2018 北京丰台高三二模

数　　学（文）

2018.5

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,x^2-2x-3<0\}$，则$\complement_U A=$

(A) $\{x\,|\,x\le -1$ 或 $x\ge 3\}$　　(B) $\{x\,|\,x\le -3$ 或 $x\ge 1\}$

(C) $\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>3\}$　　(D) $\{x\,|\,x<-3$ 或 $x>1\}$

（2）设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，则“$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相同”的

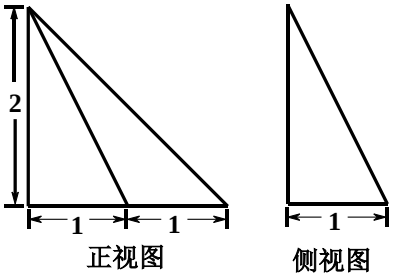
(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

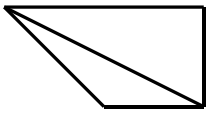
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

（3）设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$的一条渐近线的倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$，则$a=$

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(C) $\sqrt{3}$　　(D) $2\sqrt{3}$




俯视图

（4）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为

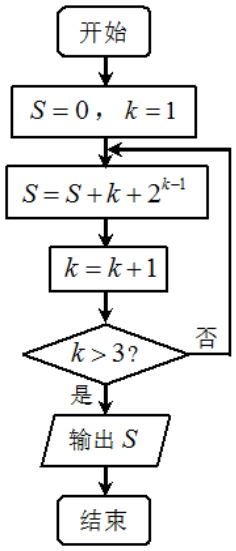
(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 6

（5）下列函数中，既是偶函数，又在区间$(-\infty,0)$上为减函数的是

(A) $y=\log_2(-x)$　　(B) $y=\dfrac{x}{1-x}$

(C) $y=-x^2+1$　　(D) $y=\mathrm{e}^{|x|}$



（6）执行如图所示的程序框图，则输出的S值为

(A) 25　　(B) 20

(C) 13　　(D) 6

（7）在△ABC中，D为AB中点，E为CD中点，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，若$\overrightarrow{AE}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则$\dfrac{\lambda}{\mu}$的值是

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) 2　　(D) 4

（8）某游戏开始时，有红色精灵m个，蓝色精灵n个．游戏规则是：任意点击两个精灵，若两精灵同色，则合并

成一个红色精灵，若两精灵异色，则合并成一个蓝色精灵，当只剩一个精灵时，游戏结束．那么游戏结束时，剩下的精灵的颜色

(A) 只与 m 的奇偶性有关　　(B) 只与 n 的奇偶性有关

(C) 与 m，n 的奇偶性都有关　　(D) 与 m，n 的奇偶性都无关

第二部分 （非选择题　共 110 分）

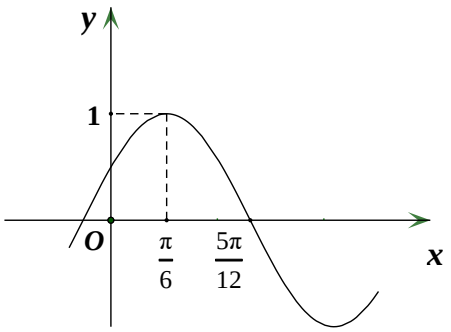
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）复数 $\dfrac{\mathrm{i}^4}{1+2\mathrm{i}}$ 的虚部为____.

（10）已知实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} x-y\geq 0, \\ x+y\leq 2, \\ x+2y\geq 0, \end{cases}$ 则 $x+4y$ 的最大值是____.

（11）已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$，则过点 $P(2,\sqrt{3})$ 且与圆 C 相切的直线方程为____.

（12）已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 ω=____；$\varphi=$____.



（13）设函数 $f(x)=\begin{cases} -x-2, x\leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, x>0. \end{cases}$

① $f(2)=$____；

② 若 $f(x+1)>1$，则 x 的取值范围是____.

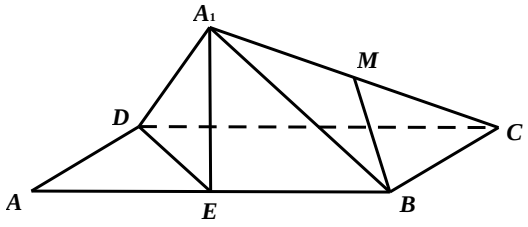
（14）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E 为 AB 的中点．将△ ADE 沿 DE 翻折，得到四棱锥 A_1-DEBC．设 A_1C 的中点为 M，在翻折过程中，有下列三个命题：

① 总有 BM // 平面 A_1DE；

② 线段 BM 的长为定值；

③ 存在某个位置，使 DE 与 A_1C 所成的角为 $90°$.

其中正确的命题是____.（写出所有正确命题的序号）



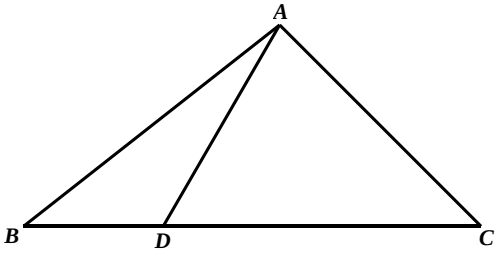
三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

如图所示，在△ ABC 中，D 是 BC 边上一点，$AB=14$，$BD=6$，$AD=10$，$\cos\angle DAC=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

（Ⅰ）求 $\angle ADB$；

（Ⅱ）求 AC 的长.



（16）（本小题共 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2$，等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=3b_1$，$b_2b_4=a_2$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{b_{2n-1}\}$的前n项和T_n.

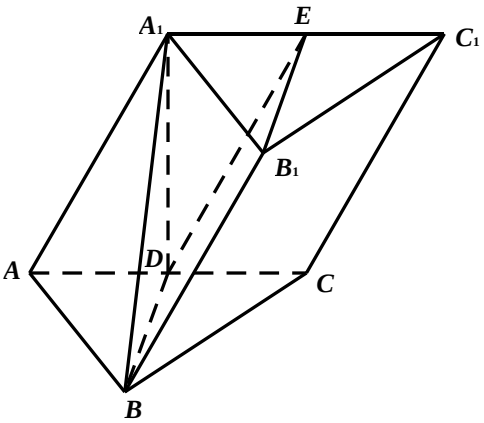
（17）（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D是AC的中点，$A_1D\perp$平面ABC，$AB=BC$，平面BB_1D与棱A_1C_1交于点E.

（Ⅰ）求证：$AC\perp A_1B$；

（Ⅱ）求证：平面$BB_1D\perp$平面AA_1C_1C；

（Ⅲ）求证：$B_1B/\!/DE$.



（18）（本小题共 13 分）

某汽车生产厂家为了解某型号电动汽车的“实际平均续航里程数”，收集了使用该型号电动汽车1年以上的部分客户的数据，得到他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”．从年龄在40岁以下的客户中抽取8位归为A组，从年龄在40岁（含40岁）以上的客户中抽取8位归为B组，将他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”整理成如下茎叶图：

A组客户					B组客户				
30	25	25	20	2	00	20	30		
40	38	32	30	3	32	38	40	60	80

注：“实际平均续航里程数”是指电动汽车的行驶总里程与充电次数的比值.

（Ⅰ）分别求出A组客户与B组客户“实际平均续航里程数”的平均值；

（Ⅱ）在A，B两组客户中，从“实际平均续航里程数”大于335的客户中各随机抽取1位客户，求A组客户的“实际平均续航里程数”不小于B组客户的“实际平均续航里程数”的概率；

（Ⅲ）试比较A，B两组客户数据方差的大小.（结论不要求证明）

（19）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=(x-a)\cos x-\sin x$，$x\in(0,\pi)$，$(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若对于任意 $x_1\in(0,\pi)$，存在 $x_2\in(0,\pi)$，都有 $f(x_1)>x_2^2-2x_2-1$，求 a 的取值范围.

（20）（本小题共 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为4，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过右焦点的直线 l 与椭圆相交于 M，N 两点，点 P 的坐标为 $(4,3)$，记直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）当 $|MN|=\dfrac{24}{7}$ 时，求直线 l 的斜率；

（Ⅲ）求证：k_1+k_2 为定值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	A	B	C	A	D	C	B	B

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）$-\frac{2}{5}$　　（10） 5　　（11） $x+\sqrt{3}y-5=0$

（12）2；$\frac{\pi}{6}$　　（13）-1；$(-\infty,-4)\cup(-1,-\frac{1}{2})$　　（14）①②

注：第 12，13 题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分.

第 14 题只写对一个得 2 分，有一个错误不得分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）在△ ADB 中，由余弦定理得

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{100+36-196}{2\times10\times6}=-\frac{1}{2}.$$ ……2 分

因为 $\angle ADB\in(0,\pi)$，……3 分

所以 $\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$.……5 分

（Ⅱ）由 $\cos\angle DAC=\frac{\sqrt{7}}{14}$，可知 $\sin\angle DAC=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，……6 分

所以 $\sin\angle C=\sin(\frac{2\pi}{3}-\angle DAC)$……8 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.……10 分

在△ ADC 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle C}$，……12 分

所以 $\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10}{\frac{\sqrt{21}}{7}}$，所以 $AC=5\sqrt{7}$.……13 分

（16）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $S_n=3n^2$，

所以 $a_1=S_1=3$.……1 分

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2-3(n-1)^2$

$= 6n - 3$. ……3 分

因为当 $n = 1$时，$6 \times 1 - 3 = 3 = a_1$， ……4 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n = 6n - 3$. ……5 分

（Ⅱ）设数列$\{b_n\}$的公比为q.

因为 $a_1 = 3b_1$，所以 $b_1 = 1$. ……6 分

因为 $b_2 \cdot b_4 = a_2$， 所以 $b_3^2 = 9$. ……8 分

因为 $b_3 = b_1 q^2 > 0$，所以 $b_3 = 3$，且$q^2 = 3$. ……10 分

因为$\{b_n\}$是等比数列，

所以$\{b_{2n-1}\}$是首项为$b_1 = 1$，公比为$q^2 = 3$的等比数列. ……11 分

所以 $T_n = \dfrac{b_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2} = \dfrac{1-3^n}{1-3} = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$.

即 $T_n = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$. ……13 分

（17）（本小题共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 $A_1D \perp$ 平面 ABC，

所以 $A_1D \perp AC$. ……1 分

因为△ABC 中， $AB = BC$， D 是 AC 的中点，

所以 $BD \perp AC$. ……2 分

因为 $A_1D \cap BD = D$， ……3 分

所以 $AC \perp$ 平面 A_1BD. ……4 分

所以 $AC \perp A_1B$. ……5 分

（Ⅱ） 因为 $A_1D \perp$ 平面 ABC，

因为 $BD \subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1D \perp BD$. ……6 分

由（Ⅰ）知 $BD \perp AC$.

因为 $AC \cap A_1D = D$， ……7 分

所以 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1. ……8 分

因为 $BD \subset$ 平面 BB_1D，

所以 平面 $BB_1D \perp$ 平面 AA_1C_1C. ……9 分

（Ⅲ）因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 A_1ABB_1 为平行四边形，

所以 $B_1B/\!/A_1A$. ……10 分

因为 $B_1B\not\subset$ 平面 A_1ACC_1 ， $A_1A\subset$ 平面 A_1ACC_1 ， ……11 分

所以 $B_1B/\!/$ 平面 A_1ACC_1 . ……12 分

因为 $B_1B\subset$ 平面 BB_1D ，且平面 $BB_1D\bigcap$ 平面 $A_1ACC_1=DE$ ， ……13 分

所以 $B_1B/\!/DE$. ……14 分

（18）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）A 组平均值为： $\dfrac{220+225+225+230+330+332+338+340}{8}=280$ ；……1 分

B 组平均值为： $\dfrac{200+220+230+332+338+340+360+380}{8}=300$. ……2 分

（Ⅱ）将 A 组客户中实际平均续航里程数为 338，340 的客户分别记为 a_1 ， a_2 ；

将 B 组客户中实际平均续航里程数为 338，340，360，380 的客户分别记为 b_1 ， b_2 ， b_3 ， b_4 .

从 A，B 两组实际平均续航里程数大于 335km 的客户中各随机抽取 1 位客户的事件包括：

a_1b_1 ， a_1b_2 ， a_1b_3 ， a_1b_4 ， a_2b_1 ， a_2b_2 ， a_2b_3 ， a_2b_4 ，共 8 种， ……5 分

其中 A 组客户的实际平均续航里程数不小于 B 组客户的实际平均续航里程数的事件包括：

a_1b_1 ， a_2b_1 ， a_2b_2 ，共 3 种. ……7 分

设“A 组客户的实际平均续航里程数不小于 B 组客户的实际平均续航里程数”为事件 M，……8 分

则 $P(M)=\dfrac{3}{8}$. ……10 分

所以 A 组客户的实际平均续航里程数不小于 B 组客户的实际平均续航里程数的概率为 $\dfrac{3}{8}$.

（III）A 组数据的方差小于 B 组数据的方差. ……13 分

（19）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=-(x-a)\sin x$. ……2 分

因为 $x\in(0,\pi)$ ，所以 $\sin x>0$. ……3 分

由 $f'(x)=0$ 得 $x=a$. ……4 分

当 $a\le 0$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减； ……5 分

当 $a\ge\pi$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增； ……6 分

当 $0<a<\pi$ 时， x ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,a)$	a	(a,π)
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,a)$，单调递减区间是 (a,π).

综上所述，当 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减；

当 $a\ge \pi$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增；

当 $0<a<\pi$ 时，以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,a)$，单调递减区间是 (a,π). ……9 分

（Ⅱ）设 $g(x)=x^2-2x-1$.

因为 $g(x)=(x-1)^2-2$，当 $x=1$ 时， $g(x)$ 有最小值为 -2. ……10 分

因为对于任意 $x_1\in(0,\pi)$，存在 $x_2\in(0,\pi)$，都有 $f(x_1)>x_2^2-2x_2-1$，

所以 $\begin{cases} f(0)\ge -2 \\ f(\pi)\ge -2 \end{cases}$， 即 $\begin{cases} -a\ge -2 \\ -(\pi-a)\ge -2 \end{cases}$.

所以 $\pi-2\le a\le 2$，即 a 的取值范围是 $[\pi-2,2]$. ……13 分

（20）（本小题共 14 分）

（Ⅰ）解：依题意 $2a=4$，所以 $a=2$. ……1 分

因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以 $c=1$. ……2 分

所以 $b^2=3$， ……3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）解：椭圆得右焦点 $F(1,0)$.

当直线 l 的斜率不存在时，不妨取 $M(1,\dfrac{3}{2})$， $N(1,-\dfrac{3}{2})$， $|MN|=3$，不合题意.

……5 分

当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l： $y=k(x-1)$， $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$. ……6 分

联立方程组 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \\ y=k(x-1) \end{cases}$

消 y 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$， $\Delta>0$ 成立. ……7 分

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$. ……8 分

因为$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{24}{7}$， ……9 分

即$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\dfrac{8k^2}{3+4k^2})^2-4\cdot\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}}=\dfrac{24}{7}$，

所以$\dfrac{1+k^2}{3+4k^2}=\dfrac{2}{7}$，所以$k=\pm1$. ……10 分

（Ⅲ）证明：当直线l 的斜率不存在时，不妨取$M(1,\dfrac{3}{2})$， $N(1,-\dfrac{3}{2})$，

此时$k_1+k_2=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}+\dfrac{\frac{9}{2}}{3}=2$. ……11 分

当直线l的斜率存在时，

设直线l： $y=k(x-1)$， $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$.

此时$k_1+k_2=\dfrac{3-y_1}{4-x_1}+\dfrac{3-y_2}{4-x_2}=\dfrac{(3-y_1)(4-x_2)+(3-y_2)(4-x_1)}{16-4(x_1+x_2)+x_1x_2}$.

分子化为$24-3(x_1+x_2)-4(y_1+y_2)+x_2y_1+x_1y_2$

$=2kx_1x_2-(3+5k)(x_1+x_2)+8k+24$.

所以$k_1+k_2=\dfrac{2k\times\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}-(3+5k)\times\dfrac{8k^2}{3+4k^2}+8k+24}{16-4\times\dfrac{8k^2}{3+4k^2}+\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}}$

$=\dfrac{2k\times(k^2-3)-2k^2(3+5k)+2(k+3)(3+4k^2)}{4(3+4k^2)-8k^2+(k^2-3)}=\dfrac{18k^2+18}{9k^2+9}=2$.

综上所述，k_1+k_2为定值2. ……14 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）