2017 北京顺义高三二模

数　　学（文）

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 设集合 $A=\{x|x<1\text{或}x>2\}$，$B=\{x|3x-4>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-\frac{4}{3},1)$　　B. $(\frac{4}{3},2)$　　C. $(1,\frac{4}{3})$　　D. $(2,+\infty)$

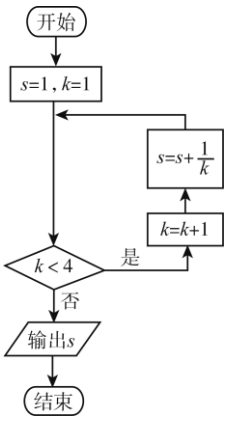
2. 下列函数中为奇函数的是

A. $y=x^2+2x$　　B. $y=\ln|x|$　　C. $y=(\frac{1}{3})^x$　　D. $y=x\cos x$

3. 过原点且与圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 相切的直线的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{6}$

4. 执行如图所示的程序框图，则输出的 s 值为



A. $\frac{11}{6}$　　B. $\frac{13}{6}$

C. $\frac{25}{12}$　　D. $\frac{29}{12}$

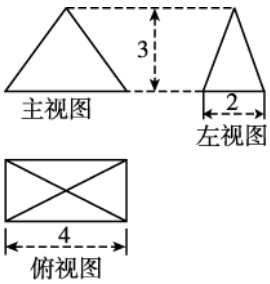
5. 已知直线 a,b 分别在两个不同的平面 α,β 内. 则“直线 a 和直线 b 垂直”是“平面 α 和平面 β 垂直”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AC}=(-1,\sqrt{3})$，则∠BAC=

A. 30^0　　B. 45^0　　C. 60^0　　D. 120^0

7. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的侧面积为



A. 8　　B. $8+4\sqrt{10}$

C. $4\sqrt{10}+2\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{10}+\sqrt{13}$

8. 某学校为了提高学生综合素质、树立社会主义荣辱观、发展创新能力和实践能力、促进学生健康成长，开展评选“校园之星”活动. 规定各班每 10 人推选一名候选人，当各班人数除以 10 的余数大于 7 时再增选一名候选人，那么，各班可推选候选人人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）可以表示为

$A.y=[\frac{x}{10}]$　　$B.y=[\frac{x+2}{10}]$　　$C.y=[\frac{x+3}{10}]$　　$D.y=[\frac{x+4}{10}]$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 复数 $(1-i)(2+i)$ 的实部为_____.

10. 在 ΔABC 中，$a=7$，$b=8$，$c=5$，则 $\angle A=$_____.

11. $3^{-2}, 2^{1.5}, \log_2 3$三个数中最大的数是_____.

12. 若抛物线$y^2=8x$上的点P到焦点的距离为6，则P到y轴的距离是_____.

13. 在平面上，过点P作直线l的垂线所得的垂足称为点P在直线l上的投影．由区域

$\begin{cases} x+2y\geq 0 \\ x-y\leq 0 \\ x-2y+2\geq 0 \end{cases}$ 中的点在x轴上的投影构成的线段记为AB，则$|AB|$=_____.

14. 若直线l与曲线C满足下列两个条件：

（1）直线l在点$M(x_0,y_0)$处与曲线C相切；

（2）曲线C在点M附近位于直线l的两侧，则称直线l在点M处“内切”曲线C.

下列命题正确的是_____(写出所有正确命题的编号)

①直线$l:y=0$在点$M(0,0)$处“内切”曲线C：$y=x^3$

②直线$l:y=x$在点$M(0,0)$处“内切”曲线C：$y=\sin x$

③直线$l:y=x-1$在点$M(1,0)$处“内切”曲线C：$y=\ln x$

三、解答题（本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos(\pi-x)\cos x$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

16.（本小题满分13分）

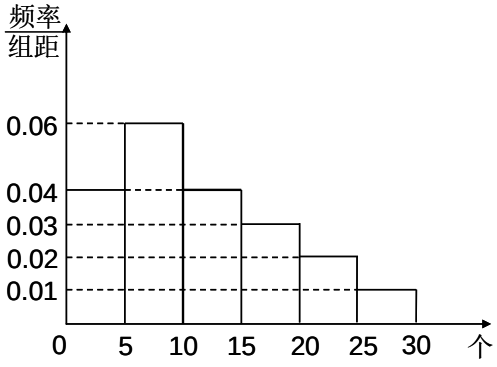
已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1, a_{n+1}=2a_n$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=3, b_4=11$,且$\{a_n+b_n\}$为等差数列.

(I) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

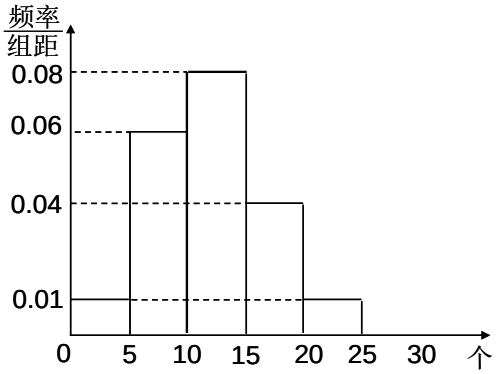
(II) 求数列$\{b_n\}$的前n项和.

17.（本小题满分 13 分）

某高中学校为了解学生体质情况，从高一和高二两个年级分别随机抽取了 40 名男同学进行“引体向上”项目测试. 样本的测试成绩均在 0 至 30 个之



高一年级



高二年级

间，按照[0,5),[5,10)，[10,15),[15,20),[20,25),[25,30]的分组分别作出频率分布直方图. 记样本中高一年级的“引体向上”成绩的方差为s_1^2，高二年级的“引体向上”成绩的方差为s_2^2.

（Ⅰ）已知该学校高二年级男同学有 500 人，估计该学校高二年级男同学引体向上成绩不少于 10 个的人数；

（Ⅱ）从样本中高一年级的成绩不小于 20 个男同学中随机抽取 2 人，求至少有 1 人成绩在[25,30]中的概率.

（Ⅲ）比较s_1^2与s_2^2的大小（只需写出结果）；

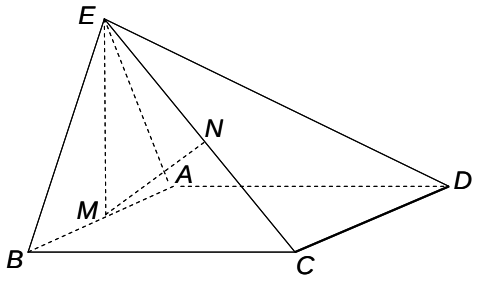
18.（本小题满分 14 分）

如图，正三角形 ABE 与菱形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直，$AB=2$，$\angle ABC=60°$，M 是 AB 的中点，N 是 CE 的中点.

（I）求证：$EM \perp AD$；

（II）求证：MN // 平面 ADE；

（III）求点 A 到平面 BCE 的距离.



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=1+\ln x-ae^{x}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程,

（Ⅱ）设动直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相切，切点为 T，且直线 l 与直线 $x=4$ 相交于点 S. 试问：在坐标平面内是否存在一定点，使得以 ST 为直径的圆恒过该定点？若存在，求出该点的坐标；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、DDBC　DCCB

二、9. 3　10. $\frac{\pi}{3}$　11. $2^{1.5}$　12. 4　13. 3　14. ①②

三、

15. 解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x$ ----------2 分

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}(1+\cos 2x)}{2}$ ----------3 分

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ----------5 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π. ----------6 分

（Ⅱ）因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$. ----------7 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $f(0)=-\sqrt{3}$. ----------10 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{5\pi}{12})=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ----------13 分

16. 解：(I)因为 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=2a_n$

所以，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\in N^*)$.

即 数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 1，公比为 2 的等比数列. ----------2 分

所以，$a_n=2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$. ----------3 分

设等差数列 $\{a_n+b_n\}$ 的公差为 d，由题意得

$3d=(a_4+b_4)-(a_1+b_1)=(2^3+11)-(1+3)=15$，解得 $d=5$. ----------5 分

所以，$a_n+b_n=(a_1+b_1)+(n-1)d=5n-1$. ----------6 分

从而 $b_n=5n-1-2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$. ----------7 分

（II）由(I)知 $b_n=5n-1-2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$.

数列$\{5n-1\}$的前n项和为$4n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5}{2}n^2+\frac{3}{2}n$. ----------10分

数列$\{2^{n-1}\}$的前n项和为$\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$. ----------12分

所以,数列$\{b_n\}$的前n项和$\frac{5}{2}n^2+\frac{3}{2}n-2^n+1$. ----------13分

17. 解：（Ⅰ）因为样本中高二年级男同学引体向上成绩不少于10个的频率为

$(0.08+0.04+0.01)\times5=0.65$ ----------2分

所以估计该学校高二年级男同学引体向上成绩不少于10个的人数为$500\times0.65=325$人

----------4分

（Ⅱ）记“从样本中高一年级的成绩不小于20个的同学中随机抽取2人，至少有1人成绩在[25,30]中”为事件M ----------5分

样本中高一年级的成绩在[20,25)的人数为$40\times0.02\times5=4$人，

记这4名同学为A_1,A_2,A_3,A_4

样本中高一年级的成绩在[25,30]的人数为$40\times0.01\times5=2$人；

记这两名同学为B_1,B_2----------6分

则从样本中高一年级的成绩不小于20个的同学中，随机抽取2人，所有可能的结果有15种，即：

$(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_1,B_1),(A_1,B_2),$

$(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,A_4),(A_3,B_1),(A_3,B_2)(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2)$----

----------8分

事件M的结果有9种，它们是$(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1)$

$(A_3,B_2)(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2)$

所以$P(M)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ----------11分

（Ⅲ）$s_1^2>s_2^2$. ----------13分

18.（Ⅰ）证明：$\because EA=EB$，M是AB的中点

$\therefore EM\perp AB$ ----------1分

$\because$平面$ABE\perp$平面$ABCD$

平面$ABE\cap$平面$ABCD=AB$

$EM\subset$平面ABE

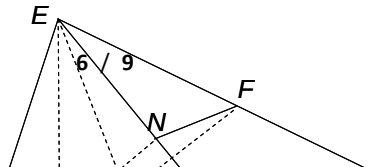
$\therefore EM\perp$平面$ABCD$ ----------4分

$AD\subset$平面$ABCD$

$\therefore EM\perp AD$ ----------5分

（Ⅱ）证明：取DE的中点F， 连接AF,NF

$\because N$是CE的中点.



$\therefore NF /\!/ \underline{=} \frac{1}{2}CD$

$\because M$ 是 AB 的中点，

$\therefore AM /\!/ \underline{=} \frac{1}{2}CD$

$\therefore NF /\!/ \underline{=} AM$

$\therefore$四边形 $AMNF$ 是平行四边形 ----------7 分

$\therefore MN // AF$ ----------8 分

$\because MN \not\subset$ 平面 ADE ， $AF \subset$ 平面 ADE $\therefore MN //$ 平面 ADE ----------10 分

（III）解：设点 A 到平面 BCE 的距离为 d

由（I）知 $ME \perp$ 平面 ABC

$BC = BE = 2$， $MC = ME = \sqrt{3}$

则 $CE = \sqrt{6}$ ， $BN = \sqrt{BE^2 - EN^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ----------12 分

$S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}CE \cdot BN = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

因为 $V_{A-BCE} = V_{E-ABC}$ ----------13 分

即 $\frac{1}{3}S_{\Delta BCE} \cdot d = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot ME$，解得 $d = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ ----------14 分

19. 解：（Ⅰ）$\because f(x) = 1 + \ln x - ae^x$， $\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - ae^x$， $x \in (0, +\infty)$. ----------2 分

由于曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 x 轴平行，所以 $f'(1) = 1 - ae = 0$，

解得

$a = \frac{1}{e}$. ----------4 分

（Ⅱ）由条件知对任意 $x \in (0, +\infty)$，不等式 $f(x) \le 0$ 恒成立，

此命题等价于 $a \ge \frac{1 + \ln x}{e^x}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. ----------5 分

令 $h(x) = \frac{1 + \ln x}{e^x}$ ， $x \in (0, +\infty)$

$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x}$

$= \frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x\right)$， $x \in (0, +\infty)$ ----------6 分

令 $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$，且 $g'(x)<0$ ----------7 分

$\therefore$ 函数 $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减. ----------8 分

注意到 $g(1)=0$，即 $x=1$ 是 $g(x)$ 的零点----------9 分

而当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=\frac{1}{x}-1-x\ln x>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$.

又 $e^x>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$. --------11 分

则当 x 变化时，$h'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	极大值 $\frac{1}{e}$	↘

因此，函数 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 取得最大值 $h(1)=\frac{1}{e}$，所以实数 $a\geq\frac{1}{e}$. ----------13 分

20. 解：（Ⅰ）由点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上得，$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$----------①----------1 分

依题设知 $a=2c$，则 $b^2=3c^2$----------②----------2 分

②代入①解得 $c^2=1,a^2=4,b^2=3$

故椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ----------4 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

因为动直线 l 与椭圆 C 相切，即它们有且只有一个公共点 T，可设 $T(x_0,y_0)$，

所以 $m\neq0$ 且 $\Delta=0$，----------5 分

即 $64k^2m^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=0$，化简得 $4k^2-m^2+3=0$ ----------③----6 分

此时，$x_0=-\frac{4km}{4k^2+3}=-\frac{4k}{m}$，$y_0=kx_0+m=\frac{3}{m}$，所以 $P\left(-\frac{4k}{m},\frac{3}{m}\right)$. ----------7 分

由 $\begin{cases}x=4\\ y=kx+m\end{cases}$ 得 $S(4,4k+m)$. ----------8 分

假设平面内存在定点满足条件，不妨设为点 A.

由图形对称性知，点 A 必在 x 轴上. ----------9 分

设 $A(x_1,0)$，则由已知条件知 $AS \perp AT$，

即 $\overrightarrow{AS} \bullet \overrightarrow{AT} = 0$ 对满足③式的 m,k 恒成立. ----------10 分

因为 $\overrightarrow{AS} = (4-x_1,4k+m)$，$\overrightarrow{AT} = \left(-\dfrac{4k}{m}-x_1,\dfrac{3}{m}\right)$，由 $\overrightarrow{AS} \bullet \overrightarrow{AT} = 0$ 得：

$$-\frac{16k}{m}+\frac{4kx_1}{m}-4x_1+x_1^2+\frac{12k}{m}+3=0,$$

整理得 $(4x_1-4)\dfrac{k}{m}+x_1^2-4x_1+3=0$----------④----------12 分

由②式对满足①式的 m,k 恒成立，所以 $\begin{cases}4x_1-4=0\\ x_1^2-4x_1+3=0\end{cases}$，解得 $x_1=1.$

故平面内存在定点 $(1,0)$，使得以 ST 为直径的圆恒过该定点. ----------14 分