# 2018 北京丰台高三二模

# 数　　学（理）

2018.5

**第一部分**（选择题　共 40 分）

**一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

（1）已知 $A=\{x\,|\,x>1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x-3<0\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{x\,|\,x<-1$ 或 $x\geq 1\}$　　(B) $\{x\,|\,1<x<3\}$

(C) $\{x\,|\,x>3\}$　　(D) $\{x\,|\,x>-1\}$

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同”是“$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

（3）已知双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $b$ 的值为

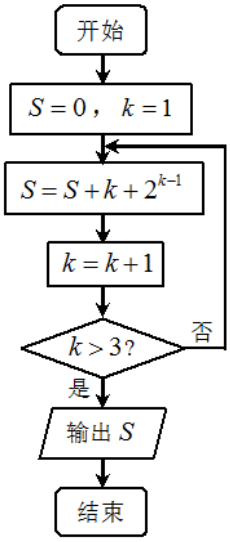
(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\sqrt{3}$

(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $3\sqrt{3}$

（4）执行如图所示的程序框图，输出的 $S$ 值为

(A) 25　　(B) 20

(C) 13　　(D) 6




（5）在 $(x-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中，若二项式系数的和为 32，则 $x$ 的系数为

(A) $-40$　　(B) $-10$

(C) 10　　(D) 40

（6）设下列函数的定义域为 $(0,+\infty)$，则值域为 $(0,+\infty)$ 的函数是

(A) $y=\mathrm{e}^x-x$　　(B) $y=\mathrm{e}^x+\ln x$

(C) $y=x-\sqrt{x}$　　(D) $y=\ln(x+1)$

（7）已知 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geq 0,\\ x+y\leq 2,\\ x+2y\geq 0,\end{cases}$ 若目标函数 $z=mx+y$ 的最大值是 6，则 $m=$

(A) $-5$　　(B) $-2$　　(C) 2　　(D) 5

（8）某游戏开始时，有红色精灵 $m$ 个，蓝色精灵 $n$ 个．游戏规则是：任意点击两个精灵，若两精灵同色，则合并成一个红色精灵，若两精灵异色，则合并成一个蓝色精灵，当只剩一个精灵时，游戏结束．那么游戏结束时，剩下的精灵的颜色

(A) 只与 $m$ 的奇偶性有关　　(B) 只与 $n$ 的奇偶性有关

(C) 与 $m$，$n$ 的奇偶性都有关　　(D) 与 $m$，$n$ 的奇偶性都无关

**第二部分** （非选择题　共 110 分）

**二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。**

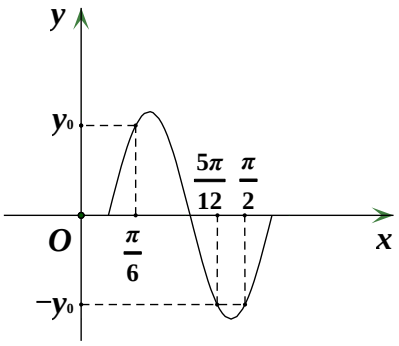
（9）已知复数 $z(1+\mathrm{i})=2$，则 $z=$____.

（10）已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2a_3=27$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$____.

（11）在极坐标系中，如果直线 $\rho\cos\theta=a$ 与圆 $\rho=2\sin\theta$ 相切，那么 $a=$____.

（12）甲乙两地相距 $500$ km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度 $v$ 不能超过 $120$ km/h．已知汽车每小时运输成本为 $\frac{9}{250}v^2+360$ 元，则全程运输成本与速度的函数关系是 $y=$____，当汽车的行驶速度为____km/h 时，全程运输成本最小．

（13）若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 $\omega=$____，$\varphi=$____.



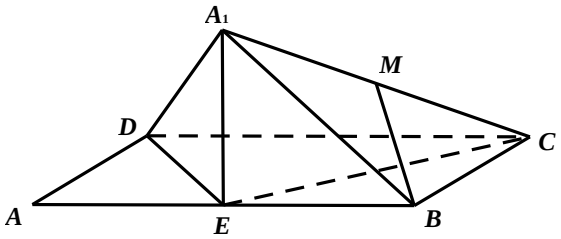

（14）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，$E$ 为边 $AB$ 的中点．将△ $ADE$ 沿 $DE$ 翻折，得到四棱锥 $A_1-DEBC$．设线段 $A_1C$ 的中点为 $M$，在翻折过程中，有下列三个命题：

① 总有 $BM\parallel$ 平面 $A_1DE$；

② 三棱锥 $C-A_1DE$ 体积的最大值为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$；

③ 存在某个位置，使 $DE$ 与 $A_1C$ 所成的角为 $90°$.

其中正确的命题是____.（写出所有正确命题的序号）



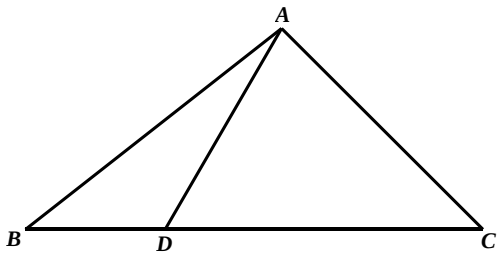

**三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

（15）**（本小题共 13 分）**

如图所示，在△ $ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 边上的一点，且 $AB=14$，$BD=6$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，$\cos\angle C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

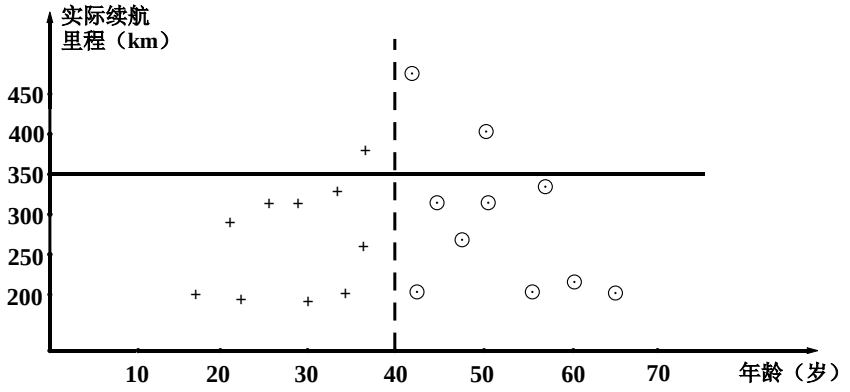
（Ⅰ）求 $\sin\angle DAC$；

（Ⅱ）求 $AD$ 的长和△ $ABC$ 的面积.



（16）**（本小题共 13 分）**

某汽车生产厂家为了解某型号电动汽车的“实际平均续航里程数”，收集了使用该型号电动汽车1年以上的部分客户的相关数据，得到他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”．从年龄在 40 岁以下的客户中抽取 10 位归为 *A* 组，从年龄在 40 岁（含 40 岁）以上的客户中抽取 10 位归为 *B* 组，将他们的电动汽车的“实际平均续航里程数”整理成下图，其中“+”表示 *A* 组的客户，“⊙”表示 *B* 组的客户．




注：“实际平均续航里程数”是指电动汽车的行驶总里程与充电次数的比值．

（Ⅰ）记 *A*，*B* 两组客户的电动汽车的“实际平均续航里程数”的平均值分别为 $m$，$n$，根据图中数据，试比较 $m$，$n$ 的大小（结论不要求证明）；

（Ⅱ）从 *A*，*B* 两组客户中随机抽取 2 位，求其中至少有一位是 *A* 组的客户的概率；

（III）如果客户的电动汽车的“实际平均续航里程数”不小于 350，那么称该客户为“驾驶达人”．从 *A*，*B* 两组客户中，各随机抽取 1 位，记“驾驶达人”的人数为 $\xi$，求随机变量 $\xi$ 的分布列及其数学期望 $E\xi$．

（17）**（本小题共 14 分）**

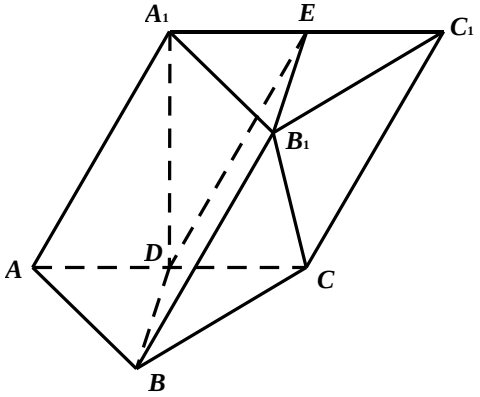
如图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$D$ 是 $AC$ 中点，$A_1D\perp$ 平面 $ABC$，平面 $BB_1D$ 与棱 $A_1C_1$ 交于点 $E$，$AA_1=AC$，$AB=BC$．

（Ⅰ）求证：$B_1B/\!/DE$；

（Ⅱ）求证：$AA_1\perp BD$；

（Ⅲ）若 $B_1C$ 与平面 $A_1ABB_1$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，

求 $\frac{AC}{BD}$ 的值．



（18）**（本小题共 13 分）**

已知函数 $f(x)=x\cos x-ax+a$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$(a\neq 0)$.

（Ⅰ）当 $a\geq 1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：$f(x)$ 有且仅有一个零点.

（19）**（本小题共 14 分）**

已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $4$，离心率为 $\frac{1}{2}$，过右焦点 $F$ 且不与坐标轴垂直的直线 $l$ 与椭圆相交于 $M$，$N$ 两点，设点 $P(m,0)$，记直线 $PM$，$PN$ 的斜率分别为 $k_1$，$k_2$.

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）若 $k_1+k_2=0$，求 $m$ 的值.

（20）**（本小题共 13 分）**

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_1=0$，$a_2=m$，当 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, & k>t,\\ \frac{S_n}{n}, & k=t,\\ a_n+1, & k<t.\end{cases}$ 其中，$k$ 是数列的前 $n$ 项中 $a_i<a_{i+1}$ 的数对 $(a_i,a_{i+1})$ 的个数，$t$ 是数列的前 $n$ 项中 $a_i>a_{i+1}$ 的数对 $(a_i,a_{i+1})$ 的个数 $(i=1,2,3,\cdots,n-1)$.

（Ⅰ）若 $m=5$，求 $a_3$，$a_4$，$a_5$ 的值；

（Ⅱ）若 $a_n$ $(n\geq 3)$ 为常数，求 $m$ 的取值范围；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 有最大项，写出 $m$ 的取值范围（结论不要求证明）.

**（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）**

# 参考答案

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。**

| 题号 | （1） | （2） | （3） | （4） | （5） | （6） | （7） | （8） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | A | B | C | D | D | C | B |

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。**

（9）$1-\mathrm{i}$　　（10）$121$　　（11）$\pm 1$

（12）$y=18v+\dfrac{180000}{v}\ (0<v\le 120)$；$100$　　（13）$4$；$-\dfrac{\pi}{3}$　　（14）①②

注：第 12，13 题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分；
第 14 题只写对一个得 2 分，有一个错误不得分.

**三、解答题：**

（15）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）在△ $ACD$ 中，因为 $\angle DAC=\pi-(\angle ADC+\angle C)$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\sin\angle DAC=\sin(\dfrac{\pi}{3}+\angle C)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle C+\dfrac{1}{2}\sin\angle C$.　　……2 分

因为 $\cos\angle C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，　$0<\angle C<\pi$，

所以 $\sin\angle C=\sqrt{1-\cos^2\angle C}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.　　……4 分

所以 $\sin\angle DAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.　　……5 分

（Ⅱ）在△ $ABD$ 中，由余弦定理可得

$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cdot\cos\angle ADB$，　　……7 分

所以 $14^2=6^2+AD^2-2\times 6\times AD\times\cos\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $AD^2+6AD-160=0$，　即 $(AD+16)(AD-10)=0$.

所以 $AD=10$ 或 $AD=-16$（舍）.

所以 $AD=10$.　　……8 分

在△ $ACD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AD}{\sin\angle C}$，

即 $\dfrac{CD}{\dfrac{3\sqrt{21}}{14}}=\dfrac{10}{\dfrac{\sqrt{21}}{7}}$，……10 分

所以 $CD=15$.……11 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AD\times BD\times\sin\angle ADB+\dfrac{1}{2}\times AD\times DC\times\sin\angle ADC=\dfrac{105\sqrt{3}}{2}$.

即 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{105\sqrt{3}}{2}$.……13 分

（16）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$m<n$.……3 分

（Ⅱ）设“从抽取的 20 位客户中任意抽取 2 位，至少有一位是 A 组的客户”为事件 M，则

$P(M)=\dfrac{C_{10}^1C_{10}^1+C_{10}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{29}{38}$.……6 分

所以从抽取的 20 位客户中任意抽取 2 位至少有一位是 A 组的客户的概率是 $\dfrac{29}{38}$.

（III）依题意 $\xi$ 的可能取值为 0，1，2.

则 $P(\xi=0)=\dfrac{C_9^1C_8^1}{C_{10}^1C_{10}^1}=\dfrac{18}{25}$；　　$P(\xi=1)=\dfrac{C_1^1C_8^1+C_9^1C_2^1}{C_{10}^1C_{10}^1}=\dfrac{13}{50}$；

$P(\xi=2)=\dfrac{C_1^1C_2^1}{C_{10}^1C_{10}^1}=\dfrac{1}{50}$.……10 分

所以随机变量 $\xi$ 的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{18}{25}$ | $\dfrac{13}{50}$ | $\dfrac{1}{50}$ |

所以随机变量 $\xi$ 的数学期望 $E\xi=0\times\dfrac{18}{25}+1\times\dfrac{13}{50}+2\times\dfrac{1}{50}=\dfrac{3}{10}$.……12 分

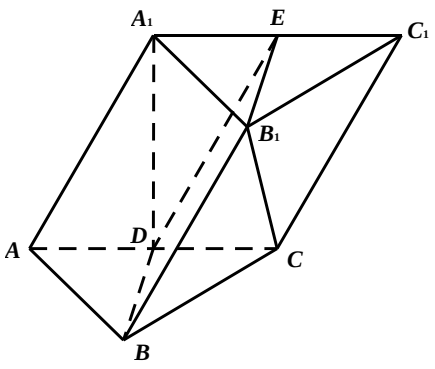
即 $E\xi=\dfrac{3}{10}$.……13 分

（17）（本小题共 14 分）

（Ⅰ）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

侧面 $A_1ABB_1$ 为平行四边形，

所以 $B_1B/\!/A_1A$.



又因为 $B_1B \not\subset$ 平面 $A_1ACC_1$， $A_1A \subset$ 平面 $A_1ACC_1$，

所以 $B_1B \parallel$ 平面 $A_1ACC_1$. ……2 分

因为 $B_1B \subset$ 平面 $BB_1D$，且平面 $BB_1D \cap$ 平面 $A_1ACC_1 = DE$，

所以 $B_1B \parallel DE$. ……4 分

（Ⅱ）证明：在△ $ABC$ 中，因为 $AB = BC$， $D$ 是 $AC$ 的中点，
所以 $BD \perp AC$.

因为 $A_1D \perp$ 平面 $ABC$，如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$. ……5 分

设 $BD=a$， $AD=b$，

在△ $AA_1D$ 中 $AA_1 = 2AD$， $\angle A_1DA = 90°$，

所以 $A_1D=\sqrt{3}b$，所以 $D(0,0,0)$， $A(0,-b,0)$，

$A_1(0,0,\sqrt{3}b)$， $B(a,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{AA_1} = (0,b,\sqrt{3}b)$， $\overrightarrow{DB} = (a,0,0)$.

……7 分

所以 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \times a + b \times 0 + \sqrt{3}b \times 0 = 0$，

所以 $AA_1 \perp BD$. ……9 分

（Ⅲ）解：因为 $E(0,b,\sqrt{3}b)$， 所以 $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DB} = (a,b,\sqrt{3}b)$，即 $B_1(a,b,\sqrt{3}b)$.

因为 $C(0,b,0)$，所以 $\overrightarrow{CB_1} = (a,0,\sqrt{3}b)$. ……10 分

设平面 $ABB_1A_1$ 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

因为 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} by + \sqrt{3}bz = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases}$，

令 $z = a$，则 $y = -\sqrt{3}a$， $x = \sqrt{3}b$，

所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}b, -\sqrt{3}a, a)$. ……12 分

因为 $|\cos < \vec{n}, \overrightarrow{CB_1} >| = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{CB_1}|} = \dfrac{2\sqrt{3}ab}{\sqrt{3b^2+3a^2+a^2} \times \sqrt{a^2+3b^2}}$

所以 $\dfrac{2\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2+3b^2}\sqrt{a^2+3b^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，即 $4a^4 - 13a^2b^2 + 9b^4 = 0$，

所以 $a=b$ 或 $2a = 3b$，即 $\dfrac{AC}{BD}=2$ 或 $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{4}{3}$. ……14 分

（18）（本小题共 13 分）

（Ⅰ）解：依题意 $f'(x)=\cos x-x\sin x-a$ . ……2 分

令 $g(x)=\cos x-x\sin x-a$ ， $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ， 则 $g'(x)=-2\sin x-x\cos x\le 0$ .

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因为 $g(0)=1-a\le 0$ ，所以 $g(x)\le 0$ ，即 $f'(x)\le 0$ ， ……4 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $[0,\frac{\pi}{2}]$ ，没有单调递增区间. ……5 分

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）知， $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，且 $g(0)=1-a$ ， $g(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}-a$ .

当 $a\ge 1$ 时， $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因为 $f(0)=a>0$ ， $f(\frac{\pi}{2})=a(1-\frac{\pi}{2})<0$ ，

所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点. ……7 分

当 $-\frac{\pi}{2}-a\ge 0$ ，即 $a\le-\frac{\pi}{2}$ 时， $g(x)\ge 0$ ，即 $f'(x)\ge 0$ ， $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

因为 $f(0)=a<0$ ， $f(\frac{\pi}{2})=a(1-\frac{\pi}{2})>0$ ，

所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点. ……9 分

当 $-\frac{\pi}{2}<a<1$ 时， $g(0)=1-a>0$ ， $g(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}-a<0$ ，

所以存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，使得 $g(x_0)=0$ . ……10 分

$x$ ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,x_0)$ | $x_0$ | $(x_0,\frac{\pi}{2})$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减. ……11 分

因为 $f(0)=a$ ， $f(\frac{\pi}{2})=a(1-\frac{\pi}{2})$ ，且 $a\ne 0$ ，

所以 $f(0)f(\frac{\pi}{2})=a^2(1-\frac{\pi}{2})<0$ ，所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点. ……12 分

综上所述， $f(x)$ 有且仅有一个零点. ……13 分

（19）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）依题意得 $2a=4$，所以 $a=2$. ……1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $c=1$. ……2 分

所以 $b^2=3$. ……3 分

所以椭圆$C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）椭圆的右焦点 $F(1,0)$. ……5 分

设直线 $l$： $y=k(x-1)\,(k\neq 0)$，设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$. ……6 分

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1)\end{cases}$

消 $y$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$， $\Delta>0$ 成立. ……8 分

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$. ……9 分

因为 $k_1+k_2=\frac{-y_1}{m-x_1}+\frac{-y_2}{m-x_2}=0$， ……10 分

所以 $\frac{-y_1(m-x_2)-y_2(m-x_1)}{(m-x_1)(m-x_2)}=0$，即 $y_1(m-x_2)+y_2(m-x_1)=0$， ……11 分

所以 $k(m-x_2)(x_1-1)+k(m-x_1)(x_2-1)=0$ 恒成立. ……12 分

因为 $k\neq 0$，所以 $(m+1)(x_1+x_2)-2x_1x_2-2m=0$，

即 $(m+1)\cdot\frac{8k^2}{3+4k^2}-2\cdot\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}-2m=0$， ……13 分

化简为 $8k^2(m+1)-8(k^2-3)-2m(3+4k^2)=0$，

所以 $m=4$. ……14 分

（20）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为$a_1$=0， $a_2$=5， 所以 $a_1<a_2$，所以 $a_3=a_2-1=4$. ……1 分

因为 $a_2>a_3$，所以 $a_4=\frac{a_1+a_2+a_3}{4-1}=3$. ……2 分

因为 $a_3>a_4$，所以 $a_5=a_4+1=4$. ……4 分

所以 $a_3=4$， $a_4=3$， $a_5=4$.

（Ⅱ）当 $m=0$ 时，$a_3=0$，$a_4=0$，　　……5 分

当 $m>0$ 时，因为 $a_1<a_2$，所以 $a_3=a_2-1=m-1<a_2$，

所以 $a_4=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}=\dfrac{2m-1}{3}$.

因为 $a_3=a_4$，所以 $m-1=\dfrac{2m-1}{3}$，所以 $m=2$.　　……7 分

当 $m<0$ 时，因为 $a_1>a_2$，所以 $a_3=a_2+1=m+1>a_2$，

所以 $a_4=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}=\dfrac{2m+1}{3}$.

因为 $a_3=a_4$，所以 $m+1=\dfrac{2m+1}{3}$，所以 $m=-2$.　　……9 分

所以 $n\geq 3$ 时，$a_{n+1}=a_n$ 为常数的必要条件是 $m\in\{-2,0,2\}$.

当 $m=2$ 时，$a_3=a_4=1$，

因为当 $3\leq n\leq k(k>3)$ 时，$a_n=1$，都有 $a_{n+1}=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{0+2+1+\cdots+1}{n}=1$，

所以当 $m=2$ 符合题意，同理 $m=-2$ 和 $m=0$ 也都符合题意.　　……10 分

所以 $m$ 的取值范围是 $\{-2,0,2\}$.

（Ⅲ）$\{m\mid m\leq -2$ 或 $0\leq m\leq 2\}$.　　……13 分

**（若用其他方法解题，请酌情给分）**