2017 北京西城高三二模

数　　学（理）

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．在复平面内，复数 z 对应的点是 $Z(1,-2)$，则复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=$

（A）$1+2\mathrm{i}$　　（B）$1-2\mathrm{i}$　　（C）$2+\mathrm{i}$　　（D）$2-\mathrm{i}$

2．下列函数中，值域为 $[0,1]$ 的是

（A）$y=x^2$　　（B）$y=\sin x$　　（C）$y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　（D）$y=\sqrt{1-x^2}$

3．在极坐标系中，圆 $\rho=\sin\theta$ 的圆心的极坐标是

（A）$(1,\dfrac{\pi}{2})$　　（B）$(1,0)$　　（C）$(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{2})$　　（D）$(\dfrac{1}{2},0)$

4．在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases}3x-2y\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是

（A）1　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）2　　（D）$\dfrac{5}{2}$

5．设双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率是 3，则其渐近线的方程为

（A）$x\pm 2\sqrt{2}y=0$　　（B）$2\sqrt{2}x\pm y=0$　　（C）$x\pm 8y=0$　　（D）$8x\pm y=0$

6．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面上的两个单位向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{5}$．若 $m\in\mathbf{R}$，则 $|\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}|$ 的最小值是

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{4}{3}$　　（C）$\dfrac{4}{5}$　　（D）$\dfrac{5}{4}$

7．函数 $f(x)=x|x|$．若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x-2k)-k<0$，则 k 的取值范围是

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,+\infty)$　　（C）$(\dfrac{1}{2},+\infty)$　　（D）$(\dfrac{1}{4},+\infty)$

8．有三支股票 A，B，C，28 位股民的持有情况如下：每位股民至少持有其中一支股票．

在不持有 A 股票的人中，持有 B 股票的人数是持有 C 股票的人数的 2 倍．在持有 A 股票的人中，只持有 A 股票的人数比除了持有 A 股票外，同时还持有其它股票的人数多 1．在只持有一支股票的人中，有一半持有 A 股票．则只持有 B 股票的股民人数是

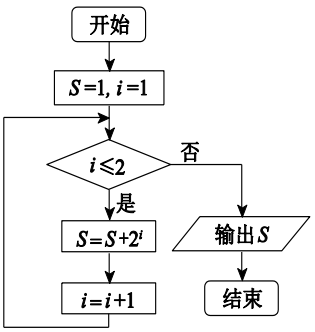
（A）7　　（B）6　　（C）5　　（D）4

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为____．

10．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，且a_1，a_2，a_4成等比数列，则$a_1=$____；数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=$____.

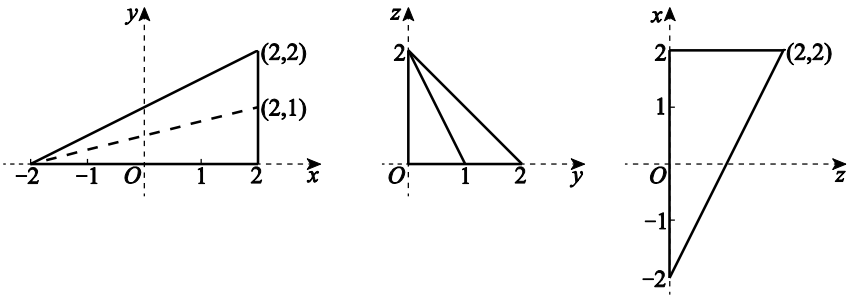


11．在△ABC中，角A，B，C的对边分别是a，b，c．若$A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则$c=$ ____.

12．函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ \log_2 x, & x>0.\end{cases}$则$f(\frac{1}{4})=$____；方程$f(-x)=\frac{1}{2}$的解是____.

13．大厦一层有A，B，C，D四部电梯，3人在一层乘坐电梯上楼，其中2人恰好乘坐同一部电梯，则不同的乘坐方式有____种.（用数字作答）

14．在空间直角坐标系$O-xyz$中，四面体$A-BCD$在xOy，yOz，zOx坐标平面上的一组正投影图形如图所示（坐标轴用细虚线表示）．该四面体的体积是____.



三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$.

（Ⅰ）求$f(x)$的定义域；

（Ⅱ）设$\beta\in(0,\pi)$，且$f(\beta)=2\cos(\beta-\frac{\pi}{4})$，求$\beta$的值.

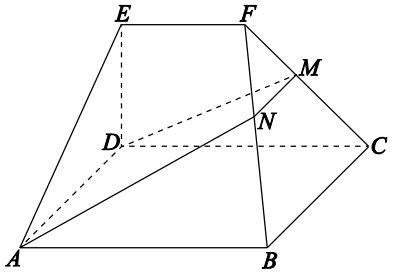
16.（本小题满分 14 分）

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$EF \parallel CD$，$AD \perp FC$．点 M 在棱 FC 上，平面 ADM 与棱 FB 交于点 N．

（Ⅰ）求证：$AD \parallel MN$；

（Ⅱ）求证：平面 $ADMN \perp$ 平面 $CDEF$；

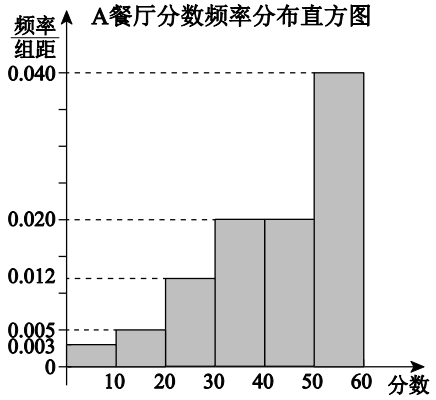
（Ⅲ）若 $CD \perp EA$，$EF = ED$，$CD = 2EF$，平面 $ADE \cap$ 平面 $BCF = l$，求二面角 $A - l - B$ 的大小．



17.（本小题满分 13 分）

某大学为调研学生在 A，B 两家餐厅用餐的满意度，从在 A，B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取了 100 人，每人分别对这两家餐厅进行评分，满分均为 60 分．

整理评分数据，将分数以10 为组距分成6 组：$[0,10)$，$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60]$，得到 A 餐厅分数的频率分布直方图，和 B 餐厅分数的频数分布表：



B 餐厅分数频数分布表

分数区间	频数
[0,10)	2
[10,20)	3
[20,30)	5
[30,40)	15
[40,50)	40
[50,60]	35

定义学生对餐厅评价的“满意度指数”如下：

分数	[0,30)	[30,50)	[50,60]
满意度指数	0	1	2

（Ⅰ）在抽样的 100 人中，求对 A 餐厅评价“满意度指数”为0 的人数；

（Ⅱ）从该校在 A，B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取 1 人进行调查，试估计其对 A 餐厅评价的“满意度指数”比对 B 餐厅评价的“满意度指数”高的概率；

（Ⅲ）如果从 A，B 两家餐厅中选择一家用餐，你会选择哪一家？说明理由．

18.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C 的顶点是原点，以 x 轴为对称轴，且经过点 $P(1,2)$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）设点 A,B 在抛物线 C 上，直线 PA,PB 分别与 y 轴交于点 M,N ，$|PM|=|PN|$.

求直线 AB 的斜率.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot \mathrm{e}^{1-x}$ ，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f'(x)$ 的零点个数；

（Ⅱ）证明：$a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分而不必要条件.

20.（本小题满分 13 分）

设集合 $A_{2n}=\{1,2,3,\cdots,2n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$. 如果对于 A_{2n} 的每一个含有 m $(m\geqslant 4)$ 个元素的子集 P ，P 中必有 4 个元素的和等于 $4n+1$ ，称正整数 m 为集合 A_{2n} 的一个“相关数”.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，判断 5 和 6 是否为集合 A_6 的“相关数”，说明理由；

（Ⅱ）若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，证明：$m-n-3\geqslant 0$ ；

（Ⅲ）给定正整数 n . 求集合 A_{2n} 的“相关数” m 的最小值.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．A　　2．D　　3．C　　4．B

5．A　　6．C　　7．D　　8．A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．7　　10．2，n^2+n　　11．2

12．-2；$-\sqrt{2}$ 或1　　13．36　　14．$\frac{4}{3}$

注：第 10，12 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.　［3 分］

所以 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.　［4 分］

（Ⅱ）依题意，得 $\tan(\beta+\frac{\pi}{4})=2\cos(\beta-\frac{\pi}{4})$.　［5 分］

所以 $\frac{\sin(\beta+\frac{\pi}{4})}{\cos(\beta+\frac{\pi}{4})}=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$，　［7 分］

整理得 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})\cdot[2\cos(\beta+\frac{\pi}{4})-1]=0$，　［8 分］

所以 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})=0$，或 $\cos(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$.　［10 分］

因为 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\beta+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，　［11 分］

由 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})=0$，得 $\beta+\frac{\pi}{4}=\pi$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$；　［12 分］

由 $\cos(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，得 $\beta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{12}$.

所以 $\beta=\frac{\pi}{12}$，或 $\beta=\frac{3\pi}{4}$.　［13 分］

16.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD\,//\,BC$，　［1 分］

所以 $AD\,//$ 平面 FBC.　［3 分］

又因为 平面 $ADMN\cap$ 平面 $FBC=MN$，

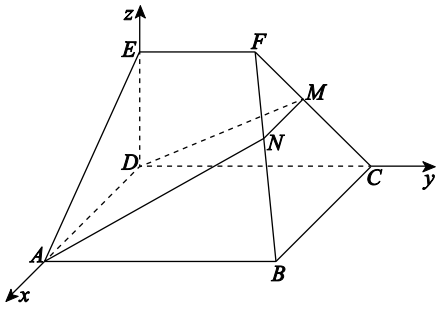
所以 $AD\,//\,MN$.　［4 分］

（Ⅱ）因为 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD\perp CD$.　［5 分］

因为 $AD\perp FC$，　［6 分］

所以 $AD\perp$平面$CDEF$．　　［7分］

所以 平面$ADMN\perp$平面$CDEF$．　　［8分］



（Ⅲ）因为 $EA\perp CD$，$AD\perp CD$，

所以 $CD\perp$平面ADE，

所以 $CD\perp DE$．

由（Ⅱ）得$AD\perp$平面$CDEF$，

所以 $AD\perp DE$．

所以 DA，DC，DE两两互相垂直．　　［9分］

建立空间直角坐标系$D-xyz$．　　［10分］

不妨设 $EF=ED=1$，则$CD=2$，设$AD=a$ $(a>0)$．

由题意得，$A(a,0,0)$，$B(a,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$E(0,0,1)$，$F(0,1,1)$．

所以 $\overrightarrow{CB}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(0,-1,1)$．

设平面FBC的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}ax=0,\\ -y+z=0.\end{cases}\quad\text{令 }z=1\text{，则 }y=1\text{．}$$

所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$．　　［12分］

又平面ADE的法向量为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，所以

$$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{．}$$

因为 二面角$A-l-B$的平面角是锐角，

所以 二面角$A-l-B$的大小45°．　　［14分］

17．（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）由对A餐厅评分的频率分布直方图，得

对A餐厅“满意度指数”为0的频率为 $(0.003+0.005+0.012)\times10=0.2$，　［2分］

所以，对A餐厅评价“满意度指数”为0的人数为 $100\times0.2=20$．　　［3分］

（Ⅱ）设“对 A 餐厅评价‘满意度指数’比对 B 餐厅评价‘满意度指数’高”为事件 C.

记“对 A 餐厅评价‘满意度指数’为 1”为事件 A_1；“对 A 餐厅评价‘满意度指数’为 2”为事件 A_2；

“对 B 餐厅评价‘满意度指数’为 0”为事件 B_0；“对 B 餐厅评价‘满意度指数’为 1”为事件 B_1.

所以 $P(A_1)=(0.02+0.02)\times 10=0.4$，$P(A_2)=0.4$，［5 分］

由用频率估计概率得：$P(B_0)=\dfrac{2+3+5}{100}=0.1$，$P(B_1)=\dfrac{15+40}{100}=0.55$.［7 分］

因为事件 A_i 与 B_j 相互独立，其中 $i=1,2$，$j=0,1$.

所以 $P(C)=P(A_1B_0+A_2B_0+A_2B_1)$

$=P(A_1)P(B_0)+P(A_2)P(B_0)+P(A_2)P(B_1)$

$=0.4\times 0.1+0.4\times 0.1+0.4\times 0.55=0.3$.［10 分］

所以 该学生对 A 餐厅评价的“满意度指数”比对 B 餐厅评价的“满意度指数”高的概率为 0.3.

（Ⅲ）如果从学生对 A，B 两家餐厅评价的“满意度指数”的期望角度看：

A 餐厅“满意度指数”X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

B 餐厅“满意度指数”Y 的分布列为：

Y	0	1	2
P	0.1	0.55	0.35

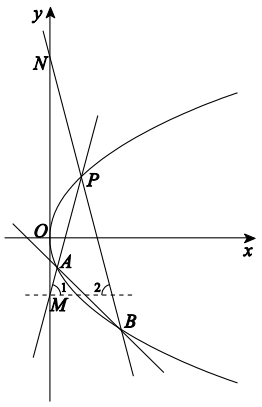
因为 $E(X)=0\times 0.2+1\times 0.4+2\times 0.4=1.2$；

$E(Y)=0\times 0.1+1\times 0.55+2\times 0.35=1.25$，

所以 $E(X)<E(Y)$，会选择 B 餐厅用餐.［13 分］

注：本题答案不唯一．只要考生言之合理即可.

18.（本小题满分 14 分）



解：（Ⅰ）依题意，设抛物线C的方程为$y^2=ax\ (a\neq 0)$．［1分］

由抛物线C且经过点$P(1,2)$，

得 $a=4$，［3分］

所以 抛物线C的方程为$y^2=4x$．［4分］

（Ⅱ）因为 $|PM|=|PN|$，

所以 $\angle PMN=\angle PNM$，

所以 $\angle 1=\angle 2$，

所以 直线PA与PB的倾斜角互补，

所以 $k_{PA}+k_{PB}=0$．［6分］

依题意，直线AP的斜率存在，设直线AP的方程为：$y-2=k(x-1)\ (k\neq 0)$，

将其代入抛物线C的方程，整理得

$k^2x^2-2(k^2-2k+2)x+k^2-4k+4=0$．［8分］

设$A(x_1,y_1)$，则 $1\times x_1=\dfrac{k^2-4k+4}{k^2}$，$y_1=k(x_1-1)+2=\dfrac{4}{k}-2$，［10分］

所以 $A(\dfrac{(k-2)^2}{k^2},\dfrac{4}{k}-2)$．［11分］

以$-k$替换点A坐标中的k，得 $B(\dfrac{(k+2)^2}{k^2},-\dfrac{4}{k}-2)$．［12分］

所以 $k_{AB}=\dfrac{\dfrac{4}{k}-(-\dfrac{4}{k})}{\dfrac{(k-2)^2}{k^2}-\dfrac{(k+2)^2}{k^2}}=-1$．

所以 直线AB的斜率为-1．［14分］

19.（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot \mathrm{e}^{1-x}$，

得 $f'(x)=(2x+a)\cdot \mathrm{e}^{1-x}-(x^2+ax-a)\cdot \mathrm{e}^{1-x}$

$=-[x^2+(a-2)x-2a]\cdot \mathrm{e}^{1-x}$

$=-(x+a)(x-2)\cdot \mathrm{e}^{1-x}$．［2分］

令 $f'(x)=0$，得$x=2$，或$x=-a$．

所以 当$a=-2$时，函数$f'(x)$有且只有一个零点：$x=2$；当$a\neq -2$时，函数$f'(x)$有两个相异的零点：$x=2$，$x=-a$．［4分］

（Ⅱ）① 当$a=-2$时，$f'(x)\leqslant 0$恒成立，此时函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，

所以，函数$f(x)$无极值．［5分］

② 当$a>-2$时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-a)$	$-a$	$(-a,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以，$a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(-a)=-a\cdot \mathrm{e}^{1+a}\leqslant 0$．［7 分］

又 $x>2$ 时，$x^2+ax-a>2^2+2a-a=a+4>0$，

所以，当 $x>2$ 时，$f(x)=(x^2+ax-a)\cdot \mathrm{e}^{1-x}>0$ 恒成立．［8 分］

所以，$f(-a)=-a\cdot \mathrm{e}^{1+a}$ 为 $f(x)$ 的最小值．［9 分］

故 $a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分条件．［10 分］

③ 当 $a=-5$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

因为 当 $x>5$ 时，$f(x)=(x^2-5x+5)\cdot \mathrm{e}^{1-x}>0$，

又 $f(2)=-\mathrm{e}^{-1}<0$，

所以，当 $a=-5$ 时，函数 $f(x)$ 也存在最小值．［12 分］

所以，$a\geqslant 0$ 不是函数 $f(x)$ 存在最小值的必要条件．

综上，$a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分而不必要条件．［13 分］

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $n=3$ 时，$A_6=\{1,2,3,4,5,6\}$，$4n+1=13$．［1 分］

① 对于 A_6 的含有 5 个元素的子集 $\{2,3,4,5,6\}$，

因为 $2+3+4+5>13$，

所以 5 不是集合 A_6 的“相关数”．［2 分］

② A_6 的含有 6 个元素的子集只有 $\{1,2,3,4,5,6\}$，

因为 $1+3+4+5=13$，

所以 6 是集合 A_6 的“相关数”．［3 分］

（Ⅱ）考察集合 A_{2n} 的含有 $n+2$ 个元素的子集 $B=\{n-1,n,n+1,\cdots,2n\}$．［4 分］

B 中任意 4 个元素之和一定不小于 $(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=4n+2$．

所以 $n+2$ 一定不是集合 A_{2n} 的“相关数”. [6 分]

所以 当 $m \leqslant n+2$ 时， m 一定不是集合 A_{2n} 的“相关数”. [7 分]

因此 若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，必有 $m \geqslant n+3$.

即 若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，必有 $m-n-3 \geqslant 0$. [8 分]

（Ⅲ）由（Ⅱ）得 $m \geqslant n+3$.

先将集合 A_{2n} 的元素分成如下 n 组：

$C_i=(i, 2n+1-i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

对 A_{2n} 的任意一个含有 $n+3$ 个元素的子集 P ，必有三组 $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ 同属于集合 P .

[10 分]

再将集合 A_{2n} 的元素剔除 n 和 $2n$ 后，分成如下 $n-1$ 组：

$D_j=(j, 2n-j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$.

对于 A_{2n} 的任意一个含有 $n+3$ 个元素的子集 P ，必有一组 D_{j_4} 属于集合 P . [11 分]

这一组 D_{j_4} 与上述三组 $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ 中至少一组无相同元素，

不妨设 D_{j_4} 与 C_{i_1} 无相同元素.

此时 这 4 个元素之和为 $[i_1+(2n+1-i_1)+[j_4+(2n-j_4)]=4n+1$. [12 分]

所以 集合 A_{2n} 的“相关数” m 的最小值为 $n+3$. [13 分]