2017 北京顺义高三二模

数　　学（理）

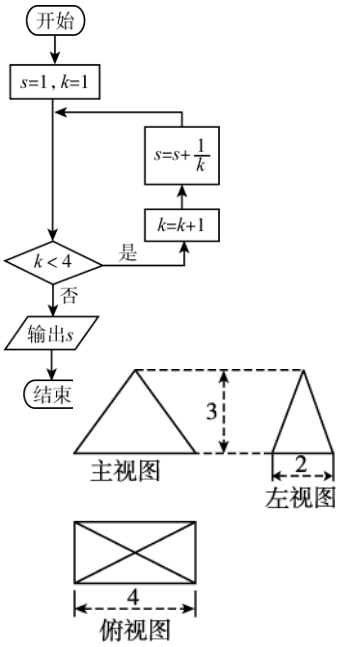
第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2>0\}$ ， $B=\{x\,|\,3x-4>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-2,-\frac{4}{3})$　　B. $(-2,\frac{4}{3})$　　C. $(1,\frac{4}{3})$　　D. $(2,+\infty)$

2. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 s 值为



A. $\frac{11}{6}$　　B. $\frac{13}{6}$　　C. $\frac{25}{12}$　　D. $\frac{29}{12}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AC}=(-1,\sqrt{3})$ ， 则∠BAC=

A. 30^0　　B. 45^0　　C. 60^0　　D. 120^0

4. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的侧面积为

A. 8　　B. $8+4\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{10}+\sqrt{13}$　　D. $4\sqrt{10}+2\sqrt{13}$

5. 已知直线 a，b 分别在两个不同的平面 α， β 内. 则“直线 a 和直线 b 垂直”是“平面 α 和平面 β 垂直”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 在平面上，过点 P 作直线 l 的垂线所得的垂足称为点 P 在直线 l 上的投影. 由区域

$\begin{cases}x+2y\geq 0\\ x-y\leq 0\\ x-2y+2\geq 0\end{cases}$ 中的点在直线 $x-2y-2=0$ 上的投影构成的线段记为 AB, 则 $|AB|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 8

7. 将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 图象上的点 $M(\theta,\frac{\sqrt{3}}{2})$ $(0<\theta<\frac{\pi}{4})$ 向右平移 $t(t>0)$ 个单位长度得到点 M'. 若 M' 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图象上, 则

A. $\theta=\frac{\pi}{12}$, t 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$　　B. $\theta=\frac{\pi}{12}$, t 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

C. $\theta=\frac{\pi}{6}$, t 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$　　D. $\theta=\frac{\pi}{6}$, t 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$

8. 某学校为了提高学生综合素质、树立社会主义荣辱观、发展创新能力和实践能力、促进学生健康成长，开展评选“校园之星”活动. 规定各班每 10 人推选一名候选人 ，当各班人数除以 10 的余数大于 7 时再增选一名候选人，那么，各班可推选候选人人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$（ $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）可以表示为

$A.y=[\frac{x}{10}]$　　$B.y=[\frac{x+2}{10}]$　　$C.y=[\frac{x+3}{10}]$　　$D.y=[\frac{x+4}{10}]$

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知 $z=(a-2)+(a+1)i$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是 _____ .

10. 在 $(x^2+\frac{1}{2x})^8$ 的展开式中， x^7 的系数为_____.(用数字作答)

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和，若 $a_2=4$ ， $S_8=-8$ ，则 $a_{10}=$ _____.

12. 在极坐标系中，圆 $\rho=-2\cos\theta$ 的圆心 C 到直线 $2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2=0$ 的距离等于_____.

13. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线为 l , 若 l 与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 的交点为 A,B , 且 $|AB|=2\sqrt{3}$. 则 p 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\le m,\\ x^2, x>m.\end{cases}$ ，函数 $g(x)=f(x)-k$.

（1）当 $m=2$ 时，若函数 $g(x)$ 有两个零点，则 k 的取值范围是_____；

（2）若存在实数 k 使得函数 $g(x)$ 有两个零点，则 m 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A， B， C 的对边分别为 a,b,c ， 已知 $\frac{a}{c}\cos B+\frac{b}{c}\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2\cos C}$.

（I）求 $\angle C$ 的大小；

（II）求 $\sin B-\sqrt{3}\sin A$ 的最小值.

16. （本小题满分 13 分）

春节期间，受烟花爆竹集中燃放影响，我国多数城市空气中 PM2.5 浓度快速上升，特别是在大气扩散条件不利的情况下，空气质量在短时间内会迅速恶化.2017 年除夕 18 时和初一 2 时，国家环保部门对 8 个城市空气中 PM2.5 浓度监测的数据如下表（单位：微克/立方米）.

	除夕 18 时 PM2.5 浓度	初一 2 时 PM2.5 浓度
北京	75	647
天津	66	400
石家庄	89	375
廊坊	102	399
太原	46	115
上海	16	17
南京	35	44
杭州	131	39

(Ⅰ)求这 8 个城市除夕 18 时空气中 PM2.5 浓度的平均值；

(Ⅱ)环保部门发现:除夕 18 时到初一 2 时空气中 PM2.5 浓度上升不超过 100 的城市都是"禁止燃放烟花爆竹"的城市，浓度上升超过 100 的城市都未禁止燃放烟花爆竹.从以上 8 个城市中随机选取 3 个城市组织专家进行调研，记选到“禁止燃放烟花爆竹”的城市个数为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ） 记 2017 年除夕 18 时和初一 2 时以上 8 个城市空气中 $PM_{2.5}$ 浓度的方差分别为 s_1^2 和 s_2^2 ，比较 s_1^2 和 s_2^2 的大小关系（只需写出结果）.

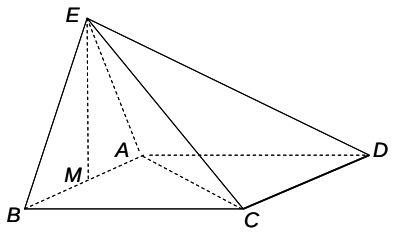
17. （本小题满分 14 分）

如图, 正三角形 ABE 与菱形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直， $AB=2$, $\angle ABC=60°$, M 是 AB 的中点.

（I）求证： $EM \perp AD$;

（II）求二面角 $A-BE-C$ 的余弦值；

（III）在线段 EC 上是否存在点 P ，使得直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 $45°$，若存在，求出 $\frac{EP}{EC}$ 的值；若不存在，说明理由.



18. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=pe^{-x}+x+1\ (p\in R)$.

（Ⅰ）当实数 $p=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $p=1$ 时，若直线 $y=mx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，求实数 m 的取值范围.

19.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(-1,\frac{3}{2})$，其离心率 $e=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设动直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相切，切点为 T ，且 l 与直线 $x=-4$ 相交于点 S .

试问：在 x 轴上是否存在一定点，使得以 ST 为直径的圆恒过该定点？若存在，求出该点的坐标；若不存在，请说明理由.

20.（本小题满分 13 分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若对$\forall n \in N^*$，总$\exists k \in N^*$，使得$S_n = a_k$，则称数列$\{a_n\}$是“G数列”.

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$是等差数列, 其首项$a_1 = 1$, 公差$d = -1$．证明：数列$\{a_n\}$是“G数列”；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = 3^n (n \in N^*)$，判断数列$\{a_n\}$是否为“G数列”，并说明理由；

（Ⅲ）证明：对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“G数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n = b_n + c_n (n \in N^*)$.成立.

参考答案

一、DCC D DBAB

二、

9. $(-1,2)$ 10. 7 11. -12 12. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 13. 4 或 8

14. $(4,8]$; $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

三、

15. 解（I）由正弦定理, 得 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C},\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$, ----------1 分

所以, $\frac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos C}.$

即 $\frac{\sin(A+B)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos C}.$ ----------3 分

$\because A+B+C=\pi$， A，B，$C\in(0,\pi)$,

$\therefore \sin(A+B)=\sin C.$ ----------4 分

$\therefore 2\cos C=\sqrt{3}$， $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ ----------5 分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{6}.$ ----------6 分

（II）$\because A+B+C=\pi,$

$\therefore A+B=\frac{5}{6}\pi.$ ----------7 分

$\therefore \sin B-\sqrt{3}\sin A=\sin(\frac{5}{6}\pi-A)-\sqrt{3}\sin A$

$=\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\sqrt{3}\sin A$ ----------9 分

$=\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\cos(A+\frac{\pi}{3})$. ----------11 分

$\because A+B=\frac{5}{6}\pi,$

$\therefore A\in(0,\frac{5}{6}\pi)$,

$\therefore A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6})$. ----------12 分

$\therefore \cos(A+\frac{\pi}{3})$ 最小值为-1.

即 $\sin B-\sqrt{3}\sin A$ 的最小值为-1. ----------13 分

16. 解：（Ⅰ）8 个城市除夕 18 时空气中 PM2.5 浓度的平均值

$v=\dfrac{75+66+89+102+46+16+35+131}{8}=70$. ----------3 分

(Ⅱ)以上 8 个城市中禁止燃放烟花爆竹的有太原，上海，南京，杭州 4 个城市，---4 分

随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3. ----------5 分

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_4^3}{C_8^3}=\frac{1}{14},$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\frac{6}{14},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\frac{6}{14},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3C_4^0}{C_8^3}=\frac{1}{14}.$$

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

----------9 分

X 的数学期望 $EX=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{6}{14}+2\times\frac{6}{14}+3\times\frac{1}{14}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$. ----------11 分

（Ⅲ）$s_1^2<s_2^2$. ----------13 分

17.（Ⅰ）证明：$\because EA=EB$，M 是 AB 的中点，

$\therefore EM\perp AB$. ----------1 分

$\because$ 平面 $ABE\perp$ 平面 $ABCD$, ----------2 分

平面 $ABE\cap$ 平面 $ABCD=AB$,

$EM\subset$ 平面 ABE,

$\therefore EM\perp$ 平面 $ABCD$. ----------3 分

$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EM\perp AD$. ----------4 分

(Ⅱ)解：$\because EM\perp$ 平面 $ABCD$，

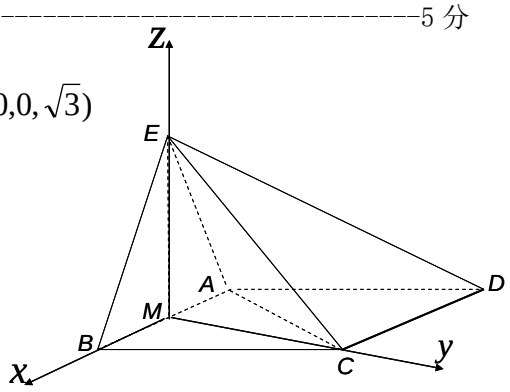
$\therefore EM\perp MC$.

显然△ ABC 是正三角形，

则 $MC\perp AB$.

$\therefore MB,MC,ME$ 两两垂直.

建立如图所示空间直角坐标系 $M-xyz$. ----------5 分



则 $M(0,0,0)$，$A(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,\sqrt{3})$.

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 BCE 的一个法向量

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0\\ -x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

令 $z=1$ 得 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,1)$, ----------7 分

因为 y 轴与平面 ABE 垂直.

所以 $\vec{n}=(0,1,0)$ 是平面 ABE 的一个法向量. ----------8 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\times1}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, ----------9 分

所以二面角 $A-BE-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ----------10 分

（III）解：假设在线段 EC 上存在点 P，使得直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 $45°$.

$\overrightarrow{AE}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

设 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$(\lambda\in[0,1])$

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=(1,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$. ----------11 分

由 $\sin45^\circ=\left|\cos<\overrightarrow{AP},\vec{n}>\right|=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}||\vec{n}|}=\dfrac{\left|\sqrt{3}\lambda\right|}{\sqrt{1+3\lambda^2+3-6\lambda+3\lambda^2}\times1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ ----------13 分

所以存在点 P，且 $\dfrac{EP}{EC}=\dfrac{2}{3}$. ----------14 分

18. 解：（Ⅰ）当 $p=e$ 时，$f(x)=e^{-x+1}+x+1$，$f'(x)=-e^{-x+1}+1$

$\therefore f(1)=3$，$f'(1)=0$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为 $y=3$ ----------4 分

（Ⅱ）$\because f(x)=pe^{-x}+x+1$，$\therefore f'(x)=-pe^{-x}+1$ ----------5 分

① 当 $p\le0$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

----------6 分

②当 $p>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=p$，解得 $x=\ln p$. ----------7 分

则当 x 变化时，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln p)$	$\ln p$	$(\ln p,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$2+\ln p$	↗

----------9 分

所以，当 $p>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln p,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,\ln p)$.

----------10 分

（Ⅲ）当 $p=1$ 时，$f(x)=e^{-x}+x+1$，直线 $y=mx+1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，

等价于关于 x 的方程 $mx+1=e^{-x}+x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解，

即关于 x 的方程 $(m-1)x=e^{-x}$（*）在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解.

①当 $m=1$ 时，方程（*）化为 $e^{-x}=0$，

显然在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有实数解. ----------12 分

②当 $m\neq1$ 时，方程（*）化为 $xe^x=\dfrac{1}{m-1}$，令 $g(x)=xe^x$，则有 $g'(x)=(1+x)e^x$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=-1$，则当 x 变化时，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

当 $x=-1$ 时，$g(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$，同时当 x 趋于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋于 $+\infty$，

从而 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ----------13 分

所以当 $\dfrac{1}{m-1}<-\dfrac{1}{e}$ 时，方程（*）无实数解，解得实数 m 的取值范围是 $(1-e,1)$.

综合①②可知实数 m 的取值范围是 $(1-e,1]$. ----------14 分

19. 解：（Ⅰ）由点 $(-1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆上得，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$----------①

依题设知 $a=2c$，则 $b^2=3c^2$. ----------②

②代入①解得 $c^2=1, a^2=4, b^2=3$

故椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ----------4 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y，得

$\left(4k^2+3\right)x^2+8kmx+4m^2-12=0$. ----------5 分

因为动直线 l 与椭圆 C 相切，即它们有且只有一个公共点 T，可设 $T\left(x_0, y_0\right)$，

所以 $m\neq 0$ 且 $\Delta=0$，

即 $64k^2m^2-4\left(4k^2+3\right)\left(4m^2-12\right)=0$，化简得 $4k^2-m^2+3=0$ ----------③

此时，$x_0=-\frac{4km}{4k^2+3}=-\frac{4k}{m}$，$y_0=kx_0+m=\frac{3}{m}$，所以点 T 的坐标为 $(-\frac{4k}{m},\frac{3}{m})$.

由 $\begin{cases} x=-4 \\ y=kx+m \end{cases}$ 得 $S\left(-4,-4k+m\right)$. ----------9 分

假设在 x 轴上存在定点满足条件，不妨设为点 $A\left(x_1,0\right)$.

则由已知条件知 $AS\perp AT$，即 $\overrightarrow{AS}\bullet\overrightarrow{AT}=0$ 对满足③式的 m,k 恒成立.

因为 $\overrightarrow{AS}=\left(-4-x_1,-4k+m\right)$，$\overrightarrow{AT}=\left(-\frac{4k}{m}-x_1,\frac{3}{m}\right)$，由 $\overrightarrow{AS}\bullet\overrightarrow{AT}=0$ 得

$\frac{16k}{m}+\frac{4kx_1}{m}+4x_1+x_1^2-\frac{12k}{m}+3=0$，整理得 $\left(4x_1+4\right)\frac{k}{m}+x_1^2+4x_1+3=0$ --------④

由④式对满足③式的 m,k 恒成立，所以 $\begin{cases} 4x_1+4=0 \\ x_1^2+4x_1+3=0 \end{cases}$，解得 $x_1=-1$.

故在 x 轴上存在定点 $\left(-1,0\right)$，使得以 ST 为直径的圆恒过该定点. ----------13 分

20. 解（1）由题意 $a_n=1+(n-1)(-1)=2-n$， ----------1 分

$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}(-1)$， ----------2 分

若 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}(-1)=a_k=2-k$ ， ----------3 分

则 $k=2+\frac{n(n-1)}{2}-n$.

所以，存在 $k\in N^*$，使得 $S_n=a_k$.

所以，数列$\{a_n\}$是“G数列. ----------4分

（2）解：首先$a_1 = S_1 = 3$，

当$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$，

所以 $a_n = \begin{cases} 3, n = 1 \\ 2 \times 3^{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$， ----------6 分

当$n = 2$时，$9 = 2 \times 3^{k-1}$，得$k \notin N^*$因此数列$\{a_n\}$不是“G数列”. ----------8分

（3）若$d_n = bn$，（b为常数），则数列$\{d_n\}$的前n项和$S_n = \frac{n(n+1)}{2}b$是数列$\{d_n\}$中的第$\frac{n(n+1)}{2}$项，因此数列$\{d_n\}$是“G数列”.

对任意的等差数列$\{a_n\}$，$a_n = a_1 + (n-1)d$，（d为公差），

设$b_n = na_1$，$c_n = (d - a_1)(n-1)$，

则$a_n = b_n + c_n$，而数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$都是“G数列”. ----------13分