2018 北京房山高三二模

数学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x|x\leqslant 2\}$　　B．$\{x|x<3\}$　　C．$\{x|2<x<3\}$　　D．$\{x|2\leqslant x<3\}$

2．若复数 $iz=-1+i$，则复数 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．下列函数中，在区间（2，+∞）上为增函数的是（　　）

A．$y=-3^x$　　B．$y=\frac{1}{2-x}$　　C．$y=-(x-2)^2$　　D．$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

4．已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的取值范围是（　　）

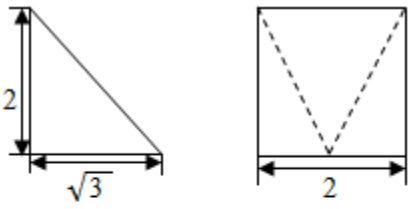
A．（0，1）　　B．（0，1]　　C．[1，+∞）　　D．$[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

5．将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把所得的图象上的所有点向右平移 2 个单位长度，得到的图象所对应的函数解析式为（　　）

A．$y=\sin(2x-2)$　　B．$y=\sin(2x+2)$

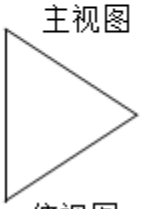
C．$y=\sin(\frac{1}{2}x+1)$　　D．$y=\sin(\frac{1}{2}x-1)$

6．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的最长棱为（　　）



主视图

左视图


俯视图

A．4　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．2

7．“$x+\frac{1}{x}>2$“是“$x>1$“的（　　）

A．充要条件　　B．充分而不必要条件

C．必要而不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

8．正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 在边 AB 上，点 F 在边 BC 上，$AE=\frac{1}{2}$，$BF=\frac{1}{4}$．动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动，每当碰到正方形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当点 P 第一次碰到 E 时，P 与正方形的边碰撞的次数为（　　）

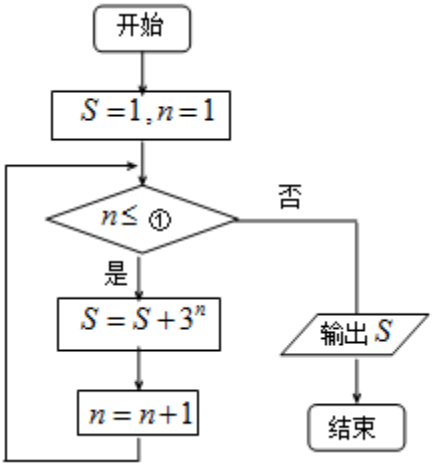
A．3　　B．4　　C．6　　D．8

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．双曲线$\frac{y^2}{a^2}-x^2=1$的渐近线为 $y=\pm\sqrt{2}x$，则该双曲线的离心率为_____．

10．若平面向量$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ m)$，且$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，则实数 m 的值为_____．

11．阅读如图所示的程序框图，为使输出的数据为 40，则①处应填的数字为_____．



12．如果直线 $y=kx-1$ 与圆 $x^2+y^2+kx+my-4=0$ 交于 M，N 两点，且 MN 关于直线 $x+y=0$ 对称，则 $m+k=$_____．

13．在锐角△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 所对的边，且满足 $b=2a\sin B$，则$\angle A=$_____．

14．已知集合$\{a,b,c\}=\{2,3,4\}$，且下列三个关系：$a\neq3$，$b=3$，$c\neq4$ 有且只有一个正确，则函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>b\\ (x-c)^2+a, & x\leqslant b\end{cases}$ 的值域是_____．

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

15．（13 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2=10$，$a_4-a_3=2$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$满足 $b_2=a_3$，$b_3=a_7$．问：b_5 与数列$\{a_n\}$的第几项相等？

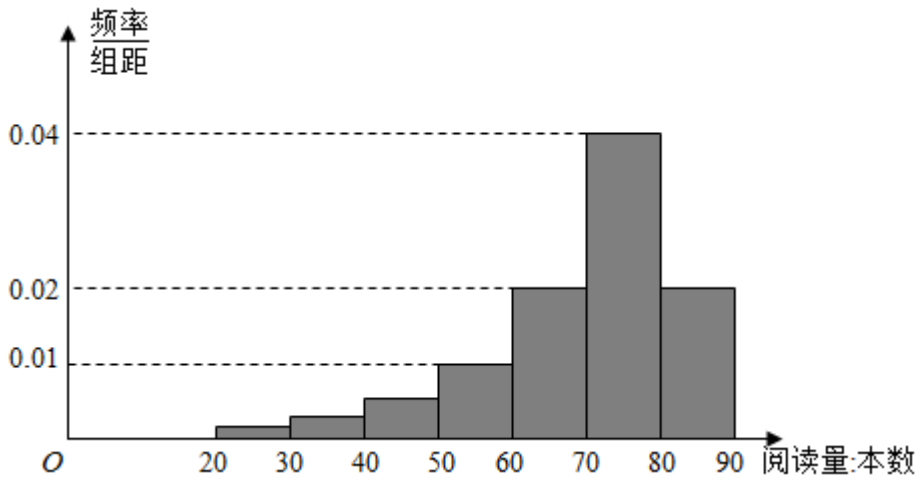
16．（13 分）已知函数 $f(x)=\sin x-a\cos x$ 的一个零点是$\frac{\pi}{4}$．

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x$，若 $x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$，求 $g(x)$ 的值域．

17．（13 分）1995 年联合国教科文组织宣布每年的 4 月 23 日为世界读书日，主旨宣言为“希望散居在全球各地的人们，都能享受阅读带来的乐趣，都能尊重和感谢为人类文明作出巨大贡献的文学、文化、科学

思想的大师们，都能保护知识产权．”为了解大学生课外阅读情况，现从某高校随机抽取 100 名学生，将他们一年课外阅读量（单位：本）的数据，分成 7 组[20，30），[30，40），…，[80，90），并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）估计其阅读量小于 60 本的人数；

（Ⅱ）已知阅读量在[20，30），[30，40），[40，50）内的学生人数比为 2：3：5．为了解学生阅读课外书的情况，现从阅读量在[20，40）内的学生中随机 2 人进行座谈，求 2 人分别在不同组的概率；

（Ⅲ）假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计 100 名学生该年课外书阅读量的平均数在第几组（只需写出结论）．

18．（14 分）如图 1，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2，O 为中心，G 为 AB 的中点．现将四边形 $DEFC$ 沿 CF 折起到四边形 D_1E_1FC 的位置，使得平面 $ABCF\perp$ 平面 D_1E_1FC，如图 2．

（Ⅰ）证明：$D_1F\perp$ 平面 E_1OG；

（Ⅱ）求几何体 E_1-OFAG 的体积；

（Ⅲ）在直线 AB 上是否存在点 H，使得 $D_1H\parallel$ 平面 E_1OG？如果存在，求出 AH 的长；如果不存在，请说明理由．

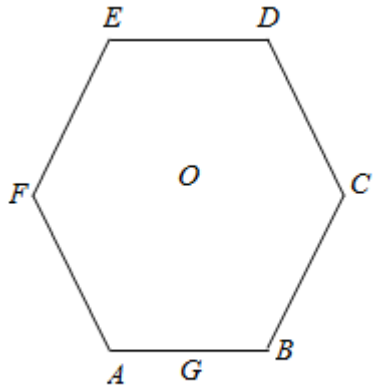


图1

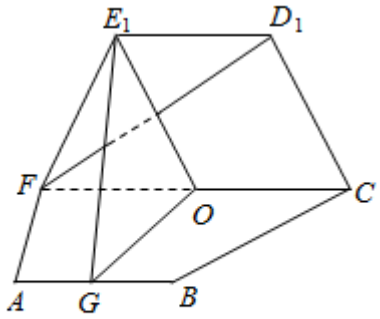


图2

19．（14 分）椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，O 为坐标原点，F 是椭圆 C 的右焦点，A 为椭圆 C 上一点，且 $AF\perp x$ 轴，$\triangle AFO$ 的面积为 $\frac{3}{4}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过 C 上一点 $P(x_0, y_0)(y_0 \neq 0)$ 的直线 l：$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$ 与直线 AF 相交于点 M，与直线 $x=4$ 相交于点 N．证明：当点 P 在 C 上移动时，$\frac{|MF|}{|NF|}$ 恒为定值，并求此定值．

20．（13 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-a\ln x\ (a \in R)$．

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，

（i）求 $f(x)$ 在（1，$f(1)$）处的切线方程；

（ii）设 $g(x)=xf(x)-1$，求函数 $g(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 有两个的零点，求实数 a 的取值范围．

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．【分析】根据并集的定义写出 $A\cup B$．

【解答】解：集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，

$B=\{x|0<x<3\}$，

则 $A\cup B=\{x|x<3\}$．

故选：B．

【点评】本题考查了并集的定义与应用问题，是基础题．

2．【分析】把已知等式变形，利用复数代数形式的乘除运算化简，求出 z 的坐标得答案．

【解答】解：由 $iz=-1+i$，

得 $z=\frac{-1+i}{i}=\frac{(-1+i)(-i)}{-i^2}=1+i$，

∴复数 z 在复平面内对应的点的坐标为（1，1），位于第一象限．

故选：A．

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题．

3．【分析】根据题意，依次分析选项中函数的单调性，综合即可得答案．

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，$y=-3^x$，函数 $y=3^x$ 为指数函数，则 R 上为增函数，

则 $y=-3^x$ 在 **R** 上为减函数，A 不符合题意；

对于 B，$y=\frac{1}{2-x}=-\frac{-1}{x-2}$，令 $t=x-2$，$y=\frac{-1}{t}$，

则函数 $t=x-2$ 在（2，+∞）上为增函数，$y=\frac{-1}{t}$在（0，+∞）为增函数，

则 $y=\frac{1}{2-x}$在区间（2，+∞）上为增函数，符合题意；

对于 C，$y=-(x-2)^2$ 为二次函数，开口向下且对称轴为 $x=2$，

在区间（2，+∞）上为减函数，不符合题意；

对于 D，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$为对数函数，在区间（2，+∞）上为减函数，不符合题意；

故选：B．

【点评】本题考查函数单调性的判定，关键是掌握常见函数的单调性．

4．【分析】先画出可行域，利用目标函数几何意义转化求解即可．

【解答】解：实数 x，y 满足$\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$

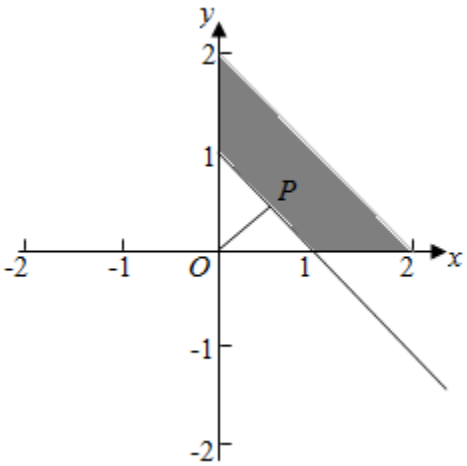
表示的可行域如图：$\sqrt{x^2+y^2}$的几何意义是

可行域内的点与坐标原点的距离，

可知 P 到原点的距离最小，即$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

则$\sqrt{x^2+y^2}$的取值范围是：$[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

故选：D.



【点评】本题主要考查线性规划的应用，结合目标函数的几何意义，利用数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法，属于中档题.

5.【分析】根据三角函数的图象变换关系分别进行求解即可.

【解答】解：将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，纵坐标不变，

得到 $y=\sin\frac{1}{2}x$，

再把所得的图象上的所有点向右平移 2 个单位长度，

得到的图象所对应的函数解析式为 $y=\sin\frac{1}{2}(x-2)=\sin(\frac{1}{2}x-1)$，

故选：D.

【点评】本题主要考查三角函数解析式的求解，结合平移，坐标变换关系是解决本题的关键.

6.【分析】几何体为四棱锥，作出直观图，计算棱长即可得出答案.

【解答】解：由三视图可知几何体为四棱锥 $S-ABCD$，

由侧视图可知棱锥底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

顶点 S 在底面 $ABCD$ 上的射影 M 为 CD 的中点，

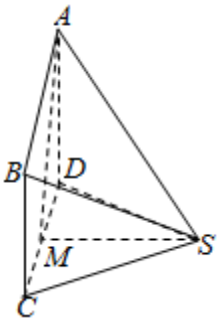
由主视图可知 $SM=\sqrt{3}$，

$\therefore AM=\sqrt{5}$，$SA=\sqrt{AM^2+SM^2}=2\sqrt{2}$.

由对称性可知 $SB=SA=2\sqrt{2}$.

$\therefore$几何体最长的棱为 $2\sqrt{2}$.

故选：B.



【点评】本题考查了常见几何体的结构特征与三视图，属于基础题.

7.【分析】由 $x+\frac{1}{x}>2$，化为：$\frac{(x-1)^2}{x}>0$，解得 x 范围即可判断出结论.

【解答】解：由 $x+\frac{1}{x}>2$，化为：$\frac{(x-1)^2}{x}>0$，解得 $x>0$ 且 $x\neq1$.

∴“$x+\frac{1}{x}>2$“是“$x>1$“的必要不充分条件.

故选：C.

【点评】本题考查了不等式的解法、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

8.【分析】根据已知中的点 E，F 的位置，可知入射角的正切值为$\frac{1}{2}$，通过相似三角形，来确定反射后的点的位置，从而可得反射的次数.

【解答】解：根据已知中的点 E，F 的位置，可知入射角的正切值为$\frac{1}{2}$，第一次碰撞点为 F，

在反射的过程中，直线是平行的，利用平行关系及三角形的相似可得第二次碰撞点为 G，

G 在 DA 上，且 $DG=\frac{1}{4}$，

第三次碰撞点为 H，H 在 DC 上，且 $DH=\frac{1}{2}$，

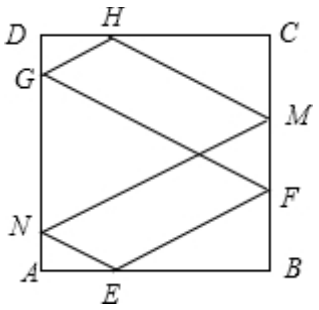
第四次碰撞点为 M，M 在 CB 上，且 $CM=\frac{1}{4}$，

第五次碰撞点为 N，N 在 DA 上，且 $AN=\frac{1}{4}$，

第六次回到 E 点，$AE=\frac{1}{2}$.

故需要碰撞 6 次即可.

故选：C.



【点评】本题主要考查了反射原理与三角形相似知识的运用．通过相似三角形，来确定反射后的点的位置，从而可得反射的次数，属于难题．

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．【分析】根据题意，由双曲线的方程求出其渐近线方程，分析可得 $a=\pm\sqrt{2}$，即可得双曲线的标准方程，利用离心率公式计算可得答案．

【解答】解：根据题意，双曲线的方程为$\frac{y^2}{a^2}-x^2=1$，则其渐近线为 $y=\pm ax$，

又由双曲线$\frac{y^2}{a^2}-x^2=1$的渐近线为 $y=\pm\sqrt{2}x$，则 $a=\pm\sqrt{2}$，

则双曲线的标准方程为：$\frac{y^2}{2}-x^2=1$，其中 $c=\sqrt{3}$，

其离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{2}$．

【点评】本题考查双曲线的几何性质，关键是掌握双曲线的渐近线方程的求法．

10．【分析】可求出$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ m+2)$，根据$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$便可得出$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$，进行数量积的坐标运算即可求出 m 的值．

【解答】解：$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ m+2)$；

$\because\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$；

$\therefore\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(4,\ 2)\cdot(2,\ m+2)=8+2(m+2)=0$；

$\therefore m=-6$．

故答案为：－6．

【点评】考查向量坐标的加法和数量积的运算，以及向量垂直的充要条件．

11．【分析】由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，可得答案．

【解答】解：当 $S=1$ 时，应不满足输出的条件，故 $S=4$，$n=2$；

当 $S=4$ 时，应不满足输出的条件，故 $S=13$，$n=3$；

当 $S=13$ 时，应不满足输出的条件，故 $S=40$，$n=4$；

当 $S=40$ 时，应满足输出的条件，

故进行循环的条件应为 $n\leqslant 3$，

故答案为：3．

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环的次数不多，或有规律时，常采用模拟循环的方法解答．

12．【分析】由题意，得直线 $x+y=0$ 是线段 MN 的中垂线，利用垂直直线的斜率关系算出 $k=1$，得出圆方程为 $x^2+y^2+x+my-4=0$，将圆心坐标代入 $x+y=0$，解得 $m=-1$，可得本题答案．

【解答】解：∵直线 $y=kx-1$ 与圆 $x^2+y^2+kx+my-4=0$ 交于 M，N 两点，且 M，N 关于直线 $x+y=0$ 对称，

∴直线 $x+y=0$ 是线段 MN 的中垂线，得 $k\cdot(-1)=-1$，解之得 $k=1$．

所以圆方程为 $x^2+y^2+x+my-4=0$，圆心坐标为 $(-\frac{1}{2},\ -\frac{m}{2})$，

将 $(-\frac{1}{2},\ -\frac{m}{2})$ 代入 $x+y=0$，解得 $m=-1$，得 $k+m=0$．

故答案为：0．

【点评】本题给出直线与圆相交，且两个交点关于已知直线对称，求参数 k、m 的值．着重考查了直线的斜率、圆的方程和直线与圆的位置关系等知识，属于中档题．

13．【分析】根据正弦定理即可求出．

【解答】解：∵$b=2a\sin B$，

∴$\sin B=2\sin A\sin B$，

∵$\sin B\neq 0$，

∴$\sin A=\frac{1}{2}$，

∵A 为锐角，

∴$A=\frac{\pi}{6}$，

故答案为：$\frac{\pi}{6}$

【点评】本题考查了正弦定理，以及解三角形，属于基础题．

14．【分析】根据集合相等的条件，列出 a、b、c 所有的取值情况，再判断是否符合条件，求出 a，b，c 的值，结合的最值即可求出函数的值域．

【解答】解：由$\{a，b，c\}=\{2，3，4\}$得，a、b、c 的取值有以下情况：

当 $a=2$ 时，$b=3$、$c=4$ 时，$a\neq 3$，$b=3$，$c\neq 4$ 都正确，不满足条件．

当 $a=2$ 时，$b=4$、$c=3$ 时，$a\neq 3$ 成立，$c\neq 4$ 成立，此时不满足题意；

当 $a=3$ 时，$b=2$、$c=4$ 时，都不正确，此时不满足题意；

当 $a=3$ 时，$b=4$、$c=2$ 时，$c\neq 4$ 成立，此时满足题意；

当 $a=4$ 时，$b=2$，$c=3$ 时，$a\neq 3$，$c\neq 4$ 成立，此时不满足题意；

当 $a=4$ 时，$b=3$、$c=2$ 时，$a\neq 3$，$b=3$ 成立，此时不满足题意；

综上得，$a=3$、$b=4$、$c=2$，

则函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>b\\ (x-c)^2+a, & x\leqslant b\end{cases}=\begin{cases}2^x, & x>4\\ (x-2)^2+3, & x\leqslant 4\end{cases}$，

当 $x>4$ 时，$f(x)=2^x>2^4=16$，

当 $x\leqslant 4$ 时，$f(x)=(x-2)^2+3\geqslant 3$，

综上 $f(x)\geqslant 3$，即函数的值域为$[3，+\infty)$，

故答案为：$[3，+\infty)$.

【点评】本题主要考查函数的值域的计算，根据集合相等关系以及命题的真假条件求出 a，b，c 的值是解决本题的关键.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

15.【分析】（Ⅰ）设公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$，运用等差数列的通项公式，解方程可得首项和公差，即可得到所求；

（Ⅱ）设公比为 q 的等比数列$\{b_n\}$，运用等比数列的通项公式可得公比和首项，即可得到所求 b_5，结合等差数列的通项公式，解方程即可得到所求值.

【解答】解：（Ⅰ）设公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2=10$，$a_4-a_3=2$，

可得 $2a_1+d=10$，$d=2$，

解得 $a_1=4$，

则 $a_n=4+2(n-1)=2n+2$；

（Ⅱ）设公比为 q 的等比数列$\{b_n\}$满足 $b_2=a_3$，$b_3=a_7$，

可得 $b_2=8$，$b_3=16$，

则公比 $q=\frac{b_3}{b_2}=2$，$b_1=4$，

则 $b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$，

由 $2n+2=b_5=2^6$，

解得 $n=31$，

则 b_5 与数列$\{a_n\}$的第 31 项相等.

【点评】本题考查等差数列和等比数列的通项公式的运用，考查方程思想和运算能力，属于基础题.

16.【分析】（*I*）根据 $f(\frac{\pi}{4})=0$ 计算 a 的值；

（*II*）化简 $f(x)$ 的解析式，再根据这些函数的单调性得出 $g(x)$ 的最值即可.

【解答】（Ⅰ）解：依题意，得 $f(\frac{\pi}{4})=0$，

即 $\sin\frac{\pi}{4}-a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}a}{2}=0$，

解得 $a=1$.

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）得$f(x)=\sin x-\cos x$.

$g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)(-\sin x-\cos x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

由$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$得$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$

∴当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$即$x=\frac{\pi}{6}$时，$g(x)$取得最大值2，

当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$即$x=\frac{\pi}{2}$时，$g(x)$取得最小值－1.

所以$g(x)$的值域是[－1，2].

【点评】本题考查了三角函数的恒等变换与化简求值，属于中档题.

17.【分析】（Ⅰ）由频率分布直方图能估计估计其阅读量小于60本的人数.

（Ⅱ）由已知条件可知：[20，50）内人数为10，[20，30）人数为2人，[30，40）人数为3人，[40，50）人数为5人．设[20，30）2人为a，b，[30，40）3人为c，d，e，设事件A为“两人分别在不同组”，利用列举法能求出从[20，40）内的学生中随机选取2人，则两人不同组的概率.

（Ⅲ）第五组.

【解答】解：（Ⅰ）由频率分布直方图能估计估计其阅读量小于60本的人数为：

100－100×10×（0.04+0.02×2）＝20（人）　……（4分）

（Ⅱ）由已知条件可知：[20，50）内人数为：

100－100×（0.04+0.02+0.02＝0.01）＝10，

[20，30）人数为2人，[30，40）人数为3人，[40，50）人数为5人.

设[20，30）2人为a，b，[30，40）3人为c，d，e

设事件A为“两人分别在不同组”

从[20，40）内的学生中随机选取2人包含：

（a，b），（a，c），（a，d），（a，e），（b，c），

（b，d），（b，e），（c，d），（c，e），（d，e）共10个基本事件，

而事件A包含：

（a，c），（a，d），（a，e），（b，c），（b，d），（b，e）共6个基本事件

所以$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$……（10分）

（Ⅲ）第五组.　……（13分）

【点评】本题考查频数、概率的求法，考查频率分布直方图等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

18.【分析】（Ⅰ）由已知可得$OG\perp CF$，再由面$CD_1E_1F\perp$面$ABCF$，得$OG\perp$面CD_1E_1F，则$OG\perp D_1F$，

然后利用菱形对角线互相垂直可得 $D_1F\perp OE_1$，再由线面垂直的判定可得 $D_1F\perp$面 E_1OG；

（Ⅱ）图（2）中，过 E_1 作 $E_1M\perp FO$，垂足为 M，可证 E_1M 为 E_1-OFAG 的高，分别求出 E_1M 与底面四边形 $OFAG$ 的面积，代入棱锥体积公式可得几何体 E_1-OFAG 的体积；

（Ⅲ）在直线 AB 上存在点 H，当 $AH=3$ 时，$D_1H\parallel$平面 E_1OG.

过 C 作 $CH\perp AB$，交 AB 的延长线于点 H，先证面 $D_1CH\parallel$面 E_1OG，可得 $D_1H\parallel$面 E_1OG，再由四边形 $OGHC$ 为矩形，求得 $AH=3$.

【解答】（Ⅰ）证明：图（1）中 $OG\perp CF$，∴图（2）中，$OG\perp CF$，

又面 $CD_1E_1F\perp$面 $ABCF$，

面 $CD_1E_1F\cap$面 $ABCF=CF$，

∴$OG\perp$面 CD_1E_1F，

∵$D_1F\subset$面 CD_1E_1F，∴$OG\perp D_1F$，

又 O 为 CF 的中点，∴$OF\parallel D_1E_1$，

$OF=D_1E_1$，

又 $E_1D_1=E_1F$，∴四边形 E_1D_1OF 为菱形.

∴$D_1F\perp OE_1$，

又 $OG\cap OE_1=O$，∴$D_1F\perp$面 E_1OG；

（Ⅱ）解：图（2）中，过 E_1 作 $E_1M\perp FO$，垂足为 M，

∵$OG\perp$面 CD_1E_1F，$E_1M\subset$面 CD_1E_1F，∴$E_1M\perp OG$，

∵$OG\cap FO=O$，∴$E_1M\perp$面 $AGOF$，则 E_1M 为 E_1-OFAG 的高，

∵$E_1M=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，$S_{四边形OFAG}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴几何体 E_1-OFAG 的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{3}{2}$；

（Ⅲ）解：在直线 AB 上存在点 H，当 $AH=3$ 时，$D_1H\parallel$平面 E_1OG.

证明如下：过 C 作 $CH\perp AB$，交 AB 的延长线于点 H，∴$CH\parallel=OG$.

又 $OE_1\parallel CD_1$，$CD_1\cap CH=C$，∴面 $D_1CH\parallel$面 E_1OG，

∵$D_1H\subset$面 D_1CH，∴$D_1H\parallel$面 E_1OG，

∵四边形 $OGHC$ 为矩形，∴$GH=CO=2$，则 $AH=3$.

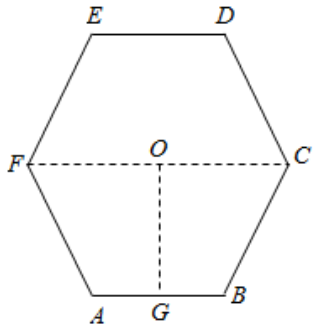


图1

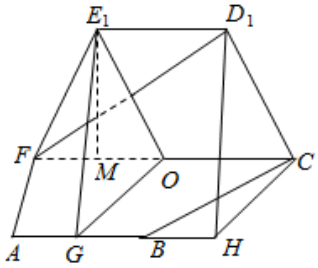


图2

【点评】本题主要考查直线与平面的位置关系、空间几何体的体积等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、数形结合思想等，是中档题.

19.【分析】（Ⅰ）设F（c，0），A（c，d），代入可得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}=1$．又$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$|d|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，根据△$AFO$的面积为$\frac{3}{4}$，可得$\frac{1}{2}c|d|=\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{4}$，$bc=\sqrt{3}$．由$\begin{cases}a^2-b^2=c^2\\a=2c\\bc=\sqrt{3}\end{cases}$，解出即可得出.

（Ⅱ）由（1）知直线 l 的方程为$\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$（$y_0\neq0$），即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}$（$y_0\neq0$）．由直线 AF 的方程为$x=1$，可得直线 l 与 AF 的交点为 $M\left(1,\frac{12-3x_0}{4y_0}\right)$，直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N\left(4,\frac{3-3x_0}{y_0}\right)$，可得：$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{\left(\frac{12-3x_0}{4y_0}\right)^2}{9+\left(\frac{3-3x_0}{y_0}\right)^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$，又 P（x_0，y_0）是 C 上一点，则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$．$y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$，代入化简即可得出.

【解答】解：（Ⅰ）设 F（c，0），A（c，d），则$\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}=1$

又$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，∴ $|d|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，

∵△AFO 的面积为$\frac{3}{4}$，∴$\frac{1}{2}c|d|=\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{4}$，$bc=\sqrt{3}$．

由$\begin{cases}a^2-b^2=c^2\\a=2c\\bc=\sqrt{3}\end{cases}$，得$\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$

∴C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（Ⅱ）由（1）知直线 l 的方程为$\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$（$y_0\neq0$），即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}$（$y_0\neq0$）．

∵直线 AF 的方程为 $x=1$，∴直线 l 与 AF 的交点为 $M\left(1,\frac{12-3x_0}{4y_0}\right)$，

直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N\left(4,\frac{3-3x_0}{y_0}\right)$，

则$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(\frac{12-3x_0}{4y_0})^2}{9+(\frac{3-3x_0}{y_0})^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$，

又P（x_0，y_0）是C上一点，则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，$y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$

代入上式得：$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2}=\frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2}=\frac{1}{4}$，

∴$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，为定值．

【点评】本题考查了椭圆的标准方程及其性质、直线交点、三角形面积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于难题．

20．【分析】（Ⅰ）（i）求出函数的导数，计算f（1），f'（1）的值，求出切线方程即可；（ii）求出函数的导数，解关于导函数的不等式，求出函数的单调区间，求出函数的极值即可；

（Ⅱ）解法一：问题等价于函数$y=\frac{1}{a}$与函数$y=x\ln x$的图象有两个不同交点；

解法二：求出函数的导数，通过讨论a的范围，求出函数的单调区间，结合函数的零点的个数求出a的范围即可．

【解答】解：（Ⅰ）（i）当$a=-1$时，$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，

则f（1）=1，$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$，

∴切线的斜率$k=f'$（1）=0，

∴切线方程为$y=1$；

（ii）g（x）$=x\ln x$，函数定义域为$\{x|x>0\}$，

g'（x）$=\ln x+1$，

令g'（x）>0，解得$x=\frac{1}{e}$，令g'（x）<0，解得$0<x<\frac{1}{e}$，

故g（x）在（0，$\frac{1}{e}$）递减，在（$\frac{1}{e}$，+∞）递增，

故g（x）极小值$=g$（$\frac{1}{e}$）$=-\frac{1}{e}$，无极大值．

（Ⅱ）解法1：令$f(x)=\frac{1}{x}-a\ln x=0$，解得$\frac{1}{a}=x\ln x$（显然$a\neq0$）

问题等价于函数$y=\frac{1}{a}$与函数$y=x\ln x$的图象有两个不同交点．

由（*ii*）可知 $g(\frac{1}{e^2})=-\frac{2}{e^2}$，$g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，$\begin{cases}\frac{1}{a}>-\frac{1}{e}\\ \frac{1}{a}\leqslant-\frac{2}{e^2}\end{cases}$，解得：$-\frac{e^2}{2}\leqslant a<-e$，

故实数 *a* 的取值范围是 $[-\frac{e^2}{2},\ -e)$.

解法 2：$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=-\frac{ax+1}{x^2}$

①$a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[\frac{1}{e^2},\ +\infty)$ 上是减函数，$f(x)$ 不能有两个零点；

②$a>0$ 时，$ax+1>0$，$\therefore f'(x)=-\frac{ax+1}{x^2}<0$ 在 $[\frac{1}{e^2},\ +\infty)$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2},\ +\infty)$ 上是减函数，$f(x)$ 不能有两个零点；

③$a<0$ 时，令 $f'(x)=-\frac{ax+1}{x^2}=0$，$x=-\frac{1}{a}$ $f(x)$，$f,(x)$ 变化情况如下表：

（*i*）$-\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{e^2}$ 时，即 $a\leqslant -e^2$，$f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2},\ +\infty)$ 上是增函数，$\therefore f(x)$ 不能有两个零点；

（*ii*）$-\frac{1}{a}>\frac{1}{e^2}$ 时，$-e^2<a<0$ $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2},\ -\frac{1}{a})$ 上是减函数，$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{a},\ +\infty)$ 上是增函数.

$\because f(1)=0\therefore$ 若 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2},\ +\infty)$ 有两个零点只需：$\begin{cases}f(-\frac{1}{a})<0\\ f(\frac{1}{e^2})\geqslant 0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}-a-a\ln(-\frac{1}{a})<0\\ e^2-a\ln\frac{1}{e^2}\geqslant 0\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a<-e\\ a\geqslant-\frac{e^2}{2}\end{cases}\therefore -\frac{e^2}{2}\leqslant a<-e$，

综上可知 *a* 的范围是 $[-\frac{e^2}{2},\ -e)$.

【点评】本题考查了函数的单调性、最值问题，考查导数的应用以及分类讨论思想，转化思想，是一道综合题.