2018 北京东城高三二模

数　　学（理）

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要 求的-项。

(1)若集合 A= {xl-1<x<2} ，B= {xlx<-2 或 x>l} ，则 AUB=

A.{xlx<一 2 或 x>l}

B.{xlx<-2 或 x> 一 1}

C.{xl-2<x<2}

D.{xI1<x<2}

(2)复数(1 +i)(2 一 i)=

A.3+i　　B.1+i　　C.3-I　　D.1-i

（3）在（$x+\frac{a}{x}$）^{5} 的展开式&x^3 中的系数 10,则实数 a 等于

A.-1　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.2

（4）已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 60°，且与椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 有相等的焦距，则 C 的方程为

（A）$\frac{x^2}{3}-y^2$（B）$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$（C）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$（D）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$

(5)设 a ，b 是非零向量，则 “$|a+b|=|a|-|b|$”是"a//b"的

A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

C.充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

(6)某公司为了解用户对其产品的满意度，从甲、乙两地区分别随机调查了 100 个用户，根据用户对产品的满意度评分，分别得到甲地区和乙地区用户满意度评分的频率分布直方图.

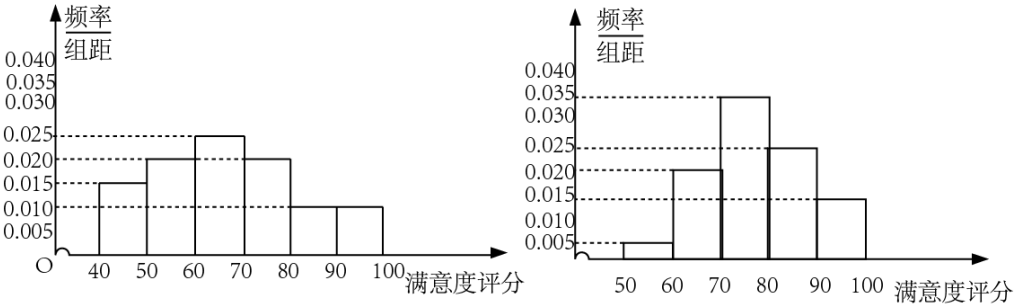
若甲地区和乙地区用户满意度评分的中位数分别为叫 m_1，m_2 ;标准差分别为 S_1 ,S_2 则下面正确的是则下面 正确的是

(A)$m_1>m_2$，$S_1>S_2$

(C)$m_1<m_2$ ，$S_1<S_2$

(B)$m_1>m_2$，$S_1<S_2$

(D)$m_1<m_2$，$S_1>S_2$



(7) 已知函数 $f(x)=\log_2 x$ ，$g(x)=2x+\alpha$ ，若存在 $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，使得 $f(x_1)=g(X_2)$ ，则 a 的取值范围是

A.$[-5,0]$

B.（-∞，-5]∪[0+∞）

C.(- 5，0)

D.（-∞，-5）∪（0，+∞）

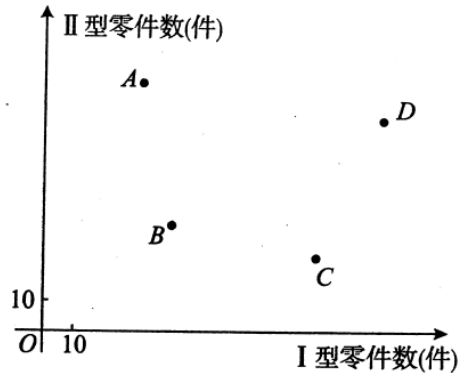
(8)A，B，C，D 四名工人一天中生产零件的情况如图所示，每个点的横、纵坐标分别表示该工人一天中生产的I型、II型零件数，则下列说法错误的是

A.四个工人中，D 的日生产零件总数最大

B.A，B 日生产零件总数之和小于 C ，D 日生产零件总数之和

C.A，B 日生产I型零件总数之和小于II型零件总数之和

(D)A，B，C，D 日生产I型零件总数之和小于II 型零件总数之和

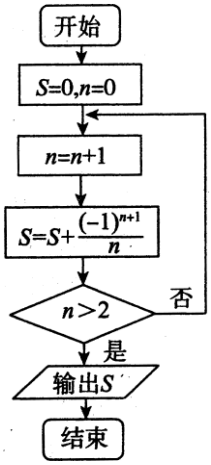


第二部分(非选择题共 110 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9)执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为 _____ .

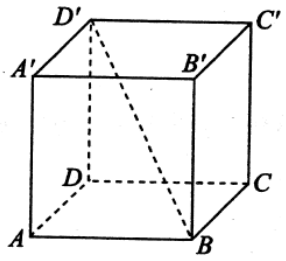
(10)设等比数列 $\{a_n\}$的公比 q=2 ，前 n 项和为 S_n，则$\frac{S_4}{a_2}$= _____.



(11)在极坐标系中，点 A(1,$\frac{\pi}{3}$)，B'(2-，$\frac{2\pi}{3}$)， 0 是极点，则 △AOB 的面积 等于

_____ .

(12) 如图，已知正方体 ABCD-A'B'C'D 的边长为 1，若过直线 BD'的平面与该正方体的面相交，交线围成一个菱形，则该菱形的面积为 _____.



(13)直线 x-y-1=0 被圆 C 所截的弦长为$\sqrt{2}$，则圆 C 的方程可以为 _____.(写出一个即可)

(14)某种物质在时刻 t (min) 的浓度 M (mg/L) 与 t 的函数关系为 $M(t)=ar^t+24$(a ，r 为常 数).在 t=0min 和 t=1min 测得该物质的浓度分别为 124 mg/L 和 64 mg/L ，那么在 t = 4 min 时，该物质的浓度为_____ mg/L; 若该物质的浓度小于 24.001 mg / L ，则 最小的整数 t 的值为 _____. (参考数据:lg 2≈0.301 0)

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

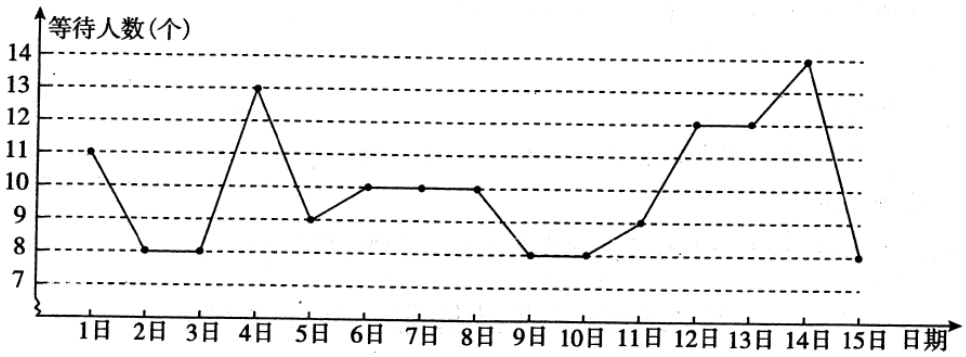
在△ABC 中，b=2 ，bcos C=ccos B.

(I)求 c 的值.

(II)若 α=3，求 sin 2A 的值.

(16)(本小题 13 分)

某银行的工作人员记录了 3 月 1 日到 3 月 15 日上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数，如图所示.



从这 15 天中，随机选取一天，随机变量 X 表示当天上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数.

（I）请把 X 的分布列补充完整 ；

X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{15}$

（II）令 μ 为 X 的数学期望，若 P（u-n≤X≤u+n）>0.5 ，求正整数 n 的最小值;

（III）由图判断，从哪天开始的连续五天上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务人数 的均值最大? (结论不要求证明)

(17)(本小题 14 分〉

如图，在四棱椎 A-BCDE 中，平面 ABC⊥平面 BCDE ，AB =AC= CD=2BE =2，

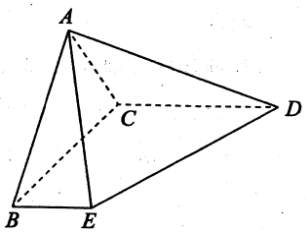
BE∥CD，CD⊥CB，AB⊥AC.

（I）求证：平面 ACD⊥平面 ABC;

X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{15}$

（II）若 O 为 BC 中点，P 为线段 CD 上一点 ，OP∥平面 ADE ，求$\frac{CP}{CD}$的值

（III）求二面角 A-DE-B 的大小.



(18)(本小题 13 分)

已知抛物线 C:$y^2=2px$ 经过点 P(2 .2) .A.B 是抛物线 C 土异于点 O 的不同的两点，其中 O 为原点.

（I）求抛物线 C 的方程，并求其焦点坐标和准线方程;

（II）若 OA⊥OB.求△AOB 面积的最小值.

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x+\frac{1}{2}ax^2$, $x\in[-\pi,\pi]$

（I）当 $\alpha=0$ 时，求 f（x）的单调区间;

（II）当 $\alpha>0$ 时，讨论 f(x)的零点个数.

(20)(本小题 13 分)

设 a,λ 均是正整数，数列{an}满足：$a_1=a$,$a_n+1=\begin{cases}\frac{an}{2}, an\text{ 是偶数}\\ an+\lambda, an\text{ 是奇数}\end{cases}$

（I）若 $\alpha_3=3$，$\lambda=5$，写出 a_1 的值;

（II）设 a= l，λ 为给定的正奇数，求证：若 a_n 为奇数，则 $a_n\leq\lambda$; 若 a_n 为偶数，则 $a_n\leq 2\lambda$;

（III）在（II）的条件下，求证:存在正整数 n(n≥2) ，使得 $a_n=1$.

参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	C	A	D	A	D

二、填空题

（9）$\frac{5}{6}$　　（10）$\frac{15}{2}$　　（11）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（12）$\frac{\sqrt{6}}{2}$

（13）$x^2+y^2=1$（答案不唯一）

（14）26.56；13

三、解答题

（15）

解:（I）在△ABC 中，由 bcos C= ccos B 及正弦定理，得

sin Bcos C-cos BsinC=o ，即 sin（B-C）=0.

因为 O<B<π，0<C<π ，所以-π<B-C<π.

所以 B=C . 所以 b=c.

因为 b=2 ，所以 c=2.

（II）由 b=c=2 ，α=3 ，得 cosA=$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ =-$\frac{1}{8}$.

又因为 0<A<π，所以 sinA=$\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

所以 sin 2A=2sin Acos A=2 X$\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ×（-$\frac{1}{8}$）=-$\frac{3\sqrt{7}}{32}$.

（16）解

（I）X 的分布列为

X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

（II）由（I）可得 X 的数学期望

E（X）=8×$\frac{1}{3}$+9×$\frac{2}{15}$+10×$\frac{1}{5}$+11×$\frac{1}{15}$+12×$\frac{2}{15}$+13×$\frac{1}{15}$+14×$\frac{1}{15}$=10

所以 u=10

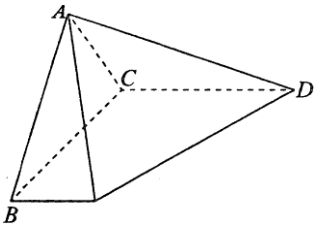
因为 P（10-1≤x≤10+1）=$\frac{6}{15}$ =$\frac{2}{5}$<0.5

P（10-2≤x≤10+2）=$\frac{5+2+3+1+2}{15}$ =$\frac{13}{15}$ >0.5

所以 n=2

（III）第 10 日或第 11 日

(17) (共 14 分)



(1)证明:如图 1，因为平面 ABC⊥平面 BCDE ，

平面 ABC∩平面 BCDE=CB ，

CD⊂平面 BCDE ，CD⊥CB ，

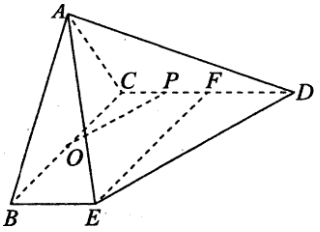
所以 CD⊥平面 ABC.

因为 CD⊂平面 ACD

所以平面 ACD ⊥平面 ABC. ……4 分

（） 解:如图 2 ，取 CD 中点 F ，连接 EF ，因为 OP// 平面 ADE ，OP⊂平面 BCDE，

平面 ADE∩平面 BCDE=DE ，所以 OP//DE.



所以∠CPO= ∠FDE.

因为 BE∥CF ，所以 EF//BC.

所以∠PCO= ∠DFE.

所以 △COP∽△FED.

所以$\frac{CP}{PD}$ =$\frac{CO}{FE}$ =$\frac{1}{2}$.

因为点 F 为 CD 的中点，

所以$\frac{CP}{PD}$ =$\frac{1}{4}$.

（III）解：连接 OA ，由(I)知 CD⊥平面 ABC ，

OAC⊂ 平面 ABC ，OBC ⊂平面 ABC ，

所以 CD⊥OA ，CD⊥OB.

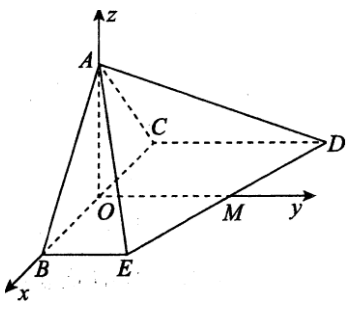
因为 AB=AC ，。O 为 BC 中点，所以 OA⊥OB.

作 OM//CD ，所以 OM⊥OA ，OM ⊥OB.

如图 3 ，建立空间坐标坐标系 O-xyz.

因为 AB=AC=CD=2BE=2 ，

所以 A(0，0，12) ，D(-$\sqrt{2}$,2 ，0) ，E($\sqrt{2}$，1， 0) ，



$\overrightarrow{AD}$= (-$\sqrt{2}$，2，-$\sqrt{2}$)，$\overrightarrow{AE}$= ($\sqrt{2}$，1，-$\sqrt{2}$).

因为 OA⊥OB，OA⊥OM，OB∩OM=O，

所以 OA⊥平面 BCDE. 所以平面 BCDE 的法向量 n=(0，0，1).

设平面 ADE 的法向量 m=(x, y ,z)则有

$\overrightarrow{AD}$ ·m=0,

$\overrightarrow{AE}$·m=0. 即$\begin{cases}-\sqrt{2}+2y-\sqrt{2}z=0\\ \sqrt{2}+y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$

令 x=1,则 2$\sqrt{2}$，z=3，即 m=（1,2$\sqrt{2}$，3）.

$\cos\langle n,m\rangle=\frac{n\cdot m}{|n||m|}=\frac{3}{1\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由题知二面角 A-DE-B 为锐角，所以二面角 A-DE-B 的大小为$\frac{\pi}{4}$

(18) (共 13 分)

解:（I）由抛物线 C:y^2=2px 经过点 P (2，2) 知 4p=4，解得 p= 1.

则抛物线 C 的方程为 y^2=2x.

抛物线 C 的焦点坐标为($\frac{1}{2}$ 0)，准线方程为 x=- $\frac{1}{2}$

（II）由题知，直线 AB 不与 y 轴垂直，设直线 AB:x=ty+a，

由才$\begin{cases}x=ty+a\\ y^2=2x\end{cases}$ 消去 x，得 y^2 -2ty-2a =0.

设 A(X_1，y_1)，B(x_2，y_2)，则 Y_1 +Y_2 =2t,Y_1Y_2 =-2a.

因为 OA⊥OB，所以 X_1X_2 +Y_1Y_2 =0 即平 $\frac{y_1^2y_2^2}{4}+y_1y_2=0.$

所以 Y_1Y_2 =0(舍)或 Y_1Y_2=-4.

所以-2a=-4，即 α=2. 所以直线 AB:x=ty+2.

所以直线 AB 过定点 (2，0).

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|$$

$$=\sqrt{y_1^2+y_2^2-2y_1y_2}$$

$$=\sqrt{y_1^2+y_2^2+8}$$

$$\geqslant\sqrt{2|y_1y_2|+8}$$

$$=4.$$

当且仅当 $Y_1=2, Y_2=-2$ 或 $Y_1=-2$ ，$y_2=2$ 时，等号成立.

所以 △AOB 面积的最小值为 4. …… 13 分

（19）

解:（I）当 a=0 时 ，f(x)=xsin x +cos x ，x ∈[-π，π].

f'(x) =sin x+xcos x-sin x=xcos x.

当 x 在区间[-π，π]上变化时 ，f'(x)，f(x)的变化如下表

x	$-\pi$	$(-\pi,-\frac{\pi}{2})$	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{2},0)$	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	−1	↗	极大值$\frac{\pi}{2}$	↘	极小值 1	↗	极大值$\frac{\pi}{2}$	↘	−1

所以，f(x)的单调增区间为(-π ，- $\frac{\pi}{2}$)， (，0 ，$\frac{\pi}{2}$); f(x)的单调减区间为(-$\frac{\pi}{2}$， 0) ，($\frac{\pi}{2}$, π)

(II)任取 .x∈[-π，π] ，

f（-x）=（-x）sin（-x）+cos（-x）+$\frac{1}{2}$ a（-x）^{2}=xsinx+cosx+$\frac{1}{2}$ ax^2=f（x）

所以 f’(x)是偶函数.

f’(x)=αx+xCOSx=x (a+cosx).

当 α≥1 时，α+cosx≥0 注。在 [0 ，π) 上恒成立 ，所以 x∈[0 ，π）时，f’(x) ≥0.

所以 f(x)在 [0 ，π]上单调递增.

又因为 f(x)=1 ，所以 f(x)在[0，π]上有 0 个零点.

又因为 f(x)是偶函数，所以 f(x)在[-π，π]上有 0 个零点.

当 0<a<l 时，令 f’(x)=0 ，得 cos x= -a.

由一 l<-a<O 可知存在唯一 $X_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 使得 cos X_0= -a

所以当 x∈[0 ，x_0) 时 ，f' (X) ≥0，f(x) 单调递增;

当 x∈ (x_0 ，π)时，f' (X)<0 ，f(x) 单调递减.

因为只 f(0) =1 ，$f(x_0)$ >1. f(π)= $\frac{1}{2}$ aπ^2-1

①当$\frac{1}{2}$ aπ^2-1>0，即$\frac{2}{\pi^2}$ <a<1 时,f(x)在[0，π]上有 0 个零点

由 f(x)是偶函数知 f(x)在[-π，π]上有 0 个零点

②当$\frac{1}{2}$ $a\pi^2-1\leq 0$，即 $0<a\leq\frac{2}{\pi^2}$ 时 f(x)在[0，π]上有 1 个零点

由 f(x)是偶函数知 f(x)在[-π，π]上有 2 个零点

综上，当 $0<a\leq\frac{2}{\pi^2}$ 时，f(x)有 2 个零点，当 $a>\frac{2}{\pi^2}$ 时，f(x)有 0 个零点

(20)(共 13 分)

解:(I)1 或 12. ……..…… 4 分

(II)①当 n=1 ，2 时，向 $a_1=1$ 为奇数，向 $a_1\leq\lambda$ 成立，$a_2=1+\lambda$ 为偶数，$a_2\leq 2\lambda$②假设当 n=k 时，若 a_k 是为奇数，则 $a_k\leq\lambda$，若 a_k 为偶数，则 $a_k\leq 2\lambda$ 时，

那么 n=k+1 时，若 a_k 是奇数，则 $a_{k+1}=a_k+\lambda$ 是偶数 $a_k+1\leq 2\lambda$;

若 ak 是偶数 ，则 $a_k+1=\frac{ak}{2}\leq\lambda$

此时 a_k+1 是奇数，则满足 $a_{k+1}\leq\lambda$，若 a_{k+1} 是偶数，则满足 $a_{k+1}\leq\lambda\leq 2\lambda$.

即 n=k +1 时结论也成立.

综上，若 a_n 为奇数，则 a_n 运 $\lambda\leq\lambda$;若 a_n 为偶数，则 $a_n\leq 2\lambda$

(固)由(II)知 ，{an} 中总存在相等的两项 .不妨设 $a_r=a_s$，(r<s) 是相等两项中角标最小的两项，下证 r= 1.假设 r≥2.

①若 $a_r=a_s\leq\lambda$，由 $a_{r-1}\leq 2\lambda$，$\alpha_{s-1}\leq 2\lambda$ 知 a_r 和 a_s，均是由 a_{r-1} 和 a_{s-1} 除以 2 得到，即有 $\alpha_{r-1}=\alpha_{s-1}$ ，与 r 的最小性矛盾:

②若 $a_r=a_s>\lambda$).，由 $a_{r-1}\leq 2\lambda$ ，$a_{s-1}\leq 2\lambda$). 知 a_r 和 α_s 均是由 a_{r-1} 和 α_{s-1} 加上 λ 得到，即 有 $a_{r-1}==a_{s-1}$，与 r 的最小性矛盾;

综上 ，r=1，则 $a_s=\alpha_1=1$.

即若 α=1 ，λ 是正奇数，则存在正整数 n（n≥2），使得 $a_n=1$.