x)>u(2)=0$，所以 $u(x_2)>0$，$x_2\in(2,\frac{10}{3})$

所以 $x_1+x_2>4$.　　----------13 分