2017 北京西城高三二模

数　　学（文）

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1<x<1\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\cdot(x-2)<0\}$，那么 $A\cap B=$

（A）$\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<x<1\}$　　（B）$\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<x<2\}$

（C）$\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1<x<0\}$　　（D）$\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1<x<2\}$

2．设向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$．则与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直的向量可以是

（A）$(3,2)$　　（B）$(3,-2)$　　（C）$(4,6)$　　（D）$(4,-6)$

3．下列函数中，值域为 $[0,1]$ 的是

（A）$y=x^2$　　（B）$y=\sin x$　　（C）$y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　（D）$y=\sqrt{1-x^2}$

4．若抛物线 $y^2=ax$ 的焦点到其准线的距离是 2，则 $a=$

（A）±1　　（B）±2　　（C）±4　　（D）±8

5．设 a，$b\neq0$，则“$a>b$”是“$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$”的

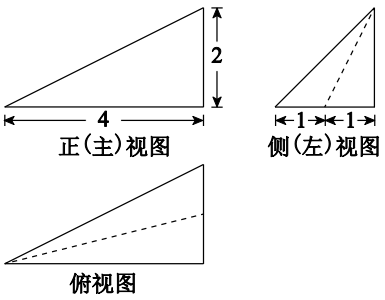
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

6．在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y\leqslant0,\\ x-\sqrt{3}y+2\geqslant0,\\ y\geqslant0\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）$2\sqrt{3}$

7．某四面体的三视图如图所示，该四面体的体积为



（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）2

（C）$\dfrac{8}{3}$　　（D）4

8．函数 $f(x)=x|x|$．若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x-2k)-k<0$，则 k 的取值范围是

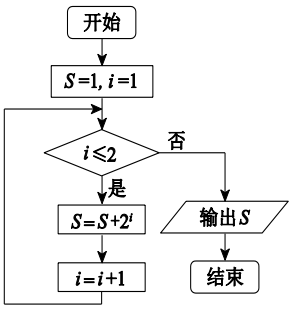
（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,+\infty)$　　（C）$(\dfrac{1}{2},+\infty)$　　（D）$(\dfrac{1}{4},+\infty)$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．在复平面内，复数 z 对应的点是 $Z(1,-2)$，则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=$ ____.

10．执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为____.



11．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c．若 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则 $c=$ ____.

12. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$. 圆 O' 与圆 O 关于直线 $x+y-2=0$ 对称，则圆 O' 的方程是____.

13．函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ \log_2 x, & x>0.\end{cases}$ 则 $f(\frac{1}{4})=$ ____；方程 $f(-x)=\frac{1}{2}$ 的解是____.

14．某班开展一次智力竞赛活动，共 a，b，c 三个问题，其中题 a 满分是 20 分，题 b，c 满分都是 25 分．每道题或者得满分，或者得 0 分．活动结果显示，全班同学每人至少答对一道题，有 1 名同学答对全部三道题，有 15 名同学答对其中两道题．答对题 a 与题 b 的人数之和为 29，答对题 a 与题 c 的人数之和为 25，答对题 b 与题 c 的人数之和为 20．则该班同学中只答对一道题的人数是____；该班的平均成绩是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$.

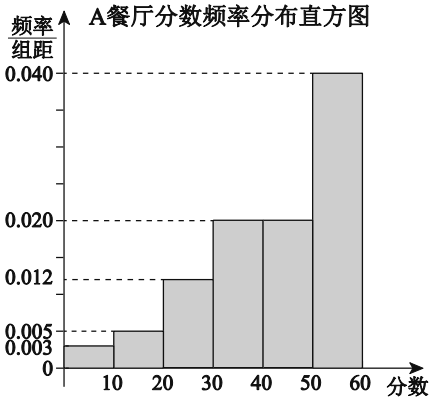
（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）设 β 是锐角，且 $f(\beta)=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$，求 β 的值.

16.（本小题满分 13 分）

某大学为调研学生在 A，B 两家餐厅用餐的满意度，从在 A，B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取了 100 人，每人分别对这两家餐厅进行评分，满分均为 60 分.

整理评分数据，将分数以10 为组距分成6 组：$[0,10)$，$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60]$，得到 A 餐厅分数的频率分布直方图，和 B 餐厅分数的频数分布表：



B 餐厅分数频数分布表

分数区间	频数
$[0,10)$	2
$[10,20)$	3
$[20,30)$	5
$[30,40)$	15
$[40,50)$	40
$[50,60]$	35

（Ⅰ）在抽样的 100 人中，求对 A 餐厅评分低于 30 的人数；

（Ⅱ）从对 B 餐厅评分在$[0,20)$范围内的人中随机选出 2 人，求 2 人中恰有 1 人评分在$[0,10)$范围内的概率；

（Ⅲ）如果从 A，B 两家餐厅中选择一家用餐，你会选择哪一家？说明理由.

17.（本小题满分 13 分）

设$\{a_n\}$是首项为1,公差为2的等差数列，$\{b_n\}$是首项为1，公比为q的等比数列．记$c_n=a_n+b_n$，$n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）若$\{c_n\}$是等差数列，求q的值；

（Ⅱ）求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

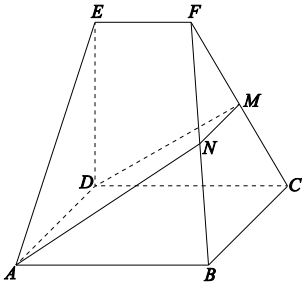
18.（本小题满分 14 分）

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$EF \parallel CD$，$CD \perp EA$，$CD = 2EF = 2$，$ED = \sqrt{3}$．M 为棱 FC 上一点，平面 ADM 与棱 FB 交于点 N．

（Ⅰ）求证：$ED \perp CD$；

（Ⅱ）求证：$AD \parallel MN$；

（Ⅲ）若 $AD \perp ED$，试问平面 BCF 是否可能与平面 $ADMN$ 垂直？若能，求出 $\dfrac{FM}{FC}$ 的值；若不能，说明理由．



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = \dfrac{a}{x-2} + \ln x$，其中 $a \in \mathbf{R}$．

（Ⅰ）给出 a 的一个取值，使得曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 存在极小值和极大值，证明：$f(x)$ 的极小值大于极大值．

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$P(\sqrt{2},1)$．直线$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$ 与椭圆C 相交于A,B 两点．

（Ⅰ）求椭圆C 的方程；

（Ⅱ）求△PAB 的面积的最大值；

（Ⅲ）设直线PA,PB 分别与 y 轴交于点M,N．判断$|PM|$，$|PN|$的大小关系，并加以证明．

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．A　2．A　3．D　4．C　5．D　6．B　7．A　8．D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$1+2\mathrm{i}$　10．7　11．2

12．$(x-2)^2+(y-2)^2=1$　13．-2；$-\sqrt{2}$ 或 1　14．4；$4\sqrt{2}$

注：第 13、14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，　$k\in\mathbf{Z}$.　［3 分］

所以 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.［4 分］

（Ⅱ）依题意，得 $\tan(\beta+\frac{\pi}{4})=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$.　［5 分］

所以 $\dfrac{\sin(\beta+\frac{\pi}{4})}{\cos(\beta+\frac{\pi}{4})}=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$.①　［7 分］

因为 β 是锐角，所以 $\frac{\pi}{4}<\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，［8 分］

所以 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})>0$，［9 分］

①式化简为 $\cos(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$.　［10 分］

所以 $\beta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，［12 分］

所以 $\beta=\frac{\pi}{12}$.　［13 分］

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 A 餐厅分数的频率分布直方图，得

对 A 餐厅评分低于 30 的频率为 $(0.003+0.005+0.012)\times10=0.2$，［2 分］

所以，对 A 餐厅评分低于 30 的人数为 $100\times0.2=20$.　［3 分］

（Ⅱ）对 B 餐厅评分在 $[0,10)$ 范围内的有 2 人，设为 $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2$；

对 B 餐厅评分在 $[10,20)$ 范围内的有 3 人，设为 $\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3$.

从这 5 人中随机选出 2 人的选法为：

$(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2)$，$(\mathrm{M}_1,\mathrm{N}_1)$，$(\mathrm{M}_1,\mathrm{N}_2)$，$(\mathrm{M}_1,\mathrm{N}_3)$，$(\mathrm{M}_2,\mathrm{N}_1)$，$(\mathrm{M}_2,\mathrm{N}_2)$，$(\mathrm{M}_2,\mathrm{N}_3)$，$(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2)$，$(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_3)$，$(\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$，

共10种．［ 7分］

其中，恰有1人评分在$[0,10)$范围内的选法为：(M_1,N_1)，(M_1,N_2)，(M_1,N_3)，(M_2,N_1)，(M_2,N_2)，(M_2,N_3)，共6种．［ 9分］

故2人中恰有1人评分在$[0,10)$范围内的概率为$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$．［10分］

（Ⅲ）从两个餐厅得分低于30分的人数所占的比例来看：

由（Ⅰ）得，抽样的100人中，A餐厅评分低于30的人数为20，

所以，A餐厅得分低于30分的人数所占的比例为20%．

B餐厅评分低于30的人数为$2+3+5=10$，

所以，B餐厅得分低于30分的人数所占的比例为10%．

所以会选择B餐厅用餐．［13分］

注：本题答案不唯一．只要考生言之合理即可．

17．（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）因为$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，

所以 $a_n=2n-1$．［ 2分］

因为 $\{b_n\}$是首项为1，公比为q的等比数列，

所以$b_n=q^{n-1}$．［ 4分］

所以$c_n=a_n+b_n=2n-1+q^{n-1}$．［ 5分］

因为 $\{c_n\}$是等差数列，

所以$2c_2=c_1+c_3$，［ 6分］

即 $2(3+q)=2+5+q^2$，解得 $q=1$．［ 7分］

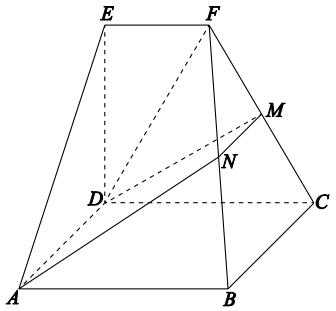
经检验，$q=1$时，$c_n=2n$，所以$\{c_n\}$是等差数列．［ 8分］

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$c_n=2n-1+q^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$．

所以$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=n^2+\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}$．［10分］

当$q=1$时，$S_n=n^2+n$．［11分］

当$q\neq1$时，$S_n=n^2+\frac{q^n-1}{q-1}$．［13分］



18．（本小题满分14分）

解：（Ⅰ）因为$ABCD$为矩形，所以$CD\perp AD$．［ 1分］

又因为$CD\perp EA$，［ 2分］

所以$CD\perp$平面EAD．［ 3分］

所以$ED\perp CD$．［ 4分］

（Ⅱ）因为 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD // BC$，［ 5 分］

所以 $AD //$ 平面 FBC．［ 7 分］

又因为平面 $ADMN \cap$ 平面 $FBC = MN$，

所以 $AD // MN$．［ 8 分］

（Ⅲ）平面 $ADMN$ 与平面 BCF 可以垂直．证明如下：［ 9 分］

连接 DF．因为 $AD \perp ED$， $AD \perp CD$，

所以 $AD \perp$ 平面 $CDEF$．［10 分］

所以 $AD \perp DM$．

因为 $AD // MN$，所以 $DM \perp MN$．［11 分］

因为平面 $ADMN \cap$ 平面 $BCF = MN$，

若使平面 $ADMN \perp$ 平面 BCF，

则 $DM \perp$ 平面 BCF，所以 $DM \perp FC$．［12 分］

在梯形 $CDEF$ 中，因为 $EF // CD$， $ED \perp CD$， $CD = 2EF = 2$， $ED = \sqrt{3}$，

所以 $DF = DC = 2$．

所以若使 $DM \perp FC$ 能成立，则 M 为 FC 的中点．

所以 $\frac{FM}{FC} = \frac{1}{2}$．［14 分］

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $D = \{x \mid x > 0$，且 $x \neq 2\}$，且 $f'(x) = -\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{1}{x}$．［ 2 分］

当 $a = 1$ 时，曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线．证明如下：［ 3 分］

曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线 $\Leftrightarrow$ 方程 $f'(x) = 0$ 存在 D 上的解．

令 $-\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = 0$，整理得 $x^2 - 5x + 4 = 0$，

解得 $x = 1$，或 $x = 4$．

所以当 $a = 1$ 时，曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线．［ 5 分］

注：本题答案不唯一，只要 $a > 0$ 均符合要求．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x) = -\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{1}{x}$．

①当 $a \leqslant 0$ 时， $f'(x) > 0$ 恒成立，

函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，无极值，不合题意．［ 6 分］

②当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) = 0$，整理得 $x^2 - (a+4)x + 4 = 0$．

由 $\Delta = [-(a+4)]^2 - 16 > 0$，

所以，上述方程必有两个不相等的实数解 x_1， x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

由 $\begin{cases}x_1+x_2=a+4>4,\\ x_1x_2=4,\end{cases}$ 得 $0<x_1<2<x_2$.［ 8 分］

$f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,2)$	$(2,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	↘	极小值	↗

所以， $f(x)$ 存在极大值 $f(x_1)$，极小值 $f(x_2)$.［10 分］

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(\frac{a}{x_2-2}+\ln x_2\right)-\left(\frac{a}{x_1-2}+\ln x_1\right)=\left(\frac{a}{x_2-2}-\frac{a}{x_1-2}\right)+(\ln x_2-\ln x_1).$$ ［11 分］

因为 $0<x_1<2<x_2$，且 $a>0$，

所以 $\dfrac{a}{x_2-2}-\dfrac{a}{x_1-2}>0$， $\ln x_2-\ln x_1>0$，

所以 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以 $f(x)$ 的极小值大于极大值.［13 分］

20.（本小题满分 14 分）

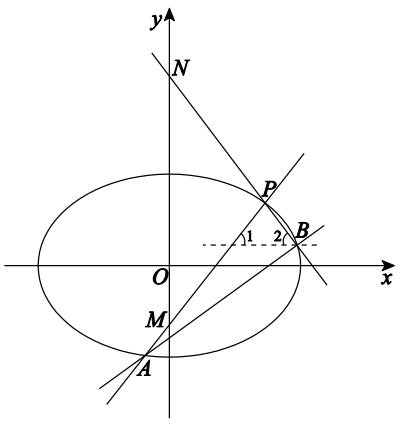
解：（Ⅰ）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的半焦距为 c.

因为椭圆 C 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$， 即 $a^2=2b^2$.［ 1 分］

由 $\begin{cases}a^2=2b^2,\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2.\end{cases}$［ 3 分］

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.［ 4 分］



（Ⅱ）将 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

消去 y 整理得 $x^2+\sqrt{2}mx+m^2-2=0$.［ 5 分］

令 $\Delta=2m^2-4(m^2-2)>0$，解得 $-2<m<2$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

则 $x_1+x_2=-\sqrt{2}m$， $x_1x_2=m^2-2$.

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-m^2}\text{．［6分］}$$

点$P(\sqrt{2},1)$到直线$x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}m=0$的距离为$d=\frac{\left|\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}m\right|}{\sqrt{1+2}}=\frac{\sqrt{2}|m|}{\sqrt{3}}$．　　［7分］

所以△PAB的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|\cdot\sqrt{4-m^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{-(m^2-2)^2+4}\leqslant\sqrt{2}\text{，［8分］}$$

当且仅当$m=\pm\sqrt{2}$时，$S=\sqrt{2}$．

所以△PAB的面积的最大值是$\sqrt{2}$．［9分］

（Ⅲ）$|PM|=|PN|$．证明如下：［10分］

设直线PA，PB的斜率分别是k_1，k_2，

则$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}=\frac{(y_1-1)(x_2-\sqrt{2})+(y_2-1)(x_1-\sqrt{2})}{(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$．［11分］

由（Ⅱ）得$(y_1-1)(x_2-\sqrt{2})+(y_2-1)(x_1-\sqrt{2})$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m-1)(x_2-\sqrt{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m-1)(x_1-\sqrt{2})$$

$$=\sqrt{2}x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}(m-1)$$

$$=\sqrt{2}(m^2-2)+(m-2)(-\sqrt{2}m)-2\sqrt{2}(m-1)$$

$$=0\text{，}$$

所以直线PA，PB的倾斜角互补．［13分］

所以$\angle1=\angle2$，

所以$\angle PMN=\angle PNM$．

所以$|PM|=|PN|$．［14分］